UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Álgebra

TESIS DOCTORAL

La enseñanza de la visualización en álgebra lineal: el caso de los espacios vectoriales cociente

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Blanca Souto Rubio

Directora

Inés Mª Gómez-Chacón

Madrid, 2013

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Doctorado de Investigación Matemática

LA ENSEÑANZA DE LA VISUALIZACIÓN EN ÁLGEBRA LINEAL: EL CASO DE LOS ESPACIOS VECTORIALES COCIENTE

Memoria presentada para optar al título de
Doctor Europeo en Ciencias Matemáticas
presentada por

Blanca Souto Rubio

Bajo la dirección de la doctora
Inés Mª Gómez-Chacón

Madrid, 2013

Blanca Souto Rubio

La enseñanza de la visualización en Álgebra Lineal: el caso de los Espacios Vectoriales Cociente.

Tesis Doctoral de la Universidad Complutense de Madrid.

Palabras clave: Visualización, Representaciones, Nivel Universitario, Didáctica del Álgebra Lineal, Developmental Research.

Diseño de la cubierta: Carlos Miguel Caldeira y Blanca Souto Rubio.

A mis padres y a la memoria de mi "yaya"

PREFACIO

La investigación que aquí se presenta es un trabajo de tesis doctoral enmarcado en el Programa de Doctorado de Investigación Matemática de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM) con Mención de Calidad (MCD 2006-00482). Se desarrolló entre Octubre de 2009 y Julio de 2013 con el soporte de una beca de Formación del Profesorado Universitario (AP2007-00866) financiada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. La realización de esta investigación me ha permitido profundizar en una cuestión que me preocupa desde mi etapa de estudiante de licenciatura: la mejora de la enseñanza a nivel universitario. En particular, la perspectiva dada por la visualización ha conectado con mi interés de hacer las Matemáticas Avanzadas más accesibles a través de la intuición. Por tanto, agradezco al Ministerio y a las instancias académicas de la Facultad de Matemáticas por impulsar esta línea de investigación. Considero que ha sido una vía muy interesante de ataque al problema mediante la cual he podido aprender y desarrollarme como docente y como investigadora, esperando haber adquirido, como mínimo, las competencias básicas que según el RD 1393/2007 muestran la capacidad investigadora.

En este aprendizaje ha sido clave la realización de dos estancias breves de doctorado. La primera estancia breve tuvo lugar en la Universitetet i Agder (Kristiansand, Noruega) durante los meses de Mayo y Junio de 2011, financiada por EEA-EFTA Grants y la UCM en el marco del NILS mobility project. La segunda fue en la University of East Anglia (Norwich, UK) entre Octubre y Diciembre de 2011, financiada a través de las becas para estancias breves del programa FPU.

También la participación en diversos Seminarios y Congresos ha contribuido notablemente tanto al avance de esta investigación como de mi formación profesional. Por ejemplo, he asistido a varios cursos para estudiantes de doctorado (cursos intensivos de verano asociados a la Univeristetet i Agder y a la Universitetet i Oslo, y el Encuentro de Estudiantes organizado por la Universitat Autònoma de Barcelona, UAB) que me ayudaron especialmente en la elaboración del proyecto inicial. La presentación de comunicaciones en congresos, tanto nacionales (Jornadas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM en Baeza) como internacionales (PME33, CERME7, PME35), ha permitido contrastar resultados y revisar sistemáticamente el proceso de investigación incorporando comentarios y revisiones. Finalmente, la invitación a dar una Regular Lecture en el ICME 12 en Corea me abrió la posibilidad de compartir los resultados no sólo con la comunidad científica sino también con profesores en activo.

Además de los apoyos institucionales recibidos, este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración y el soporte de muchas personas a quienes expreso mi gratitud a continuación. Pido disculpas adelantadas por quienes se me puedan olvidar, porque de verdad que sin todos los apoyos recibidos nunca hubiera conseguido finalizar esta ardua tarea.

Mis agradecimientos a Inés Mª Gómez-Chacón por haberme dado la oportunidad de iniciar esta aventura, por introducirme en el mundo de Miguel de Guzmán (aun cuando ya no estaba aquí) y por presentarme un tema de investigación que finalmente me ha resultado apasionante. Gracias por la confianza depositada en mí y por creerme capaz de afrontar libremente las dificultades que entraña un trabajo como este. No tengo palabras para describir el apoyo recibido durante estos años.

Gracias también a Jose Manuel Gamboa por sus palabras de aliento, por estar siempre ahí cuando he necesitado su ayuda y por compartir conmigo su amplia experiencia docente, que sin duda ha enriquecido significativamente los resultados de este trabajo.

En Noruega trabajé bajo la supervisión de Barbro Grevholm y Claire V. Berg a quienes me gustaría agradecer su buena acogida y dedicación. Thanks to Babro for integrating me in Department's activities, for her support and for the interest shown on my research. Thanks too for the conversations about visualization in Linear Algebra and methodology, which let me know about Kadunz's work and made me aware of the dilemma of being teacher and researcher at the same time. Merci beaucoup à Claire de son attention et de la proximité offerte. Merci aussi pour m'aider à comprendre la différence entre Developmental Research (DR) et Design Based Research et de me faire réfléchir avec des questions qui m'ont fait faire des progrès.

También quisiera expresar mi agradecimiento a Elena Nardi, quien me supervisó durante la estancia en Inglaterra y, junto a Paola Iannonne, me escuchó y aconsejó justo antes de volver a España para comenzar el trabajo de campo de la Fase II. Thanks to Elena for agreeing to be my supervisor without knowing me before, for the advices given and for allowing the attendance at her doctorate courses once a week. With her way of doing and thinking, she awakened in me a deep admiration. I am grateful to Paola for her disinterested help and comments and for facilitating the observation of some Linear Algebra courses there.

Las estancias, los viajes, los intercambios entre universidades han permitido encontrarme con otros expertos y conversar con ellos, a veces apasionadamente, sobre aspectos relevantes de esta investigación. A todos ellos me gustaría agradecer el tiempo prestado, los conocimientos que compartieron conmigo y la inspiración que me ofrecieron. En particular, he consultado: a Michèle Artigue de la Universidad de Paris 7 (Francia) sobre Ingeniería Didáctica y Didáctica del Álgebra a nivel universitario; a Abraham Arcavi del Weizmann Institute (Israel), sobre visualización; a Simon Goodchild y Maria Luiza Cestari de la Univeristetet i Agder sobre paradigmas y metodologías de investigación (en particular sobre el DR y el análisis del discurso); a Willy Dörfler de la University of Klagenfurt (Austria) sobre Pensamiento Diagramático y sus relaciones con otros marcos teóricos (como los de registros semióticos o los modelos intuitivos de Fischbein); a Guislaine Gueudet-Chartier de Université de Bretagne Occidentale (Francia) sobre visualización y el papel de la Geometría en AL; a Alain Kuzniak de la Universidad París 7 (Francia) sobre registros de representación semiótica y pensamiento geométrico; a Lourdes Figueiras de la UAB sobre la noción de visualización y el Conocimiento Matemático del Profesor; a Luis Carlos Contreras de la Universidad de Huelva sobre Conocimiento Matemático del Profesor; a Maria Alessandra Mariotti de la Università di Siena sobre Teorías de Mediación Semiótica. Finalmente, a Bill Barton de la University of Auckland (Nueva Zelanda) que ha apoyado mi trabajo desde que supo de él, mostrando un interés que me gustaría agradecer.

En la Facultad de Matemáticas de la UCM quería agradecer, en primer lugar, a los profesores y estudiantes participantes en esta investigación, pues por su naturaleza, ésta no habría sido posible sin ellos. Ha sido una experiencia muy gratificante para mí y me alegro de haberla compartido con ellos, de quienes tanto he aprendido. Gracias por colaborar con ilusión conmigo y ayudarme a dar forma a la idea de la "enseñanza de la visualización" en un ambiente natural. Gracias también al personal administrativo y de servicios del Departamento de Álgebra, de la Secretaría y la Biblioteca de la Facultad de Matemáticas por su ánimo y colaboración con las dificultades técnicas y administrativas. Y un agradecimiento especial a Angelines por sus citas (en particular la que da entrada a este trabajo) y su gusto por la visualización.

No me gustaría olvidar en estos agradecimientos a las personas del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona, ya que éste ha sido para mí un lugar de referencia al que, al menos una vez al año, sentía la necesidad de acudir para encontrar nuevas preguntas, nuevos retos y sobre todo, para recoger el impulso necesario para continuar. Gracias por aceptar mis visitas, por acogerme como a una estudiante de doctorado más. Gracias a los estudiantes de doctorado por organizar unos encuentros tan necesarios y tan enriquecedores, que me han dado la oportunidad de poner mis avances por escrito y compartirlos con iguales, en un ambiente muy cuidado, lleno de ganas e ilusión. Pero sobre todo gracias a todos por hacer este viaje, que es la investigación, menos solitario y más divertido, tanto en Barcelona como en otros lugares del mundo.

Y así, poco a poco voy pasando del terreno académico al personal. Afortunadamente, he tenido la suerte de poder conocer personas en la intersección de ambos, a los que puedo considerar al mismo tiempo colegas y amigos. Aunque a veces la distancia dificulta mantener la relación, cada uno de ellos ha sido clave en alguno de los períodos de realización de este trabajo.

Antes de nada, agradecer al "Spanish team" (aunque los tres seamos rubios y con ojos azules) sus ánimos, las risas, los trabajos compartidos (y los que están por llegar), las cenas en congresos, los emails de aliento. Gracias a Pedro, por su positivismo y alegría, incluso antes de conocernos en persona. Gracias a Laura por su saber hacer, sus ánimos y su pragmatismo. Gracias por ponerme en contacto con las nuevas tecnologías. Pero sobre todo agradezco sus ganas, su energía y, más que nada, su amistad.

Thanks to my "norwegian" colleagues: Ida, Suela, Hege, Inger and Andualem. It was a great experience to meet you all. I enjoyed a lot your company either at the University or knowing Norway. "Very many thanks" for hours of conversation and walks, for sharing your knowledge and your houses and thank you for eating with me "Spanish omelet".

In the UK I had the opportunity to share office and courses with very stimulating people, who made me feel like one more. Thanks to Maria for her support, for her confidence in methodology (which lead us to interesting conversations) and for giving a Mediterranean flavor to Norwich. Particularly thanks to a very special couple: Matt and Katy. Thanks for their help with English, for their patience and cares (and sorry for being "very bad" with English schedule). Thanks them for showing me the UK, beyond the University. But

thanks mostly to them for being my English family, offering me a cozy and warm place that I could call home.

Volviendo a casa, agradezco a mis compañeros de despacho a lo largo de estos años (Alba, Simone, Alicia, Alfonso) su comprensión, paciencia y palabras de aliento. Al resto de doctorandos de la Facultad, gracias por haberme hecho sentir una más (a pesar de yo sentirme diferente por ser "la de Educación"), por recordarme que las Matemáticas pueden ser apasionantes y por creer en la investigación como herramienta para desarrollar nuevo conocimiento. Gracias a Fernando, a Paula y sobre todo a Luna, con quienes he podido compartir, aquí en Madrid, pensamientos sobre Educación Matemática. Más recientemente, gracias a Carolina y a Maricela por ser compañeras de camino y por demostrarme que la inquietud, las ganas y la juventud se llevan por dentro. Gracias a Carolina por estar ahí siempre, dispuesta a animarme o a ayudarme con lo que haga falta. Gracias a Maricela por el impulso que me ha dado al final, cuando el cansancio y el agotamiento estaban pudiendo conmigo. Y no se me puede olvidar Carlos, que ha sido todos estos años compañero de despacho, de bici, de caminos a la montaña, de proyectos de investigación, de viajes a congresos, de penas y de alegrías. Gracias por estar ahí, por ser consejero y vecino, pero sobre todo, gracias por ser mi amigo.

De mis tiempos de estudiante de Matemáticas me han quedado personas que también me han acompañado en este proceso, haciéndolo más agradable y llevadero. Gracias a todos ellos por esas "quedadas de matemáticos", ya sean en el campo o en la ciudad, en Granada o en Sevilla; gracias por las llamadas para "saber de nuestras vidas" y por aprender juntos compartiendo proyectos vitales. Gracias a Ana por arrancarme siempre una sonrisa, incluso en los momentos bajos (en eso Ben también ayuda), por compartir "desquicies" y por recordarme "qué bello es vivir". Gracias a Jose y a Héctor, por presentarme a gentes tan majas como ellos con quienes últimamente ando liada en proyectos musicales (¡olé, issa rapaçiada!) o reeducadores (gracias, chicas). Y gracias a todos los demás que no nombro.

Hay otras personas que me han ayudado a distraerme y divertirme, recordándome que hay vida más allá de la tesis. Gracias a los "samberos (y asociados)" porque a pesar de tenerlos muy descuidados, con tantas horas de ordenador, siempre me reciben como si nos hubiésemos visto ayer, llenos de cariño y buen humor. Gracias a Manolo, vecino y amigo, por interesarse por mi trabajo y por estar siempre dispuesto a compartir una caña o una comida en el barrio. Gracias por su amistad, ya de años, a Leti y al "Peru" que son casi como familia y siempre están ahí cuando hace falta. Y especialmente, a "las Chicas de Oro" un millón de gracias por ser únicas, cada una a su manera. Gracias a Amaya por los mensajes de ánimo, por estar pendiente (y hasta aguantar alguna charla de mates) y por reírse conmigo. A Elisa, gracias por los días de apoyo de estudio, por los planes alternativos y por las conversaciones sobre lo divino y lo humano. A Mª Eugenia, gracias por las tardes, compartidas entre niñas, animales y charlas, y por ayudarme a "tragarme algunos sapos" duros de roer.

Un pedazo de este trabajo se ha realizado en Madeira, donde tengo parte de la familia. A toda la gente de allí, les agradezco su cariño y apoyo. Aunque a veces me miraban con una mezcla de extrañeza y lástima por verme trabajar en vacaciones, siempre me han ayudado

a hacerlo posible. A Marcio, muito obrigada por deixarme transformar a sua casa no meu escritório, a Andreia por sua companhia e cuidados, e a Senhora Angela por sua fortaleza, por me ajudar com as coisas práticas e por os passeios ao por do sol.

El resto de la família anda casi toda por Madrid (salvo mis tíos de Cañamero). Gracias a todos por los encuentros familiares, por vuestros ánimos y por vuestra confianza.

Por fin llego a mis padres y mi hermano, a quienes tengo tanto que agradecer que no sé ni por dónde empezar y, escriba lo que escriba, seguro que me dejo algo. Enano, muchas gracias por los favores prácticos mientras yo andaba un camino que me trajo hasta aquí. Gracias por hacerme ver que, a veces, hay que pedir ayuda y por tu buena disposición al dármela. Pero sobre todo, por recordarme las cosas importantes de la vida. A mi padre tengo que agradecerle su curiosidad y ganas de aprender, que sin duda se me han contagiado. También su saber escuchar, sus consejos y ayudas cuando he estado más atascada y sin los que creo que nunca hubiera podido llegar a concluir nada, que es lo que más me cuesta. Y a mi madre... Gracias por todo, porque ha sido un apoyo fundamental. Llegaba a casa cansada, pensando que no podía más. La llamaba y ella, siempre disponible para mí, encontraba palabras de ánimo que me ayudaban a seguir. Necesitaba a alguien que me revisara el estilo, y ahí estaba ella con su sonrisa, dispuesta a ayudarme en todo lo que pudiera. Gracias por ser una MADRE con mayúsculas: Cariñosa, Atenta, Divertida, Alegre, y ¡hasta una eficiente Correctora de Estilo! Gracias por tus detallados comentarios al leer esta Memoria, porque sin duda han ayudado a hacerla más clara. Pero sobre todo, gracias por quererme tanto, junto a mi padre, y demostrármelo no sólo con palabras, sino con actos. Y lo último, pero no menos importante, gracias por tantas comidas y cenas, preparadas con cariño y dedicación, que nos han juntado a la mesa y, entre charla y charla, me han hecho sentir que pase lo que pase, siempre me querréis y os tendré ahí. Gracias.

Y ya sólo me queda agradecer a Miguel, mi compañero incansable de camino. Gracias por haber llegado hasta aquí conmigo, porque sé que no ha sido fácil. Gracias por no dudar de mí, por apoyarme siempre. Gracias por tus cenas, tus comidas, tus compras. Gracias por esperarme y quererme en la distancia. Gracias por tener siempre una sonrisa frente a mi desesperación y porque no te quedan hombros que dejarme para llorar. Gracias por sacarme de mi mundo y llevarme al tuyo. Gracias por tu amor incondicional, que me ha ayudado a caminar y llegar, por fin, al destino.

0 Índice de contenidos

"The inborn capacity to understand through the eyes has been put to sleep and must be reawakened."

R. Arnheim, (1974). *Art and Visual Per ception: A Psychology of the Creative Eye.*

Figura 1. Las meninas, Picasso 1957.

"*Ya tenemos respuestas a nuestras preguntas. Y en el proceso de encontrar estas respuestas, hemos encontrado también algo más:un ejemplo gráfico de cómo describir el espacio cociente que se obtiene al establecer sobre los elementos de un conjunto, en este caso los personajes de la escena de Velázquez, una partición, una relación de equivalencia. Clasificamos las figuras en función de dónde estén colocadas respecto a la doncella del búcaro. El espacio resultante consta de cinco elementos o clases de aquivalencia (ella misma, izquierda, derecha, delante y detrás), cinco puntos de vista, de cada uno de las cuales Picasso ha elegido un representante: la bandeja, la mano, el pelo, el ojo derecho y el perfil izquierdo*".

Capi Corrales Rodrigáñez (2005), Un ejemplo de cociente. *Suma, 48*, 99-108.

Perhaps if more teachers were aware of both the power and the possible pitfalls of visualization in Mathematics, more students would be encouraged to overcome the disadvantages and benefit from the considerable strengths of using their imagery more fully in Mathematics (Presmeg, 1997, p. 310).

1 INTRODUCCIÓN

La investigación que se presenta tiene por finalidad la caracterización y potenciación de la enseñanza de la visualización en un curso de Álgebra Lineal del Grado de Matemáticas para mejorar la comprensión de los estudiantes. En este capítulo se precisa el problema de investigación, justificando el enfoque elegido y detallando las preguntas y los objetivos de la misma. Finalmente se explica la estructura de esta Memoria.

1.1 MOTIVACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Entre las investigaciones sobre Nivel Terciario son significativas las que han estudiado las dificultades de los estudiantes en su entrada a la Universidad. Como causa de dichas dificultades se señala el nivel de abstracción y formalismo en el Pensamiento Matemático Avanzado (Artigue, Batanero, & Kent, 2007; Holton et al., 2001; Tall, 1991). Recientemente se están adoptando perspectivas más globales que apuntan otras fuentes de problemas derivados del cambio de cultura entre dos instituciones educativas diferentes, el Instituto y la Universidad (Gueudet-Chartier, 2008). Esta investigación, aunque parte de elementos institucionales que pueden reflejar estas características[1], trata de avanzar en la línea de Pensamiento Avanzado centrándose en dos aspectos escasamente tratados hasta la fecha: la Visualización y las propuestas de mejora de enseñanza.

Elegimos la visualización por considerarla parte fundamental del "quehacer matemático". Nuestro punto de partida se sitúa en el trabajo de Miguel de Guzmán (1996, 2001, 2002), pero otros autores también han apoyado su uso a nivel universitario (Arcavi, 2003; González-Martín & Camacho, 2004; Tall, 1991; Zimmermann & Cunningham, 1991):

> *La visualización aparece como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones ente los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático (Guzmán, 1996, p. 17)*

Aun reconocida la importancia de la visualización en la comprensión de las Matemáticas Avanzadas son escasas las experiencias de docencia y de investigación que la tienen en cuenta a nivel universitario. Por una parte, las investigaciones sobre clases magistrales evidencian un estilo de enseñanza dominado por el formalismo y el simbolismo (Bergsten, 2007; Weber, 2004; Wood, Joyce, Petocz, & Rodd, 2007). De otra, la revisión sobre el estado del arte del campo de la Visualización en Educación Matemática (EM) que hace Presmeg (2006a) pone de manifiesto que la mayoría de investigaciones sobre este tema se han desarrollado a niveles de Primaria y Secundaria.

En esta investigación tratamos de explicitar la relevancia de la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje en los cursos universitarios. Se ha elegido la disciplina de Álgebra Lineal para realizar un análisis en profundidad de qué obstaculiza su uso y cómo se podría plantear propuestas de mejora. En el proceso de investigación seguido se genera no sólo conocimiento útil para la práctica, sino también teórico, contribuyendo así la necesidad planteada en la comunidad científica de desarrollar más investigación sobre visualización a nivel universitario.

1.1.1 Visualización a Nivel Universitario

El siguiente episodio, procedente del trabajo de campo del estudio, ilustra qué entendemos por visualización en esta investigación y cuál es su importancia en los procesos de enseñanza-aprendizaje a nivel universitario. Nos situamos en una clase

[1] Jornada Mejora de Competencias Matemáticas: Análisis y valoración de las actuaciones realizadas para mejorar las competencias de los estudiantes universitarios de nuevo ingreso. Iniciativas tendentes a establecer puentes entre el bachillerato y la universidad. Celebradas en la Universidad Complutense de Madrid en Noviembre, 2012.

teórica dedicada a resolver las dudas de los estudiantes antes de los exámenes de Febrero. El día anterior, un estudiante había preguntado por el siguiente problema: *¿existe alguna matriz antisimétrica A con rango impar?* El profesor comienza la clase escribiendo su solución en la pizarra (Figura 1. 1).

<u>Obs. 1:</u> Si A es antisimétrica y n es impar $\Rightarrow$ $det\ A=0$, pues $det(A)=det(-A^t)=(-1)^n det(A^t)=-det(A)$

<u>Obs. 2</u>: Tanto el rg como el carácter antisimétrico de una matriz se preservan si hago esto $f_i \rightarrow f_j$ y $c_i \rightarrow c_j$

<u>Obs. 3</u>: Sea r el rango de A. Sea B la matriz que se obtiene intercambiando filas y columnas de una A como en <u>Obs. 2</u>, de modo que el menor de B formado por las r primeras filas y columnas es no nulo.

<u>Obs. 4</u>: $B = \left(\begin{array}{c|c} * & \square \\ \hline \square & \square \end{array}\right)$ antisimétrica $\Rightarrow(*)$ antisimétrica.

Conclusión: $\left.\begin{array}{c} \det(*) \neq 0 \\ (*)\ antisimétrica \end{array}\right\} \xRightarrow{Obs.1} r\ es\ par$

Figura 1. 1: Solución del problema escrita por el profesor en la pizarra.

Cuando el profesor explica la solución, otro estudiante levanta la mano y muestra dudas sobre la "*Observación 3*":

> *Estudiante: ¿La tres? ¿Lo que has hecho es mover el menor a la esquina? ¿Eso cómo sabes que lo puedes hacer? Porque no puedes mover la fila... [...] Si tienes una matriz 4 por 4, y en la esquina de la derecha un menor 2 por 2, haciendo eso, no puedes ponerlo a la izquierda.*

Como respuesta, el profesor escribe un ejemplo de una matriz 4x4 antisimétrica en la pizarra (Figura 1. 2, en la izquierda) y comienza a pensar en alto sobre él. Así empieza una larga discusión –que dura prácticamente toda la clase– en la que el profesor trata de averiguar dónde falla su solución y busca una manera de resolver el problema con las herramientas que los estudiantes tienen disponibles en ese momento del curso. Durante este proceso, el profesor parece quedarse atascado en varias ocasiones. En una de estas ocasiones, aparece el siguiente diagrama (Figura 1. 2, en la derecha). El profesor lo utiliza para pensar, con generalidad, sobre qué tipo de transformaciones preservan el carácter antisimétrico de la matriz. También este diagrama resulta útil para comunicar estos pensamientos a la clase y para favorecer una discusión sobre el problema.

Figura 1. 2 El profesor pensando sobre el problema con un ejemplo concreto (en la izquierda) y con un diagrama (en la derecha).

Este episodio nos informa algunos aspectos relevantes para este estudio:

- La visualización está presente en la enseñanza y el aprendizaje de muchos cursos universitarios (y no sólo ligada a contenidos de Geometría).
- La visualización puede ser una ayuda cuando se resuelven problemas y de hecho es necesaria para la comprensión de las Matemáticas Avanzadas.
- La visualización es útil para enseñar y comunicar pensamientos matemáticos.

Estas observaciones nos llevan a explicitar un primer supuesto del que parte esta investigación:

> **La visualización juega un papel importante en los procesos de enseñanza-aprendizaje y es esencial para la comprensión y desarrollo del pensamiento matemático a nivel avanzado.**

1.1.2 Enseñar Visualización de Forma Explícita

Los resultados del Estudio Exploratorio previo a este trabajo (Souto & Gómez-Chacón, 2011b; Souto-Rubio, 2009) sobre dificultades de los estudiantes relacionadas con la visualización en Análisis aportan también razones empíricas para situar el problema de investigación.

El objetivo principal de este trabajo fue "*explorar procesos y posibilidades de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Análisis con alumnado de primer curso de Universidad*". Para ello, se llevó a cabo una investigación que combinaba el estudio de un gran grupo (52 estudiantes de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas impartida en Universidad Complutense de Madrid) con un estudio de 6 casos. Al gran grupo se le aplicó dos cuestionarios de 10 y 11 problemas no rutinarios respectivamente que permitieron realizar un primer diagnóstico de las habilidades de visualización y las dificultades de aprendizaje en Análisis de los estudiantes. El estudio de casos se completó con entrevistas semi-estructuradas permitiendo triangular los datos de los cuestionarios y profundizar en aspectos afectivos, cognitivos y socioculturales de la preferencia por la visualización.

Este estudio aportó diversos tipos de resultados sobre: a) dificultades principales de los estudiantes en la disciplina de Análisis, así como sobre el papel de las representaciones en la compresión de los conceptos fundamentales del Análisis; b) procesos de visualización, con especial atención en las imágenes, identificando los tipos de imágenes, usos y errores; c) estudio de casos, perfiles de estudiantes según dos ejes: uno de nivel pensamiento matemático y comprensión de los conceptos fundamentales del Análisis (*Básico, Intermedio, Avanzado*) y otro que tiene en cuenta la preferencia por el uso de procesos de visuales para hacer Matemáticas (*Analítico, Visual, Mixto*).

Para la formulación de nuestro problema de investigación son relevantes los dos primeros tipos de resultados, que permiten establecer conclusiones en torno al rol que desempeñan las representaciones en la comprensión de los conceptos matemáticos (en Análisis, particularmente en el concepto de integral definida) y las consecuentes dificultades de los estudiantes. El tercer tipo de resultados, relativo a las diferencias individuales de los estudiantes ha dado lugar a interesantes investigaciones (Presmeg & Bergsten, 1995;

Presmeg, 1985, 1986, 2006a), pero no se abordará directamente en nuestro estudio. Por el contrario, el acento se pone en las Matemáticas y en explotar todas las posibilidades de visualización que éstas ofrecen.

Respecto a la *comprensión de los conceptos matemáticos*, el estudio confirmó su *dependencia con la visualización*. El análisis de las respuestas de los estudiantes a problemas no rutinarios evidencia que, para comprender, es necesario dominar diversidad de representaciones y ser capaz de manejarlas con flexibilidad, lo que en términos del marco teórico de registros semióticos de representación (Duval, 1999a, 1999b, 2006; Hitt, 2003, 2006) supone:

- Poseer varias representaciones y saber elegir adecuadamente cuál utilizar en cada situación.
- Poder distinguir qué registro es el adecuado (pues cada uno favorece un tratamiento distinto).
- Distinguir los diversos elementos representados, las relaciones entre ellos y saber distinguir cuáles de ellas son relevantes o no.
- Establecer relaciones entre los distintos objetos matemáticos involucrados; pudiendo darse éstas en diversas direcciones:
    - Entre dos representaciones distintas de un mismo concepto dentro de un registro determinado.
    - Entre representaciones de un mismo concepto entre distintos registros.
    - Entre representaciones de distintos conceptos dentro de un mismo registro.
- Aprehender globalmente las imágenes, involucrando a todos los elementos y relaciones relevantes, e independientemente a cualquier otro registro.

Consecuentemente, las *dificultades de los estudiantes* detectadas en la comprensión de los conceptos relacionadas con el manejo de las representaciones fueron: dificultades debidas a la elección de la representación, a la falta de flexibilidad (entre conceptos, entre registros, entre representaciones) y al manejo específico de cada registro. En particular, respecto al registro gráfico (con el que se identificó inicialmente la visualización) los estudiantes mostraron las siguientes dificultades:

- Realización de imágenes no adecuadas para el problema que se plantea, dando lugar a argumentos incorrectos o a bloqueos que les impiden continuar mediante:
    - Imágenes prototípicas (tratan de que las imágenes respondan a lo que esperan ver).
    - Imágenes incompletas (no recogen todos los elementos que intervienen en la respuesta correcta).
- Realización de imágenes adecuadas para la situación que se plantea pero que no se saben utilizar (o bien dan lugar a argumentos incorrectos –no coherentes con la imagen– o bien no se logra obtener información de la imagen):

- No ponen la atención en las relaciones o elementos de la representación adecuados, no distinguen entre lo superfluo y lo esencial.
- Hacen suposiciones basándose en la imagen que formalmente no son tan obvias. Exceso de confianza en la intuición sin mecanismos de control.
- No logran una visión global de todas las relaciones involucradas en la imagen.

- Predominio de un tipo de uso de las imágenes más ilustrativo que heurístico (ver la diferencia en la sección 3.2.3.3): el uso *heurístico* de las imágenes aporta nuevos argumentos y métodos de resolución que abren caminos hacia otro tipo de comprensión de los conceptos diferente a la que proporciona el registro analítico. Por el contrario, las imágenes *ilustrativas*, en el mejor de los casos, sólo sirven de guía del argumento analítico, cerrando las posibilidades creativas y ligadas al uso de la intuición que ofrece el uso *heurístico* (Souto & Gómez-Chacón, 2011b).

Investigaciones sobre el uso que los matemáticos hacen de las imágenes (Stylianou & Silver, 2004; Stylianou, 2002; Wilkerson-Jerde & Wilensky, 2011) muestran que éstos no se enfrentan a todas estas dificultades y sin embargo, sí son capaces de manejar flexiblemente las representaciones del modo descrito anteriormente. Han desarrollado un *conocimiento en torno a la visualización* que les permite utilizar la visualización de forma efectiva y que los estudiantes noveles no poseen. En este estudio partimos del supuesto que este saber de experto sería una excelente contribución a los modelos de enseñanza y consideramos que su enseñanza explícita contribuiría a la mejora de las dificultades presentadas por los estudiantes.

Los matemáticos han aprendido a utilizar la visualización de modo eficaz en su actividad. Ese conocimiento se puede y se debería enseñar de forma explícita.

Finalmente, el estudio previo aportó algunas recomendaciones didácticas en esa dirección. En particular, mostró que "*el hecho de utilizar representaciones gráficas para resolver problemas de Matemáticas durante la licenciatura no lleva espontáneamente al estudiante a la elaboración de un método para visualizar conceptos en la resolución de problemas no rutinarios*". Esto nos indica la complejidad que entraña la enseñanza de este conocimiento y nos lleva a querer profundizar en este fenómeno al que hemos denominado "enseñanza de la visualización".

1.1.3 Tema a Investigar

En esta investigación, por *visualización* se entiende el proceso, el producto y la habilidad de hacer Matemáticas a través de signos, representaciones, diagramas, gráficos, imágenes mentales, metáforas, ejemplos, analogías y, en general, imágenes visuales. *Aprender a visualizar* supone conocer los procesos y productos relativos a la visualización y poseer la habilidad de utilizarla de forma adecuada en el "quehacer matemático". Finalmente "*enseñar a visualizar*" o la "*enseñanza de la visualización*" hace referencia a las acciones realizadas para fomentar ese aprendizaje. Los resultados del estudio previo ponen de manifiesto que, para enseñar a visualizar, no basta con exponer a los estudiantes a imágenes visuales, llevándonos a la siguiente definición tentativa del objeto de estudio:

> *La "enseñanza de la visualización" son las acciones, más allá del mero uso de imágenes, que se deben realizar en clase para ayudar a los estudiantes a construir modelos de visualización (procesos y productos) y mecanismos de control sobre ellos (habilidad) de tal modo que éstos resulten de ayuda en su quehacer matemático y faciliten la comprensión de los conceptos matemáticos (al igual que para el matemático experto).*

"Cómo enseñar a visualizar" es un tema de investigación situado entre los campos de enseñanza a nivel universitario y de la visualización, poco tratado hasta el momento. A nivel universitario hay investigaciones que exploran su uso desde perspectivas epistemológicas o cognitivas aportando como corolario algunas recomendaciones didácticas (Bråting & Pejlare, 2008; Gueudet-Chartier, 2004; Zimmermann & Cunningham, 1991). Pero, salvo raras excepciones (González-Martín & Camacho, 2004; Wood et al., 2007), no hay evidencias sobre cómo se desarrolla actualmente su enseñanza y menos aún sobre cómo se debería desarrollar partiendo de experimentaciones en un contexto natural. Nuestra investigación hace una aportación en este sentido. En el campo de la visualización, las investigaciones se ocupan sobre todo de describir: tipos y formas de uso de la visualización; ventajas y desventajas de la visualización; aspectos cognitivos, afectivos y socioculturales (Presmeg, 2006a). Son menos frecuentes las investigaciones sobre qué tipo de enseñanza o qué prácticas de clase promueven (o inhiben) una visualización matemática efectiva y cuando las hay, éstas se desarrollan principalmente en niveles educativos inferiores al de esta investigación (Presmeg, 2006a; Rivera, 2011). Este es un tema pendiente en la agenda de futuras investigaciones al que también contribuye nuestro estudio:

> *An ongoing and important theme is the hitherto neglected area of how visualization interacts with the didactics of mathematics. Effective pedagogy that can enhance the use and power of visualization in mathematics education is perhaps the most pressing research concern at this period: very few studies have addressed this topic since Presmeg (1991) reported the results of her study of classroom aspects that facilitate visualization (Presmeg, 2006a, p. 227).*

1.1.4 Enfoque de la Investigación

A la falta de investigaciones empíricas previas se une la falta de un marco teórico sólido en el que situar el tema de estudio. Este hecho hace que nos ocupemos no sólo del desarrollo de la "enseñanza de la visualización" a nivel práctico sino también a nivel teórico. Escogemos la metodología Developmental Research (DR) (Gravemeijer, 1994) que, dentro del paradigma de Desarrollo Educacional (Van den Akker, 2000), da respuesta a una articulación teórico-práctica.

Además de la búsqueda de equilibrio entre el desarrollo teórico y el práctico, otro aspecto que ha influido fuertemente en el enfoque de la investigación es la distancia que existe actualmente entre las comunidades de matemáticos y de educadores matemáticos (Mamona-Downs & Downs, 2002). Ésta actúa en contra de la mejora de la enseñanza a nivel universitario, al no producirse una transferencia de experiencias y resultados de una a otra. A nivel teórico, estas consideraciones nos han llevado a incluir, entre otros, el marco del Conocimiento Matemático del Profesor (Ball, Thames, & Phelps, 2008) en el Marco Conceptual, decisión que creemos que puede favorecer un diálogo más integrador entre ambas comunidades. A nivel metodológico, esta preocupación nos ha llevado a escoger como método principal de investigación la Observación Participante, donde la figura de la investigadora y la profesora se integran en una sola (Greenwood, 2000).

Finalmente, explicamos las razones que motivan la elección de la disciplina de Álgebra Lineal (AL) como contexto para el estudio. Primero, el AL es importante a nivel curricular. Junto al Análisis es una de las asignaturas fundamentales en la mayoría de carreras científicas universitarias. En particular, en el Grado de Matemáticas juega un papel esencial para el posterior desarrollo de otras asignaturas, debido a su poder de unificación (Dorier, 2000). Segundo, a pesar de su importancia, parece que ni profesores ni investigadores terminan de dar con un modo eficaz de enseñanza:

> *The teaching of linear algebra at a university level is almost universally regarded as a frustrating experience for instructors and students alike. Many among those who teach such a course have resigned themselves to the fact that this is simply 'the nature of the beast' and that not much can be done to change things (Hillel, 2000, p. 191).*

Tercero, independientemente de cómo se enseñe, es una asignatura difícil para los estudiantes tanto cognitiva como conceptualmente (Dorier, y Sierpinska, 2001). Una de las razones que se apuntan es la dificultad para manejar flexiblemente la diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento que conviven en ella, haciéndola especialmente interesante desde el punto de vista de la visualización.

1.1.5 Pregunta y Objetivos de Investigación

Una vez expuestos tema, el tipo de estudio y el contexto en que se va llevar a cabo, se plantea como finalidad la caracterización y potenciación de la "enseñanza de la visualización" en un curso de AL para mejorar la comprensión de los estudiantes. Ésta conduce a la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Cómo "enseñar a visualizar" para potenciar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos del Álgebra Lineal?*

Señalamos que a través de esta pregunta se enfatiza la relación entre "enseñanza de la visualización" y comprensión de los conceptos matemáticos (ver sección 1.1.3). A lo largo del estudio profundizamos en los fundamentos de esta relación desde diversos puntos de vista. Otro elemento clave es el término "visualización", que se precisa en el progreso de la investigación. Esta es una pregunta muy amplia que resulta poco operativa para el trabajo empírico. Por ello, formulamos los objetivos específicos siguientes que ayudan a concretar la cuestión:

1. *Observar, caracterizar y explicar la enseñanza de la visualización en un ambiente natural (un curso de AL del primer año de Grado de Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de Universidad Complutense de Madrid).*

2. *Realizar una propuesta de mejora de la enseñanza de la visualización del curso observado a través de la formulación de principios de diseño para los materiales y las estrategias de enseñanza.*

El primer objetivo conduce a un tipo de estudio *descriptivo-explicativo*, mientras que el segundo es de naturaleza más *prescriptiva* (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006, p. 54). El primer objetivo se centra en las prácticas de enseñanza actuales como medio de acercamiento al objeto de estudio. A través de la observación de un curso concreto se detectan y explican fenómenos y acciones relacionadas con la enseñanza de la visualización, estableciendo un punto de partida para responder a la pregunta de investigación. Con el segundo objetivo se pretende ir más allá y explorar otras posibilidades de la enseñanza de la visualización que no aparecen de forma natural en el curso observado, pero que podrían ser más efectivas. Este objetivo se plantea a raíz del estudio previo, cuyos resultados evidenciaron deficiencias en el aprendizaje de la visualización de los estudiantes.

Con el avance de la investigación la pregunta y objetivos iniciales se fueron revisando y refinando (ver secciones 3.4 y 4.1.4). El resultado de esta revisión, a través de las iteraciones de estudios teóricos y empíricos, es un desglose de los objetivos específicos en sub-objetivos que nos ayuda a comprender el problema en los diferentes niveles que éste presenta y que anticipa las direcciones de trabajo para alcanzarlos:

1. *Observar, caracterizar y explicar la enseñanza de la visualización en un ambiente natural (un curso de AL del primer año de Grado de Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de Universidad Complutense de Madrid).*

    1.1. *Describir modelos de visualización y sus formas de uso (estilo de enseñanza, causa, comunicación, propósito, dificultades de los estudiantes).*

    1.2. *Identificar factores influyentes, posibilidades y limitaciones en el uso de visualización en clase y acciones relativas a ellos.*

2. *Realizar una propuesta de mejora de la enseñanza de la visualización del curso observado teniendo en cuenta los resultados del objetivo anterior.*

    2.1. *Comprender desde diversos puntos de vista (epistemológico, institucional, cognitivo y afectivo) el rol de la visualización en la comprensión (de la disciplina del AL, en general, y de un concepto, en particular) obteniendo ideas innovadoras de mejora.*

    2.2. *Realizar experimentaciones en torno a esas ideas innovadoras y constatar sus efectos mediante la formulación de principios de diseño de estrategias de enseñanza y materiales para la enseñanza de la visualización.*

El primer objetivo se divide en dos sub-objetivos. El *primero* se plantea atendiendo a la distinción de concepciones realizadas en el Marco Conceptual a partir de la revisión de literatura sobre visualización (primero a nivel global, sección 3.2.3, y después a nivel local, 3.3.2). Se tratará de identificar en los episodios de clase características de las diferentes perspectivas descritas para definir modelos de visualización y describir sus formas de uso, completando así la descripción teórica realizada. El *segundo* sub-objetivo se plantea por dos razones: (1) porque las investigaciones sobre visualización indican que hay factores como el status, las prácticas de clase o las diferencias individuales que inciden fuertemente en el uso que de ésta se hace en clase; (2) porque las investigaciones sobre enseñanza a nivel universitario muestran que, a pesar de existir cierto reconocimiento por lo visual, su uso es muy superficial en general. Por tanto, de cara a la comprensión y la mejora de la "enseñanza de la visualización" parece pertinente identificar dichos factores y determinar cómo posibilitan o limitan la aparición de esta herramienta en las aulas.

El segundo objetivo se ha dividido en dos sub-objetivos de diferente naturaleza. El *primero* hace referencia a la relación entre la enseñanza de la visualización y la comprensión: analizar qué conocimiento o acciones son necesarias para la comprensión (más allá del mero uso de la visualización) nos permite caracterizar mejor la enseñanza de la visualización, aportando ideas innovadoras y una justificación más profunda para su mejora. Atendiendo a la precisión de la noción de *comprensión* desarrollada en el Marco Conceptual, se prevé la necesidad de centrarse en un concepto específico. Sólo así es posible construir el esquema conceptual asociado, necesario para realizar este tipo de estudio. Los puntos de vista escogidos atienden a diversidad de razones, cuya importancia se pone de manifiesto a raíz de la elaboración del Marco Conceptual y del Estudio Inicial. Por ejemplo: el *análisis epistemológico* es importante porque se vio que la evolución histórica del pensamiento matemático condicionó el papel de la visualización; el *análisis institucional* es necesario para complementar la visión oficial actual con las posibilidades que la Matemática, como disciplina, ofrece para la visualización; en contraste, los *análisis cognitivos y afectivos* van más dirigidos a atender las características particulares y necesidades de los estudiantes de nuestro contexto.

Con el *segundo* sub-objetivo, las ideas innovadoras obtenidas mediante el sub-objetivo anterior se contrastan en un contexto natural, a través de experimentaciones, y se reformulan para que se adapten mejor a sus posibilidades y limitaciones. Para guiar y constatar los efectos de dichas experimentaciones se formularán principios de diseño. La reflexión en torno a su aplicación, desarrollo y revisión dará lugar a un nuevo conocimiento, teórico y práctico, sobre qué tipo de estrategias y materiales son aconsejables para enseñar a visualizar y cómo éstos se deben utilizar en el aula.

1.1.6 Estructura de la Tesis

Esta Memoria se estructura en varios capítulos cuyos contenidos se describen a continuación. Siguen una secuencia temporal coherente con la estrategia de investigación, consistente en la combinación de ciclos de investigación, desarrollo y análisis agrupados en tres fases: Estudio Inicial (previa a la experimentación); Observación Participante (profundización en un curso y experimentación como profesora de prácticas); y Estudio del caso de los Espacios Vectoriales Cociente (focalización en un concepto para estudiar la relación entre visualización y comprensión). Esta organización responde al requerimiento característico del enfoque DR de dar cuenta no sólo de los resultados sino también del proceso de investigación y las decisiones tomadas durante el mismo:

> *Developmental research means:" experiencing the cyclic process of development and research so consciously, and reporting on it so candidly that it justifies itself, and that this experience can be transmitted to others to become like their own experience"(Freudenthal, 1991, p. 161).*

Por tanto, una *lectura lineal* de esta Memoria facilita al lector la comprensión del conocimiento al que el proceso de investigación da lugar, favoreciendo su credibilidad y transferencia (Gravemeijer, 1994). Otro tipo de lectura, más adecuada para quienes estén interesados en resultados concretos y no tanto en el proceso global, es la lectura por objetivos. En ese caso se recomienda empezar por la Discusión de resultados (Capítulo 5.1) y desde ahí profundizar más en las partes de la Memoria que se considere oportuno. Ambos tipos de lectura puede realizarse a dos niveles: *exhaustivamente* o *visualmente*. Las figuras se incluyen en el texto no sólo para ilustrar los contenidos a los que acompañan, sino para sintetizarlos y para resaltar lo más importante. Esto se hace con ayuda de los pies correspondientes, donde en coherencia con nuestros resultados, se explica y aclara lo que cada imagen representa.

Respecto a los contenidos de cada capítulo, en esta Introducción (Parte 1) se presenta el estudio, explicando la problemática detectada y planteando la pregunta y los objetivos de investigación. Sigue la parte metodológica de la tesis (Parte 2) por considerarla fundamental en la comprensión de la investigación, detallando dónde y cómo se llevó a cabo: comenzamos describiendo el contexto de la investigación (Capítulo 2.1); discutimos la adecuación del paradigma de Desarrollo Educacional y la elección del Developmental Research dentro del mismo (Capítulo 2.2); exponemos la evolución de la estrategia de investigación (Capítulo 2.3); describimos los métodos e instrumentos empleados (Capítulo 2.4); finalizamos reflexionando sobre la calidad y la ética de la investigación (Capítulo 2.5).

El Marco Conceptual (Parte 3) constituye la sección teórica de la tesis, pero al redactarse en diálogo con los datos recogidos también refleja parte del conocimiento adquirido empíricamente. Se organiza según el Developmental Research en: *Base Filosófica* (Capítulo 3.1) donde se expone la visión global de la investigadora/profesora sobre qué son las Matemáticas, cómo se aprenden y cómo se deberían enseñar; *Teorías Globales* (Capítulo 3.2) donde se sienta el punto de partida para nuestro estudio al recorrer los principales temas que éste involucra (Enseñanza y Aprendizaje a Nivel Universitario, Representaciones y Comprensión, Visualización); *Teorías Locales* (Capítulo 3.3) donde se detallan, haciendo hincapié en aquellas investigaciones más relacionadas con la "flexibilidad cognitiva" y la visualización, los antecedentes en la didáctica del Álgebra Lineal que sirven para guiar la investigación pero también para situar y explicar nuestros resultados.

El análisis y los resultados (Parte 4) de las tres fases de investigación se corresponden con los tres siguientes capítulos e incluyen la parte empírica de la Memoria. La preparación a la experimentación realizada en la *Fase I* (Capítulo 4.1) se describe en relación a los tres tipos de estudios que constituyen el Estudio Inicial (el Epistemológico, el Institucional y el Exploratorio) y da lugar a la formulación de tres principios de diseño. Antes de explicar y reflexionar sobre la aplicación de dichos principios de diseño en las experimentaciones se narra y se analiza globalmente el desarrollo de la Observación Participante llevada a cabo durante la *Fase II* (Capítulo 4.2). Finalmente, para estudiar aspectos relativos a la relación entre comprensión y visualización se focaliza en la *Fase III* (Capítulo 4.3) en el concepto de

Espacios Vectoriales Cociente: primero lo analizamos desde un punto de vista eminentemente matemático y segundo exploramos la comprensión de los estudiantes mediante el diseño y la aplicación de una actividad específica de visualización.

Finalmente, hacemos un análisis crítico y reflexivo (Parte 5) que parte de la discusión de los principales resultados y aportaciones de la investigación en relación a los objetivos (Capítulo 5.1) y que nos lleva a concluir una respuesta a la pregunta de investigación y plantear prospectivas sobre las que seguir trabajando para mejorar la “enseñanza de la visualización” (Capítulo 5.2). Consideramos que esta Tesis hace una pequeña contribución al estudio de la “enseñanza de la visualización” a nivel universitario, con aportaciones teóricas, prácticas y metodológicas que pueden abrir camino para futuras investigaciones y discusiones sobre el tema.

In many of the Ph. D. theses that I have read, the chapter headed Methodology has dealt, in fact, with the methods used by the researcher to undertake their research. Likewise, in a majority of articles in journals and chapters in books, a description is provided of "how" the research was done but rarely is an analysis given of "why" and, more particularly, out of all the methods that could have been used, what influenced the researcher to choose to do the research in the manner described. It comes a refreshing change when one reads an author's reflections on what impact such choices might have had on the research outcomes (Burton, 2002, p. 1).

2 METODOLOGÍA

En este estudio el diseño de investigación es clave. Tras una descripción detallada de los principales elementos y características del contexto de estudio, se realiza una breve reflexión sobre las potencialidades y limitaciones del paradigma de Desarrollo Educacional y se explica por qué se elige el Developmental Research (DR) en este trabajo. Seguidamente se describe el diseño de investigación: fases de investigación y métodos de recogida y análisis de datos. Por último, se revisa criterios de calidad y consideraciones éticas tenidos en cuenta.

2.1 ÁMBITO DE ESTUDIO

Hacemos notar que la elección de un ámbito de estudio concreto puede afectar a los hallazgos de la investigación. Para facilitar su interpretación, a continuación se detallas sus características principales. Se considera que éstas son representativas del sistema de enseñanza universitario español: el programa de estudios del Grado de Matemáticas, los contenidos de la asignatura de AL, la organización en clases magistrales teóricas y clases prácticas de problemas, el estilo de enseñanza y métodos de evaluación. También, de forma consciente se ha cuidado la representatividad del profesorado en experiencia, motivación respecto a la EM y aportaciones respecto a la visualización. En relación a los estudiantes, su elección fue totalmente natural (los matriculados en el curso), idéntica a la que haría un profesor cualquiera. Por tanto, lejos de ser un caso aislado, los resultados de este trabajo pueden ser reflejo de algo que sucede a nivel más amplio.

2.1.1 Contexto

Esta investigación se sitúa en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), que tiene 150 años de experiencia y es una de las más grandes de España (“Oferta de Estudios. Facultad de Ciencias Matemáticas (UCM),” 2011). Se ofrecen estudios de Grado, de Máster y de Posgrado, dentro del Espacio Europeo de Educación Superior.

Curso	Materias	
1º	Matemáticas (Matemáticas Básicas) Matemáticas (Álgebra lineal, Análisis de variable real) Informática	
	Elementos de Matemáticas y aplicaciones	
2º	Estadística, Física	
	Análisis de funciones de varias variables reales Métodos numéricos e investigación operativa Probabilidad, Ecuaciones diferenciales ordinarias	
3º	Ecuaciones diferenciales y sus análisis numérico Geometría y Topología Ecuaciones algebraicas Análisis de funciones de variable compleja Optimización	
	Matemáticas generales	
4º	Itinerario Matemática pura y aplicada	Itinerario Ciencias de la Computación
	Prácticas, otras actividades	
	Trabajo de fin de grado	

Figura 2. 1: *Estructura de las materias del Grado de Matemáticas ofertado por la UCM* (“Oferta de Estudios. Facultad de Ciencias Matemáticas (UCM),” 2011). Se distribuyen en: materias de formación básica (en rojo), materias de formación obligatoria (en verde), materias optativas (en azul) y trabajo de fin de Grado (en amarillo).

Entre los estudios de Grado se incluyen el *Grado en Matemáticas*, el Grado en Ingeniería Matemática y el Grado en Matemáticas y Estadística (240 ECTS[2], 60 ECTS por curso). Este trabajo se desarrolla en el primer curso del Grado de Matemáticas (ver Figura 2. 1), momento en que los estudiantes están especialmente expuestos a dificultades derivadas del paso del Bachillerato a la Universidad (ver sección 3.2.1.2). El *primer curso del Grado de Matemáticas* se compone de cuatro asignaturas anuales: Álgebra Lineal (AL), Análisis de variable real (AR), Informática (INF) y Elementos de Matemáticas y Aplicaciones (EM). Esta investigación se centra en AL (ver sección 1.1.4). Durante el primer mes y medio de curso (de forma

[2] “El crédito ECTS o crédito europeo integra las enseñanzas teóricas y prácticas, así como otras actividades académicas dirigidas, con inclusión de las horas de trabajo del estudiante necesarias para que alcance los objetivos de dicha asignatura. En los títulos de Grado en “Matemáticas”, Grado en “Ingeniería Matemática” y Grado en “Matemáticas y Estadística” por la Universidad Complutense de Madrid se considera que 1 crédito ECTS equivale a 25 horas de trabajo del alumno(“Oferta de Estudios. Facultad de Ciencias Matemáticas (UCM),” 2011).”

intensiva), se imparte una quinta asignatura llamada Matemáticas Básicas (MB), pensada como puente entre el Instituto y la Universidad. En consecuencia, el resto de asignaturas no comienzan hasta mediados de Noviembre, quedando las asignaturas anuales divididas en *dos semestres* de distinta duración. Al final de cada semestre –en Febrero y Junio– hay un período de *exámenes parciales*. Los exámenes finales se realizan a finales de Junio o principios de Julio y en Septiembre.

En los cursos 2009/2010 y 2010/2011, en que se desarrolla la investigación, se ofertan cuatro grupos de primero, centrándonos en uno de ellos. En la Guía Docente, se describen características fundamentales de la asignatura como: los objetivos, las competencias, los contenidos, los materiales, la bibliografía de consulta, las técnicas docentes y los criterios de evaluación (ver sección 4.1.2.1). Las horas de docencia presenciales se organizan como sigue: 4 horas de *clases teóricas* donde un profesor, guiado por el Libro de Texto (Fernando, Gamboa, & Ruiz, 2010), explica a toda la clase los contenidos de la asignatura; 2 horas de *clases de prácticas o de problemas* donde otros profesores diferentes trabajan en torno a 14 Hojas de Problemas (una para cada tema), cada uno con un subgrupo. En los cursos 2009/2010 y 2010/2011 se crean tres grupos de prácticas diferentes. Esta investigación se centra en el *subgrupo al2* que, en ambos cursos, tuvo el mismo horario (mostrado en la Figura 2. 2)

	L	M	X	J	V
9:00	em2 in1/in3	ar1/al2/al3	al1/ar2/ar3	EM	EM
10:00	in2/em1/em3	al1/ar2/ar3	ar1/al2/al3	IN	in2
11:00	AR	AR	AR	INF	AR
12:00	AL	AL	AL	AL	in1/in3

Figura 2. 2: Horario del curso observado. Se han marcado con azul las clases teóricas de AL y en verde las de prácticas del subgrupo escogido.

2.1.2 Participantes

En la Figura 2. 3 se muestra un esquema del proceso seguido para situar el ámbito de estudio. En este proceso quedan delimitados los participantes de la investigación: profesores (incluyendo a la investigadora) y los estudiantes.

2.1.2.1 Los Profesores

El profesor de teoría, el profesor G., es también el coordinador de la asignatura de AL para el curso 2010/2011. Es un reconocido matemático con amplia experiencia en la docencia. En particular, lleva más de 8 años enseñando en cursos de AL. Su área de investigación es la Geometría Algebraica, de la que tiene prestigiosas publicaciones. También posee publicaciones en el ámbito de la EM. El profesor J. se encargó del subgrupo al2 de prácticas el curso 2009/10 y ocasionalmente sustituyó a G. en las clases de teoría durante el curso

2010/11. Tiene un perfil investigador similar al de G. y, aunque es algo más joven, también posee amplia experiencia docente.

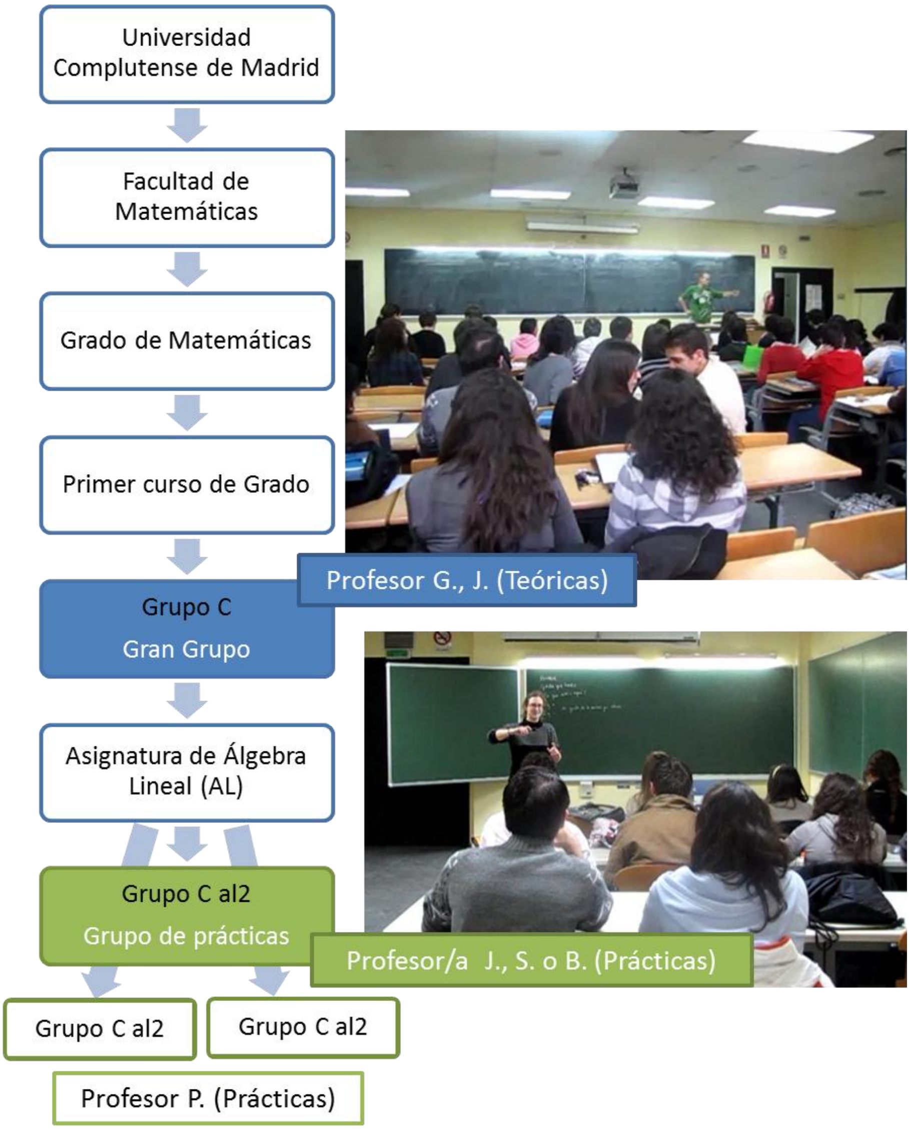


Figura 2. 3: *Resumen del proceso de situación del contexto de estudio y de los participantes*. La distinción de colores es igual que la anterior (azul para las teóricas y verde para las prácticas) y las fotos ofrecen una panorámica de los diferentes tipos de clases.

En contraste, los profesores de prácticas durante el curso 2010/2011 –S. (el Primer Cuatrimestre) y B. (el Segundo Cuatrimestre)– son estudiantes de Doctorado que están en sus primeros años de experiencia docente. S. investiga también en el ámbito de Geometría Algebraica y B. es la investigadora principal de este estudio[3], dedicada a la EM.

Finalmente, el profesor P. se encarga de los otros grupos de prácticas en ambos cursos. Ocasionalmente puede aparecer alguna referencia a él, aunque no serán frecuentes pues no participa en la investigación debido a su timidez.

[3] Como se explica más adelante (sección 2.5.2), he decidido utilizar el nombre B. y la tercera persona para distinguir mis acciones como profesora de las de investigadora, para las que empleo la primera persona.

2.1.2.2 Los Estudiantes

Los estudiantes participantes en esta investigación se distinguen en dos grupos: el *Gran Grupo*, que es el grupo que asiste de forma habitual a las clases teóricas; y el *Grupo de Prácticas,* que es el subgrupo del Gran Grupo que asiste de forma habitual a la clases prácticas. El *Gran Grupo* inicial en el curso 2009/2010 es de 83 estudiantes (44 mujeres y 39 hombres) y en el curso 2010/2011 de 94 (42 mujeres y 52 hombres). Estas cifras se han tomado de la lista empleada en las calificaciones de la primera evaluación. Hay una reducción importante del número de estudiantes del Gran Grupo a lo largo del año, especialmente en el comienzo del Segundo Cuatrimestre. Así al comienzo del curso el Gran Grupo está formado por unos 80 estudiantes de media mientras que al final no llega a 30. Esta reducción también se aplica al número de estudiantes de los grupos de prácticas. El Grupo de Prácticas del curso 2009/2010 sólo se observa durante 3 semanas, tiempo insuficiente para detectar esta variación, y está compuesto de media por unos 12 estudiantes. El *Grupo de Prácticas* del curso 2010/2011 se observa durante seis meses, al principio el grupo lo forman 18 estudiantes (10 mujeres y 8 hombres) pero el número se reduce a casi un tercio de la clase al final del periodo de observación.

Las trayectorias sociales y educativas de los estudiantes participantes en la investigación son diferentes aunque la mayoría tienen una edad de 18-19. La principal vía de acceso a estos estudios es el Bachillerato Científico-Técnico. También hay algunos casos de Bachillerato de Ciencias de la Salud. El Grado que tiene más estudiantes matriculados es el de Matemáticas, después del de Ingeniería Matemática y finalmente el de Estadística.

2.2 DESARROLLO EDUCACIONAL

El concepto de "*Desarrollo Educacional*" fue introducido en 1991 por el matemático holandés Freudenthal en respuesta a la búsqueda de un impacto mayor en la práctica educativa (Gravemeijer, 1994, p. 445). El concepto de Desarrollo Educacional abarca todas las actividades e intervenciones de desarrollo[4] que se producen entre una idea inicial y un *cambio en la práctica educativa*, siendo este cambio el principal objetivo de este tipo de investigación (Gravemeijer, 1994, p. 445). Este tipo de investigación trata de responder a la pregunta de cómo desarrollar (mejorar o potenciar) la instrucción. Bajo la definición de Desarrollo Educacional, tienen cabida diversos tipos de investigaciones presentes en la literatura(Van den Akker, 2000, p. 4):

- Estudios de diseño (*Design studies*), Experimentos de diseño (*Design experiments*), Investigación de diseño (*Design research*).
- Investigación de Desarrollo (*Development/Developmental research*).
- Investigación Formativa (*Formative research*), Indagación/ Inquisición Formativa (*Formative inquiry*), Experimentos Formativos (*Formative experiments*), Evaluación Formativa (*Formative evaluation*).
- Investigación Acción (*Action research*).
- Investigación de Ingeniería/ Ingeniería investigativa (*Engineering research*).

En el campo específico de la EM, dentro de este paradigma podemos englobar los siguientes tipos de investigaciones: *Ingeniería Didáctica* (Francia), *Design- Based- Research* (USA e Inglaterra), *Action Research* y *Developmental Research* (Holanda). En esta investigación hemos contemplado varios de estos modelos metodológicos, influyendo cada uno en el diseño de la estrategia de investigación. De la *Ingeniería Didáctica* (Artigue, 1994, 2008) extraemos la importancia de realizar un buen análisis previo al diseño y a la experimentación en el campo, que tenga lugar a diversos niveles: epistemológico (al que se le presta especial atención), cognitivo y didáctico. En el *Design Based Research* (DBR) (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Pratt & Jones, 2010; The Design-Based Research Collective, 2003) encontramos una formulación metodológica más adecuada a nuestros intereses, que da respuesta a nuestra urgencia por diseñar nuevos materiales entrando en el campo desde el principio. En la *Investigación Acción* aparece resaltada la figura del profesor-investigador, pero hay muy poco protagonismo del desarrollo teórico[5]. Finalmente nos decantamos por el *Developmental Resesarch*.

2.2.1 Developmental Research (DR). El Papel de la Teoría

El enfoque del *Developmental Research* (DR) se desarrolla inicialmente en Holanda, a finales de los 80, estrechamente ligado al trabajo de Freudenthal y al desarrollo de la Matemática Realista. En esta investigación lo elegimos por tres razones:

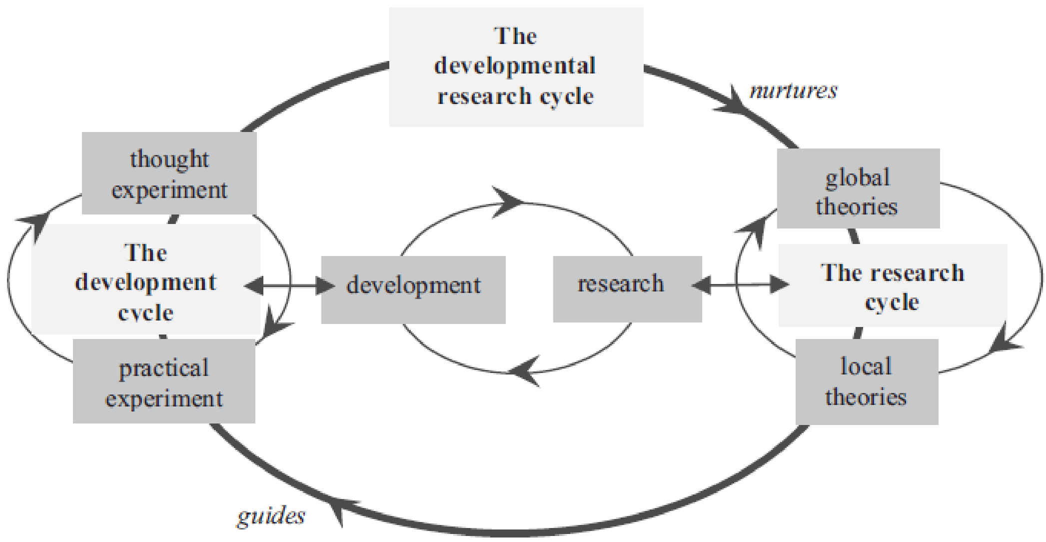
---

[4] Aquí "desarrollo" proviene de la traducción literal de "development", palabra que en inglés tiene connotaciones positivas de mejora, de crecimiento hacia algo más avanzado o más fuerte ("*Development: the gradual growth of something so that it becomes more advanced, stronger, etc*" Oxford Advanced Learnner's Dictionary: http://oald8.oxfordlearnersdictionaries.com/dictionary/development)

[5] De hecho, Van den Akker (2000) excluye la Investigación Acción del paradigma de Desarrollo Educacional por su falta de interés en el desarrollo teórico.

1. *Busca el equilibrio entre el desarrollo teórico y práctico, ofreciendo una metodología específica para ello:* el peso que el DR da al desarrollo teórico (poniendo más énfasis en el proceso de aprendizaje del desarrollador que en el producto desarrollado) admite la alternativa, frente al diseño de materiales focalizados en un concepto concreto, de observar la enseñanza de la visualización de forma transversal a lo largo del curso. Este enfoque permite una mayor profundización en el objeto de estudio y se adapta mejor al contexto.
2. *Reconoce la no linealidad del proceso de investigación*: frente a otros modelos metodológicos más lineales o secuenciados en fases poco comunicadas, el DR establece ciclos de investigación conectados entre sí y que permiten revisar las hipótesis y las preguntas de investigación iniciales estableciendo un diálogo entre teoría y práctica.
3. *No impone la colaboración como condición necesaria para la investigación:* el DR no insiste tanto en la necesidad de tener un equipo de investigadores. Gravemeijer (1994) suele referirse al "investigador/desarrollador" de forma individual (*the researcher/ developer*). Richey y Klein (2005) incluso mencionan el problema señalando que, "*aunque no es deseable, es bastante común*" que el investigador sea a la vez el diseñador o desarrollador (p.33).

A continuación detallamos la metodología específica que el DR ofrece para el desarrollo teórico en una investigación (ver Figura 2. 5), aspecto clave en este estudio. Goodchild (2008) interpreta la estrategia de investigación propuesta por el DR como se muestra la Figura 2. 4.



Gravemeijer's explanation of developmental research rests on a number of closely connected cyclical processes, or feedback loops. Fundamentally there is a cyclical process between development and research. Theory and evidence from prior research leads to an envisaging of development, this leads to actions which are evaluated and fed back into a new cycle of envisaging and action. I will refer to this as the 'developmental research cycle.' The developmental process is presented as a cycle between thought experiment and practical experiment; that is thinking through the consequences of some action, guided by theory, then implementing the action which leads to the adjustment of the theory that led the action, and so on. I will refer to this as the 'development cycle.' The research process, too, is presented as a cycle between global theories that are 'concretized in local theories,' which are tried out in practice, analyzed and lead to reconstruction of the global theory. This I will refer to as the 'research cycle'. The research cycle guides the development cycle, which in turn nurtures the research cycle (Goodchild, 2008, p. 208).

Figura 2. 4: Estrategia de investigación del DR según la interpretación de Goodchild (2008).

Este proceso de investigación cíclico, que combina "*ciclos de investigación*" y "de *desarrollo*" en "*ciclos de investigación de desarrollo*" (ver Figura 2. 7), genera tanto actividades (con sentido para el desarrollador) como conocimiento teórico. Gravemeijer (1994) compara el desarrollo teórico producido de este modo con una especie de "*bricolaje guiado por la teoría*" (*theory-guided bricolage*) distinguiendo tres tipos de teorías: (1) la *Base Filosófica*, que es el conjunto de creencias que conforma la visión del investigador (sobre qué son las Matemáticas, cómo se aprenden y cómo se deberían enseñar) y que actúa como una teoría de fondo sobre la cual todas las actividades de instrucción se evalúan; (2) las *Teorías Globales*, que enmarcan el núcleo teórico de la Base Filosófica (sobre aprendizaje, enseñanza y diseño de enseñanza) y son las que realmente guían el proceso de desarrollo y participan en el diseño del experimento pensado; (3) las *Teorías Locales*, que encapsulan el aprendizaje del desarrollador (sobre la instrucción) derivado de las iteraciones entre el experimento pensado y el práctico, y que concretan y reconstruyen las Teorías Globales (por ejemplo al contexto de la enseñanza del AL) a través de "*aproximaciones sucesivas*" o "*evolución de prototipos*" hacia la "intervención ideal". Este proceso, sintetizado en la Figura 2. 5, Gravemeijer (1994) lo resume como "*la reconstrucción de la teoría en acción*" (p.452).

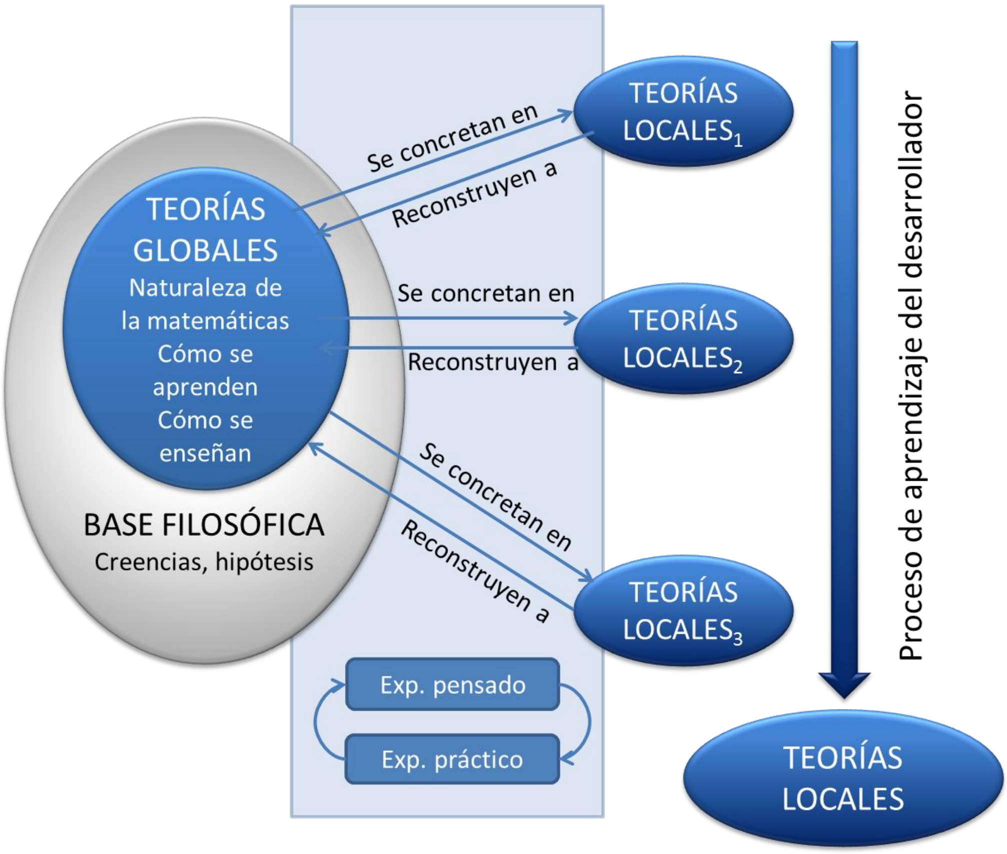


Figura 2. 5: Esquema de los tres tipos de teorías (Base Filosófica, Teorías Globales y Locales) y de cómo interactúan según el DR en "*la reconstrucción de la teoría en la acción*" (Gravemeijer, 1994, p. 451).

2.3 ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN

La estrategia de investigación es coherente con el modelo descrito, aunque está influenciada por sucesivas adaptaciones al medio producidas a lo largo de las iteraciones. Es un diseño emergente (McMillan & Schumacher, 2005, p. 403). En este capítulo se explica la evolución de este diseño, justificando los cambios producidos y las decisiones tomadas, y posteriormente se describe la estrategia final.

2.3.1 Evolución de la Estrategia de Investigación

Desde el comienzo del planteamiento de la estrategia de investigación, y se ve clara la necesidad de un Estudio Inicial, estructurado en tres partes por la influencia de la Ingeniería Didáctica (ver 2.2): Estudio Epistemológico, Estudio Institucional y Estudio Exploratorio. Al inicio se concibe como algo previo, pero poco conectado con la siguiente fase (ver Figura 2. 6). Posteriormente se integra como un "ciclo de investigación" dentro de un "ciclo de investigación y desarrollo" más amplio (ver Figura 2. 7). Y finalmente, debido a la interacción con el contexto de investigación derivada de los Estudios Institucional y Exploratorio, pasamos a concebir este Estudio Inicial como un "ciclo de investigación y desarrollo" completo (ver Figura 2. 9).

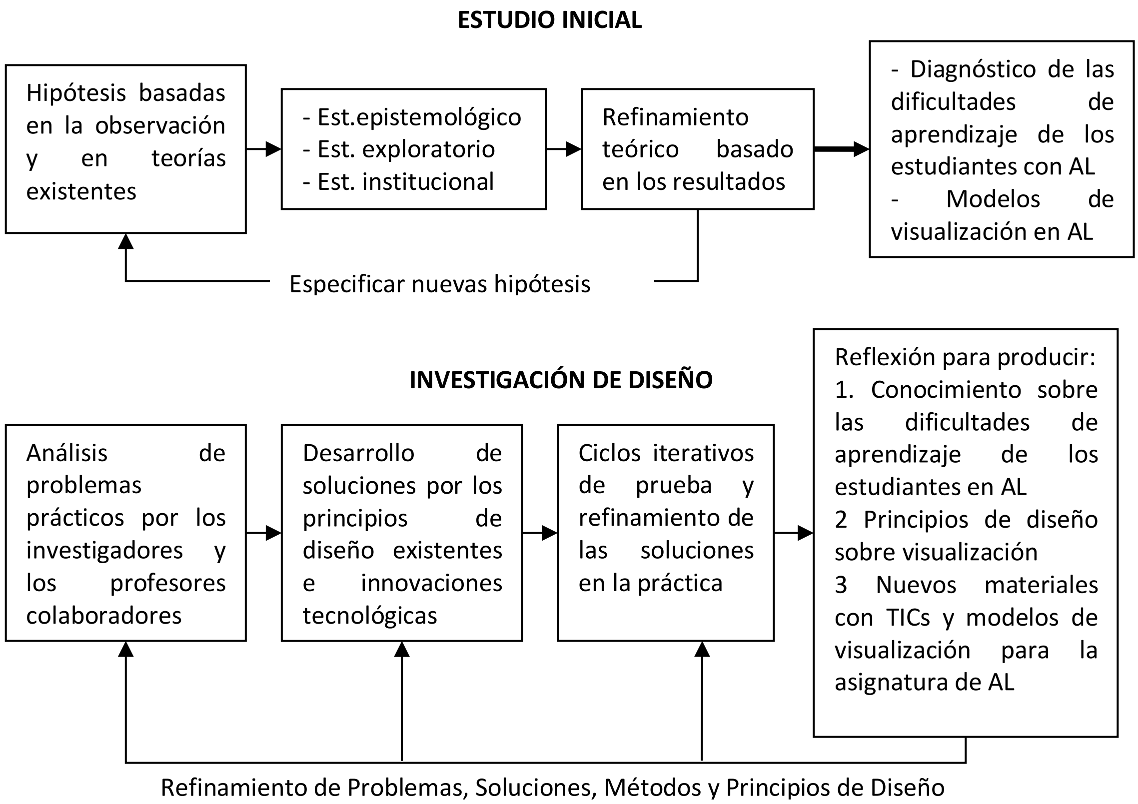


Figura 2. 6: *Esquema de la estrategia inicial de investigación con DBR* (inspirado en una imagen extraída de EduTech Wiki[6]). La estrategia de investigación inicial se dividía en dos fases: un Estudio Inicial, previo a la experimentación; y una Investigación de Diseño, que contempla la elaboración, la aplicación y la validación de una propuesta didáctica para las clases prácticas de la asignatura de AL.

[6] http://edutechwiki.unige.ch/en/Design-based_research

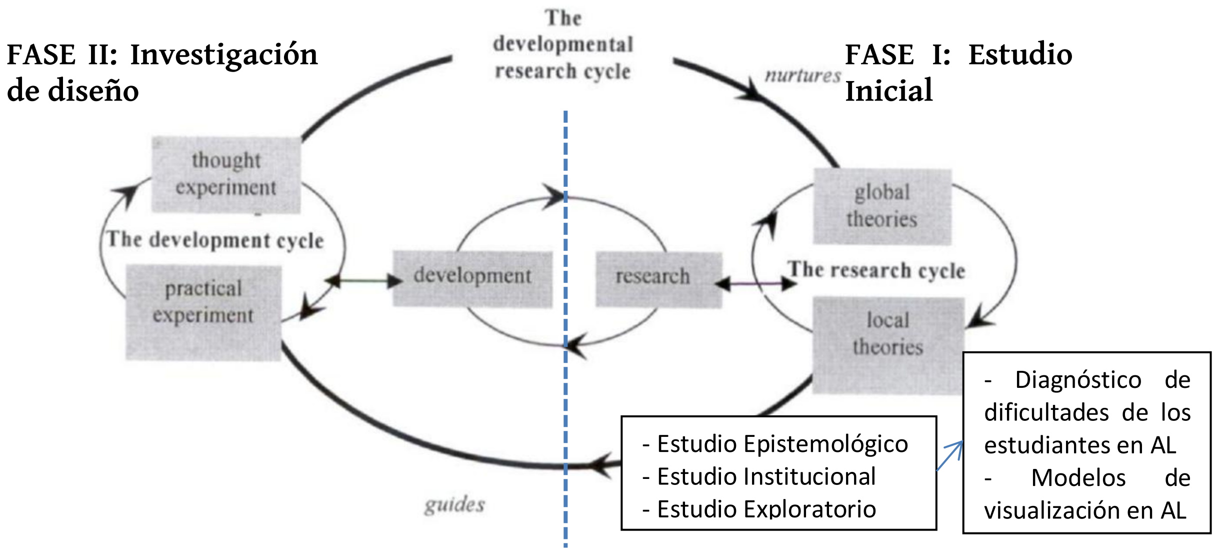


Figura 2. 7: *Influencia del DR sobre la estrategia de investigación* (basada en el esquema de Goodchild (2008) que aparece como fondo de imagen). En esta concepción intermedia el proceso de investigación se concibe como un ciclo completo de" investigación y desarrollo": la Fase 1 se identifica con el "ciclo de investigación"; y la Fase 2, que involucra experimentación, con el de "desarrollo".

En contraste, la estructura y el enfoque de la Fase II de investigación, relativa a la experimentación, no estuvo tan clara desde el principio. Esta incertidumbre, característica de los estudios con un enfoque de Desarrollo Educacional, se reduce con el avance de las iteraciones (Van den Akker, 2000). La Figura 2. 8 recoge algunas de las posibilidades y limitaciones observadas tras el Estudio Inicial que se tienen en cuenta en el diseño metodológico. Los resultados de este estudio previo ponen de manifiesto la necesidad de continuar con la observación de las clases así como de participar activamente como profesora en las clases de prácticas (ver sección 4.1.4). Esto modificaba el planteamiento inicial de experimentación, más inclinado por el desarrollo de nuevos materiales (cuatro unidades completas de actividades para las clases prácticas). En cualquier caso, la inmersión en el contexto evidencia que la integración de dichas unidades en el curso no estaba exenta de dificultades (en particular, suponían obstáculos importantes el salto con la visión de la visualización del curso y las dificultades observadas en los estudiantes).

POSIBILIDADES	**LIMITACIONES**
Buena relación con el profesor responsable: posibilidad de cooperación con él. Permiso para introducir nuevas tareas y métodos de enseñanza (incluyendo el uso de ordenadores). Posibilidad de grabar con cámara de vídeo tanto las clases teóricas como las prácticas. Acceso a documentos escritos: exámenes, problemas entregados, apuntes de clase, etc. Acceso a los estudiantes de mi grupo durante dos horas a la semana y las tutorías. Posibilidad de hacer también entrevistas. Posibilidad de comparar con otros grupos de prácticas.	Al poder observar una situación real y tomar tantos datos de ella, peligro de perder el centro de atención. ¿Basta con observar el Segundo Cuatrimestre de una asignatura anual? Si recojo datos yo sola, ¿cómo grabar en vídeo y enseñar al mismo tiempo? Investigadora- profesora: ¿tiene sentido hacer entrevistas fuera de la clase (pueden sentirse cohibidos por ser mis alumnos)? Los estudiantes pueden elegir libremente el grupo de prácticas, ¿y si no quieren ser observados o no les gusta el método de enseñanza y se van todos a otro grupo?

Figura 2. 8: Limitaciones y posibilidades del contexto detectadas a través del Estudio Inicial

Un modo de experimentación mejor adaptado al contexto consiste en desarrollar una enseñanza transversal de la visualización: guiada por unos principios de diseño y basada en las Hojas de Problemas. Esto no excluye el diseño de nuevos materiales o problemas, pero cambia radicalmente su papel en la investigación. Los materiales, que comenzaron siendo el objeto principal de desarrollo, pasan a ser una consecuencia de una experimentación más naturalista, además de un medio para recoger datos con los que observar y reflexionar sobre de nuestro objeto de estudio ("la enseñanza de la visualización"). Así, este nuevo enfoque se adecua mejor no sólo al contexto sino también al objetivo de la investigación, facilitando la obtención de un conocimiento teórico más profundo. Un énfasis en la elaboración de un material obliga a ceñirse a conceptos particulares, enseñados unidades concretas (que no dura más de una o dos semanas), impidiendo una experimentación prolongada[7]. Por el contrario, una experimentación centrada en principios de diseño permite aplicar, desarrollar y contrastar sus efectos en numerosas ocasiones y en multitud de contextos diferentes, aportando una visión más completa y profunda del tema de investigación.

El cambio de enfoque de la experimentación hace necesaria una reflexión aún más fuerte al final del Estudio Inicial (que concluyese en la formulación de los principios de diseño) y una revisión de literatura y de otros textos de AL al inicio de la Fase II (que proporcionara ideas sobre cómo llevar a la práctica los principios de diseño), reforzando aún más la idea de convertirlo en un ciclo completo "de desarrollo e investigación" (ver Figura 2. 9).

Finalmente, durante el proceso de análisis de los datos recogidos en la Fase II se considera pertinente añadir una tercera fase de investigación. La perspectiva global para el estudio de la visualización aporta resultados muy interesantes en torno a modelos y formas de uso de la misma en clase, pero oculta la relación entre su enseñanza y la comprensión. El concepto de los EVC reúne datos muy ricos desde este punto de vista, por lo que decidimos analizarlos en profundidad dando lugar a esa tercera fase de investigación. Como sólo es una fase de análisis, que no involucra recogida de datos (aunque sí una profundización teórica del concepto matemático), no se la considera como un nuevo "ciclo de investigación desarrollo", sino más bien como un modo alternativo de análisis (ver Figura 2. 9).

[7] Para poder realizar varias iteraciones sería necesario disponer de varios cursos donde realizar la misma experimentación, pero eso no era viable.

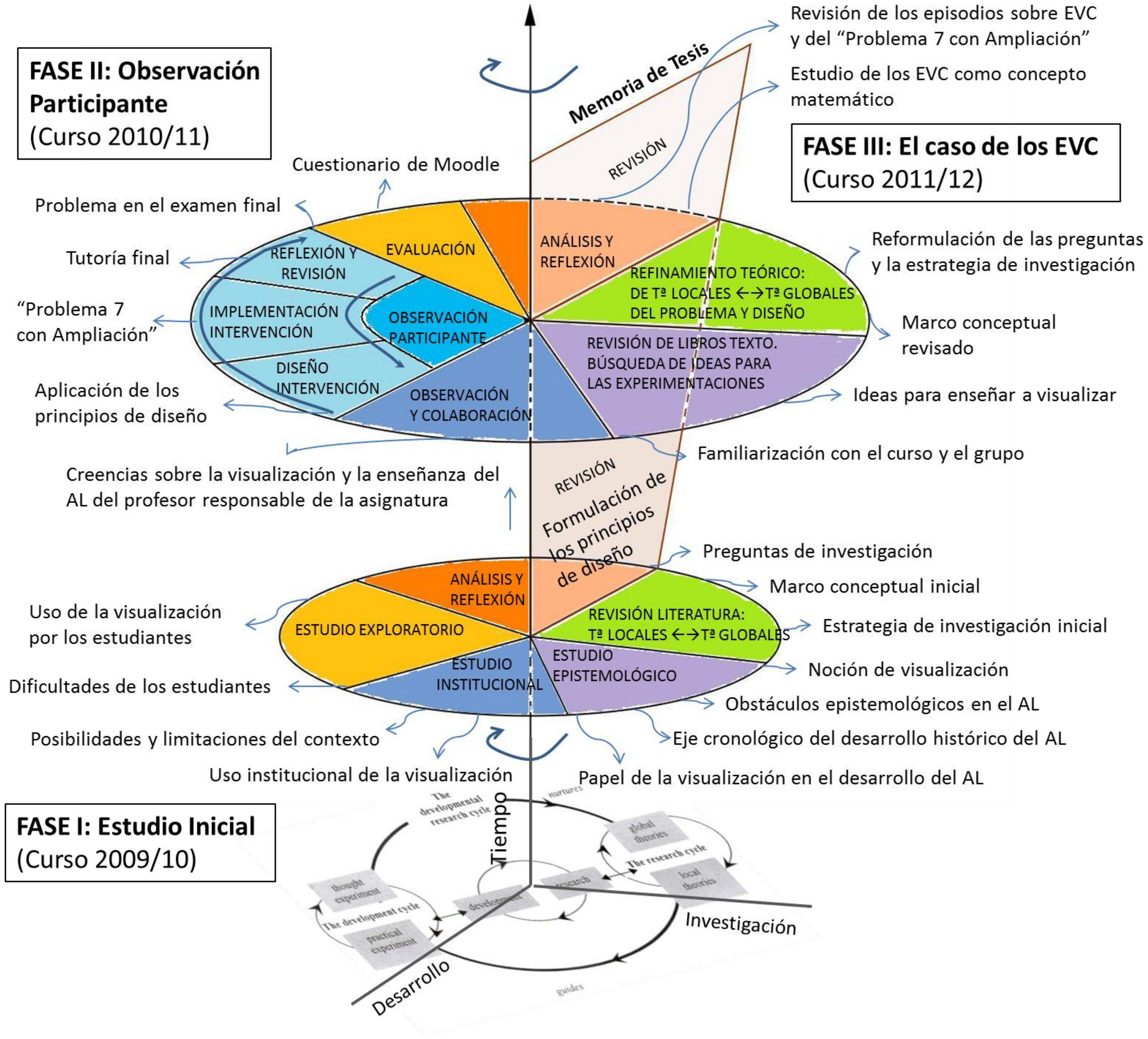


Figura 2. 9: *Esquema del desarrollo real de la estrategia de investigación, inspirada en el DR*. La representación en espiral refleja el carácter cíclico del proceso y el avance hacia el conocimiento al que da lugar, situado hipotéticamente en la parte superior final de la espiral. En esta figura se opta por una visualización no isomórfica (Guzmán, 1996)para evitar autointersecciones y facilitar así la lectura. Para su correcta interpretación se deben tener en cuenta las siguientes observaciones: (1) cada uno de los ciclos se proyecta sobre un plano horizontal; (2) la conexión entre un ciclo y el siguiente se ha representado con un plano vertical; (3) el esquema de Goodchild (2008), situado en la parte inferior de la imagen, sirve de sistema de referencia. Éste está compuesto por tres: (1) eje de investigación (las fases situadas sobre este eje, alejadas del contexto real, tienen una componente teórica mayor); (2) eje de desarrollo (las fases situadas sobre este eje, cercanas al contexto real, tienen una componente práctica mayor); (3) eje del tiempo (avanza hacia arriba en vertical, pero al proyectar sobre un plano cada ciclo, también se tendría que el tiempo avanzaría al girar en sentido horario). A los lados, señalados con una flecha, se han indicado los resultados o productos a que han dado lugar las diferentes etapas del proceso de investigación. Por último, como la Fase II es más larga en duración y profunda en análisis, la representamos de mayor tamaño que la Fase I; y la Fase III, sólo de análisis, se incluye al final de su "ciclo de investigación y desarrollo".

2.3.2 Desarrollo de la Estrategia Real de Investigación.

A continuación se describe el propósito y el desarrollo de las tres fases de la estrategia real de investigación (Figura 2. 9).

2.3.2.1 Fase I: Estudio Inicial

La finalidad del Estudio Inicial es adquirir un conocimiento mayor sobre el contexto de investigación, contribuyendo a ambos objetivos de investigación (ver sección 1.1.5) con información que ayuda a empezar a "*observar, caracterizar y explicar la enseñanza actual de la visualización en el curso de AL*" y con ideas para mejorar dicha enseñanza derivadas del estudio del "*rol de la visualización en la comprensión desde diversos puntos de vista*" (esto es, el objetivo 2.1). Se ha dividido en tres partes según el enfoque escogido: el Estudio Epistemológico, el Estudio Institucional y el Estudio Exploratorio. Tiene lugar principalmente durante el curso 2009/2010, complementándose después con resultados de las otras fases (en particular, con la revisión de los 20 libros de texto en la primera etapa de la Fase II y con el estudio de los EVC como concepto matemático de la Fase III).

Tras una primera revisión crítica de la literatura, que establece las bases para el desarrollo del Marco Conceptual (Parte 3), se realiza el *Estudio Epistemológico*. Este estudio se plantea para profundizar y comprender mejor el papel de la visualización en el desarrollo del AL como disciplina matemática. La perspectiva elegida para ello es eminentemente histórica marcada por un eje cronológico. Este estudio aporta información sobre: los modelos de visualización presentes en el desarrollo histórico; algunos obstáculos epistemológicos con conceptos concretos como el de Espacio Vectorial; y el papel de la visualización en el desarrollo del AL (ver los resultados en la sección 4.1.1).

El propósito del *Estudio Institucional* es conocer mejor el contexto y la visión oficial del AL en la institución en la que se desarrolla la investigación. Para ello se estudian documentos oficiales y materiales del curso, que se cotejan con la revisión de 20 de libros de texto de AL y finalmente se contrastan los resultados anteriores con las prácticas reales de enseñanza a través de observaciones de clase. Este estudio informa sobre el grado de sensibilidad existente en estos elementos institucionales con la diversidad de visualizaciones características del AL a través del análisis de: la postura inicial del curso; el manejo en la asignatura de los diversos tipos de representaciones, lenguajes, modos de pensamiento y puntos de vista característicos del AL; y el grado de explicitación ofrecido en ese manejo (ver los resultados en la sección 4.1.2).

El *Estudio Exploratorio* se plantea para explorar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del AL, específicamente aquellas referidas a la visualización que tengan relación con la comprensión en esta disciplina. Para ello se analiza el manejo de los diferentes registros y modelos intuitivos presentes en las respuestas a un cuestionario diseñado con tal fin. Los resultados se comparan con investigaciones previas en las que se basa el cuestionario (ver sección 4.1.3).

Al final del Estudio Inicial, los resultados obtenidos en los tres estudios se ponen en diálogo en una etapa de *revisión* que nos permite identificar aspectos de mejora en el curso observado AL y que conduce a la formulación de los principios de diseño que guiarán la experimentación de la siguiente fase (ver sección 4.1.4). En este momento también tiene lugar la revisión de los objetivos y de la estrategia de investigación así como una vuelta a la teoría que es el primer estadio de la segunda fase.

2.3.2.2 Fase II: Observación Participante

El propósito principal de la Fase II es aplicar y desarrollar los principios de diseño a través de "*experimentaciones sobre la enseñanza de la visualización y de constatar sus efectos*". Por tanto, está muy vinculada al segundo objetivo de investigación (objetivo 2.2). La observación también permite profundizar en la caracterización de la enseñanza de la visualización desde una perspectiva global (objetivos 1.1 y 1.3). La Fase II se desarrolla durante el curso 2010/2011 y la Observación Participante tiene una duración total de 19 semanas (más el período de exámenes). Se distinguen varias etapas, cuyos límites no se definen con claridad hasta que finaliza el proceso. Esta característica es habitual en las investigaciones de Desarrollo Educacional (Pratt & Jones, 2010). Cada una constituye un ciclo (el primero de "investigación" y el resto de "desarrollo") que termina en una fase de reflexión y revisión que da lugar al siguiente.

Etapa 0. Refinamiento teórico y revisión de libros de texto para buscar ideas para la experimentación

El inicio de la Fase II está marcado por una vuelta a la teoría que cumple una doble función. Por un lado, la de revisar el Marco Conceptual inicial, contrastándolo con la práctica. Este Marco Conceptual revisado proporciona un nuevo lenguaje, mejor adaptado a la situación de la investigación. Por otro lado, la revisión de literatura más relacionada con la innovación (a nivel universitario y en AL, secciones 3.2.1.3 y 3.3.1.2 respectivamente) cumple la función de aportar ideas sobre cómo aplicar los principios de diseño. Estas ideas se complementan con la revisión de diversos libros de texto de AL (aunque por coherencia los resultados se incluyen en la sección 4.1.2.3).

Etapa 1. Inicio del trabajo de campo. Observación y colaboración (Semanas 1 a 3)

La entrada al campo se produce como observadora únicamente, facilitando que los participantes de la investigación se acostumbren a la presencia de las cámaras en clase antes de comenzar la experimentación. Durante este período se toman notas de campo muy completas y las anotaciones en el Diario de Observación son extensas. Se recoge información que permite adaptar los resultados del Estudio Inicial al nuevo curso (la Guía Docente se actualizó, el Libro de Texto cambió de edición) y se establecen reuniones semanales con el profesor de la asignatura (ver sección 4.2.1.1).

Etapa 2. Entrada en el campo como profesora de prácticas (Semanas 4 a 8)

La entrada al curso como participante se produce al comienzo del Segundo Cuatrimestre. En esta etapa los principios de diseño se aplican en la enseñanza de las clases prácticas, dando lugar a diversidad de metodologías y acciones relativas a la enseñanza de la visualización. Este período rico en episodios experimentales culmina con el diseño y la implementación de la actividad "Problema 7 con Ampliación". Al mismo tiempo se continúa con la observación de clases comenzada en la etapa anterior. Se empiezan a observar elementos de convergencia provocando una reducción de las anotaciones en el Diario de Observación.

Etapa 3. Tutorías y paréntesis como profesora de prácticas (Semanas 9 a 11)

Durante tres semanas, el profesor S. vuelve a enseñar en las clases de prácticas. La participación en el curso continúa a través de las tutorías grupales en torno al "Problema 7 con Ampliación" y de alguna tutoría individual. En este período se observa una reducción en el número de estudiantes del Grupo de Prácticas debida al abandono habitual en el Grado tras los resultados del Primer Cuatrimestre y como consecuencia de la apertura de otro grupo de prácticas a cargo del profesor responsable de la asignatura. Tras dos meses de observación intensiva de las clases, los datos recogidos alcanzan un grado de saturación y convergencia (Schoenfeld, 2000) que conducen a reducir el número de horas observadas por semana a la mitad, dando más relevancia a las sesiones prácticas y las tutorías donde es posible la experimentación: una hora de clases teóricas (como sesión de control) y las dos de clases prácticas. Con ello se gana más tiempo de reflexión sobre la acción (ver sección 4.2.1.2).

Etapa 4. Continuación con las clases de prácticas (Semanas 12 a 17)

Se retorna a la enseñanza de las clases prácticas. El Grupo de Prácticas se mantiene con un número reducido de alumnos. En las clases teóricas de este período predomina el registro simbólico y en las clases prácticas, aunque hay algún episodio más experimental, en general, se vuelven más tradicionales (ver sección 4.2.1.3).

Etapa 5. Final de curso (Semanas 17 a 19 y período de exámenes)

Hacia el final de curso, las observaciones de las clases teóricas vuelven a proporcionar datos más ricos en visualización y la última semana de clase se dedica a resolver problemas y a dudas de los estudiantes, escenario diferente al habitual. Por tanto, se decide retomar la observación intensiva de clases (ver sección 4.2.1.5). En cuanto a la participación, se reacciona a la reflexión de la etapa anterior sobre el carácter más tradicional de las clases prácticas organizando una Tutoría Final, abierta al Gran Grupo, y diseñando una actividad específica de visualización llamada "*Actividades de reflexión y autoevaluación*". Seguidamente llega el período de exámenes, donde se retoma la colaboración con el profesor responsable que deriva en la inclusión de una cuestión sobre visualización en el Examen Final, la "Cuestión 6". Para obtener más datos que involucrasen directamente a los estudiantes se diseña un cuestionario que se implementa en el Curso Virtual, el "Cuestionario de Moodle" (ver sección 2.4.3.2).

Análisis, reflexión y revisión

Tras estas etapas, marcadas por su fuerte conexión al contexto, vuelve un período de análisis, reflexión y revisión de los datos recogidos y las experiencias. Este proceso permite determinar factores influyentes en la enseñanza de la visualización del curso (ver sección 4.2.2), establecer temas y modelos recurrentes (ver sección 4.2.3) y reformular los principios de diseño adaptándolos mejor al contexto y proporcionando una propuesta de mejora más consistente que la inicial (ver sección 4.2.4.1). En esta etapa los EVC emergen como un concepto relevante para nuestro estudio y es entonces cuando surge la necesidad de estudiarlos más en profundidad, conduciendo a la siguiente fase de investigación que cierra el "ciclo de investigación desarrollo".

2.3.2.3 Fase III: El Caso de los EVC

El análisis de los EVC da respuesta a los objetivos de investigación relativos a la relación entre visualización y comprensión (el 1.2 y el 2.1). Fijar un concepto concreto permite construir el esquema conceptual asociado, estudiar las partes de éste que se enseñan, analizar cómo se enseñan y por último explicar los efectos de dicha enseñanza en el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Para ello se estudia los EVC como concepto matemático (ampliando los Estudios Epistemológico e Institucional) y se hace una relectura focalizada de todos los episodios relativos a su enseñanza (ver sección 4.3.1). En particular, esta fase aporta: el Conocimiento Matemático del Profesor necesario para enseñar a visualizar los EVC (ver sección 4.3.2) y conocimiento sobre las características que debe presentar una actividad específica de visualización (en particular, se presenta como ejemplo el "Problema 7 con Ampliación").

2.4 MÉTODOS Y ASPECTOS PRÁCTICOS DE LA INVESTIGACIÓN

En la descripción de la estrategia de investigación se han nombrado algunos de los métodos e instrumentos empleados. En este capítulo se justifica la elección de dichos métodos e instrumentos y se explican detalladamente.

2.4.1 Principios Generales de Recogida y Análisis de Datos

La recogida y el análisis de datos en la Investigación de Desarrollo son muy similares a los de la Investigación Cualitativa y, por tanto se aplican sus normas y principios (Gravemeijer, 1994, p. 454). En la elaboración de los instrumentos de investigación seguimos tres niveles:

- los llamados de primer orden, o *instrumentos de recogida de datos*;
- los de segundo orden, o *instrumentos de análisis*;
- los de tercer orden, o *instrumentos de presentación de la información.*

La recogida de datos la guía la pregunta de investigación, que hace referencia a un proceso de enseñanza –de la visualización– inseparable de los procesos de aprendizaje y de la comprensión de los estudiantes (ver secciones 1.1.5 y 3.1.2). Los datos recogidos deben reflejar esos procesos y aportar información sobre la relación entre ambos. La principal fuente de datos es la *Observación Participante*, aunque también hay: *análisis documental* (textos históricos, libros de texto de AL, documentos oficiales del Grado de Matemáticas y materiales del curso como el Libro de Texto y las Hojas de Problemas); *cuestionarios* y *encuestas* para los estudiantes; *actividades experimentales*; y *entrevistas* tanto con los profesores como con los estudiantes (ver Figura 2. 10). Para enfrentar los retos que presenta la recogida de datos en un entorno real de clase, donde se enseña y experimenta al mismo tiempo, seguimos los siguientes principios (Pratt & Jones, 2010):

- <u>Redundancia</u>: se recolecta el máximo posible de datos de la escena de clase. Aunque inicialmente algunos datos se piensen inútiles, pueden resultar de valor cuando se reconstruye lo ocurrido a posteriori, como sucedió con los apuntes escritos de los estudiantes.
- <u>Triangulación</u>: se cruzan evidencias obtenidas por diferentes métodos. Con ello se confronta la eventual escasez o discontinuidad de datos, que podría afectar a la validez. Por ejemplo, notas de campo con vídeos de las clases, o análisis a priori de las repuestas de los estudiantes antes de entrevistarlos.
- <u>Sustituto más próximo</u>: se admite el uso de instrumentos que, aunque no sean los ideales, son cercanos a ellos. Por ejemplo, ante la imposibilidad de una grabación de vídeo se admite una de audio o incluso unas notas literales de las expresiones orales principales.

El análisis se ha realizado desde una doble perspectiva: *holística* en la Fase II, mirando a los datos como a un todo; y *específica* en la Fase III, eligiendo episodios relativos a un solo concepto. De este modo se obtiene un conocimiento más profundo del objeto de investigación. Las técnicas dominantes en el análisis son la *interpretación*, la *codificación*, la *narración* y la *síntesis*. Se han seguido los tres niveles típicos del paradigma del Desarrollo Educacional, donde los datos se analizan de forma granulada (Pratt & Jones, 2010):

- Análisis Microgenético: ofrece indicaciones inmediatas que sirven para ajustes dinámicos del diseño y, al mismo tiempo, para desarrollar afirmaciones teóricas más abstractas. Durante la Observación Participante se realiza en el momento de tomar notas de campo y después en la redacción del Diario de Observación.
- Análisis Intermedio: ocurre al final de un ciclo, al revisar y reflexionar sobre las evidencias recogidas, y lleva a la reformulación de elementos (hipótesis, principios de diseño, Teorías Locales) que incidirán directamente sobre el diseño del siguiente ciclo. Para este tipo de análisis, dependiendo de la naturaleza de los datos, se han empleado recuentos globales (a través de tablas y gráficos), redes sistemáticas (Bliss, Monk, & Ogborn, 1983) en combinación con tablas resumen, visionados globales y transcripciones de episodios relevantes.
- Análisis Reflexivo: parte crítica del proceso que contrasta la totalidad de los datos recogidos y de los resultados procedentes de los análisis anteriores con la teoría existente, para producir nuevo conocimiento. Se realiza en el momento de redactar esta Memoria. La elaboración de calendarios y la redacción de un diario de investigación durante todo el proceso ayudan a la visión global necesaria en este tipo de análisis.

La comunicación de la información y presentación de los resultados obtenidos mediante Observación Participante tienden a tomar una forma *narrativa* (Heikkinen, Huttunen, & Syrjälä, 2007), complementada, cuando es factible, con formatos más *visuales* como *tablas*, *gráficos*, *mapas conceptuales* o *fragmentos del póster*.

En la Figura 2. 10 se puede observar la relación de todos los datos, métodos e instrumentos involucrados en cada fase de investigación. A continuación se describen con detalle, atendiendo al tipo de ciclo o de fase de investigación en que se aplica.

FASES		FUENTES Y MÉTODOS	INSTRUMENTOS RECOGIDA	INSTRUMENTOS ANALISIS	INSTRUMENTOS PRESENTACION
I	**Estudio Epistemológico**	Revisión de literatura relacionadas y fuentes secundarias (y primarias en el caso de los EVC)	Subrayado en colores	Documento Resumen Eje cronológico	Mapa conceptual (eje cronológico)
			EVC: Documento Resumen		Mapa conceptual (concepciones EVC)
	Estudio Institucional	Análisis de documentos oficiales	Documento Resumen		Redacción, pantallazos
		Análisis de materiales del curso (Libro de Texto)	Documento Resumen EVC: Buscador (Atlas.ti)	Documento Resumen EVC: Códigos (Atlas.ti)	Redacción, tabla de códigos, pantallazos Atlas.ti
		Análisis de 20 libros de texto	Tabla, fotos	Documento Resumen Categorías en PowerPoint	Tablas resumen con imágenes de los libros
		Observación de clases de la Unidad 9 sobre Aplicaciones Lineales	Vídeos, Notas de campo	Visionado Calendario	Narrativa según partes y estilos docentes de la clase, fragmentos transcripciones
	Estudio Exploratorio	Cuestionario para detectar dificultades de los estudiantes relacionadas con la visualización	Cuestionario	Tablas tipo redes sistémicas	Gráficos Resultados Tablas resumen
II	**Observación Participante**	Observación de las clases teóricas y Observación Participante en las prácticas.	Vídeos, Notas de campo	Diario, Visionado Póster, extracción de temas	Tablas Resumen, episodios póster
		Colaboración con otros profesores: entrevistas y conversaciones informales	Audio entrevistas, notas pre y post, notas diario	Transcripción de fragmentos	Narrativa
		Tutoría final	Actividad de reflexión y autoevaluación, vídeo	Reflexión posterior, transcripción, póster	Narrativa
		Cuestión "de la casita" del Examen Final	Respuestas estudiantes	Tablas evaluación	Gráficos y redacción
		Cuestionario Moodle	Cuestionario	Análisis de Moodle	Tabla y citas textuales
		Experimentación con el "Problema 7 con Ampliación"	Respuestas de los estudiantes	Respuestas corregidas y escaneadas	Redacción, pantallazos
			Encuestas	Tablas reducción de datos	Redacción, Tablas resumen
			Tutorías (vídeos+audio)	Transcripción, Codificación Atlas.ti	Narrativa, fragmento transcripciones, pantallazos vídeos
III	**El caso de los EVC**	Entender mejor los EVC como concepto matemático	Documento Resumen (por concepciones y con el horizonte matemático)		Redacción y mapa conceptual
		Revisar con más profundidad los datos relacionados con los EVC	Buscador de episodios	Documento resumen, Póster	Mapas conceptuales (episodios clase, problemas), episodios póster

Figura 2. 10: Relación de las fuentes, métodos e instrumentos empleados en cada fase de investigación.

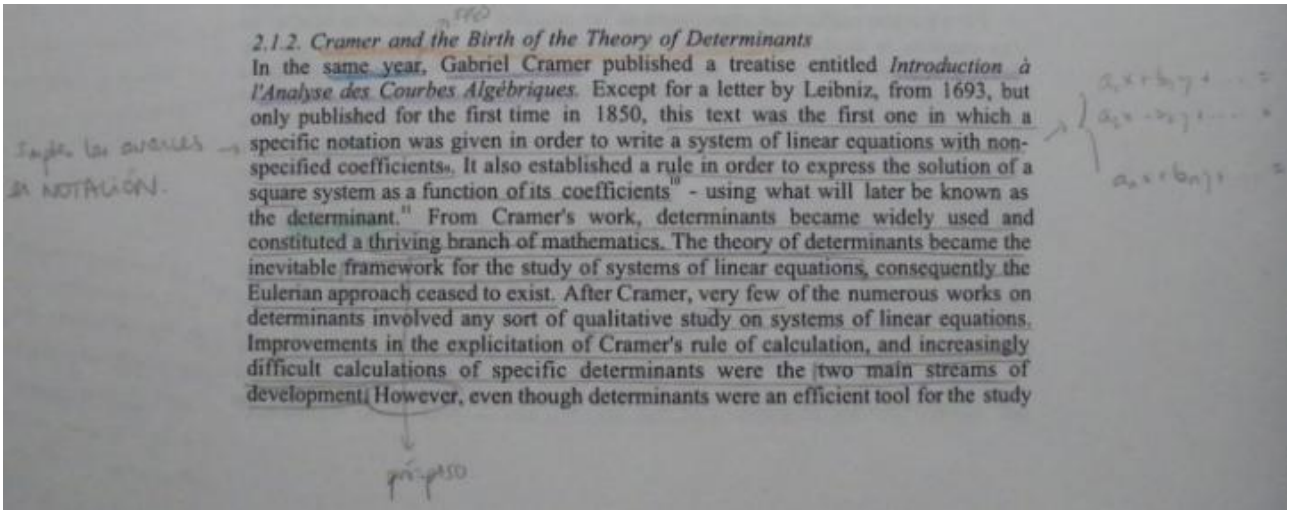
2.4.2 Ciclos de Investigación

En todos los *ciclos de investigación* se desarrolla un análisis documental. Éste puede ser de tres tipos, según la naturaleza de los documentos analizados: (1) revisión crítica de literatura relacionada con el tema; (2) profundización en las posibilidades de la visualización dentro del AL como disciplina matemática (desde el punto de vista histórico y de libros de texto de la asignatura); (3) profundización en el papel de la visualización dentro del curso observado (desde el punto de vista de los documentos oficiales y de los materiales del curso). El primer paso es puramente teórico y los métodos relacionados con él ya se han explicado (ver sección 2.2.1). A continuación se explican los métodos principales utilizados para los otros dos pasos.

2.4.2.1 Profundización en la Visualización en AL

Análisis históricos

El análisis de fuentes históricas se realiza fundamentalmente para el Estudio Epistemológico del Estudio Inicial y el estudio de los EVC como concepto matemático. Consiste en la revisión de fuentes bibliográficas secundarias sobre estudios del desarrollo del AL (Dorier, 2000, Parte I) y/o sobre el papel de la Geometría en dicho desarrollo (Gueudet-Chartier, 2000). La visión ofrecida por estas dos fuentes, procedentes ambas del mismo contexto, se complementa y amplia consultando otros documentos en los que también se habla de la evolución histórica del AL (Bourbaki, 1972; Kleiner, 2007, pp. 79–89; O'Connor & Robertson, 1996; Tucker, 1993; Vitulli, 2004) y libros de texto clásicos de AL (Dieudonné, 1964; Grassmann, 1995; Halmos, 1974).



2.1.2. Cramer and the Birth of the Theory of Determinants

In the same year, Gabriel Cramer published a treatise entitled *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques*. Except for a letter by Leibniz, from 1693, but only published for the first time in 1850, this text was the first one in which a specific notation was given in order to write a system of linear equations with non-specified coefficients». It also established a rule in order to express the solution of a square system as a function of its coefficients[10] - using what will later be known as the determinant.[11] From Cramer's work, determinants became widely used and constituted a thriving branch of mathematics. The theory of determinants became the inevitable framework for the study of systems of linear equations, consequently the Eulerian approach ceased to exist. After Cramer, very few of the numerous works on determinants involved any sort of qualitative study on systems of linear equations. Improvements in the explicitation of Cramer's rule of calculation, and increasingly difficult calculations of specific determinants were the two main streams of development. However, even though determinants were an efficient tool for the study

Figura 2. 11: La lectura de las fuentes bibliográficas secundarias en las que se basa el Estudio Epistemológico se realiza conjuntamente y con un mismo criterio de subrayado, facilitando la comparación y la integración de sus datos: en azul se subrayan las fechas o momentos históricos; en verde, los conceptos; y en morado, los autores y sus obras. También se incluyen notas en los márgenes que llaman la atención sobre aspectos importantes relacionados con la investigación o ayudan a su lectura. En la figura se muestra un fragmento de uno de los documentos consultados (Dorier, 2000, p. 8).

La lectura de estos textos se realiza de forma conjunta y con un mismo criterio de subrayado (Figura 2. 11), facilitando así la comparación e integración de la información relevante encontrada en un mismo documento, que se estructura en los siguientes apartados: eje cronológico, papel de la visualización en el desarrollo del AL, ejemplos matemáticos de uso de visualización, noción teórica de visualización, dificultades epistemológicas inherentes a algunos conceptos e ideas para tareas de clase. Para sintetizar esta información se elabora un mapa conceptual denominado como "*Eje Cronológico*" (Figura 4. 1, Figura 4. 2).

Análisis de libros de texto de AL

El análisis de otros libros de texto diferentes a los del curso se hace con una doble finalidad: (1) situar los resultados observados en el curso en un contexto matemático más amplio; (2) obtener ideas para el diseño de instrumentos de recogida de datos o para la experimentación. Se escogen 20 volúmenes que se agrupan en tres bloques diferentes (ver Figura 2. 12). Se consultan en tres momentos diferenciados de la investigación: (1) durante el Estudio Inicial para diseñar el cuestionario del Estudio Exploratorio (algunos libros de los Bloques II y III); (2) al inicio de la Fase II para desarrollar ideas para la aplicación de los principios de diseño (algunos libros de los Bloques II y III); (3) en la Fase III para profundizar en el uso de las representaciones en AL y ampliar el conocimiento sobre los EVC (todos los libros).

BLOQUE	DESCRIPCIÓN	COMENTARIOS	LIBROS DE TEXTO
I	*Bibliografía recomendada en la Guía Docente* para los diversos cursos de AL de la Facultad de Matemáticas de la UCM, complementada con algunos volúmenes habituales en las estanterías de la biblioteca de estudiantes de dicha Facultad.	Con este bloque de libros se explora un punto de vista institucional más global: de la Facultad e incluso estatal (pues la UCM tiene un papel relevante en España y la mayoría de volúmenes son de autores españoles).	(Burgos, 2006; Castellet & Llerena, 1996; Hernández, 1998; Lipschutz, 1996; Merino & Santos, 1999; Rojo, 2001)
II	*Bibliografía frecuente en investigaciones previas sobre AL* complementada con bibliografía básica otros países como Inglaterra, Estados Unidos, Francia y Alemania.	Con este bloque de libros se amplía el Estudio Institucional al ámbito internacional, buscando enfoques diferentes e innovadores. Sirve para contrastar la visión obtenida en el Bloque I y como fuente de inspiración para diseño de materiales.	(Chevallet, Flory, & Warusfel, 1984; Farin & Hansford, 2005; Fletcher, 1972; Lay, 1994; Robinson, 2006; Smith, 1998; Strang, 2005; Uhlig, 2002)
III	*Bibliografía relevante desde el punto de vista de la visualización*, resultado de una búsqueda bibliográfica en las fuentes de la biblioteca de la UCM, independiente a otras bibliografías[8]). En particular, se han encontrado libros que tienen una clara inclinación por argumentos geométricos o visuales, o bien que prestan especial atención al tipo de representaciones empleadas.	Con este bloque de libros se busca encontrar una mayor riqueza de representaciones así como ideas más concretas que poder incorporar e una propuesta de enseñanza que explote las posibilidades de la visualización.	(Banchoff & Wermer, 1992; Hefferon, 2008; Lin, 2005; Pedoe, 1963; Sernesi, 1993; Shifrin, 2002)

Figura 2. 12: Descripción de los libros de texto de AL analizados. Se dividieron en tres bloques según su naturaleza y los objetivos que condujeron a consultarlos.

[8] Este criterio hace que los libros encontrados a partir de otras investigaciones previas que tengan características del Bloque III no se sitúen en él y se mantengan en el Bloque II. Elegimos esta forma de proceder por una doble razón: (1) para distinguir libros sobre visualización en AL que pueden ser menos conocidos en el ámbito de la investigación en EM; (2) para conservar una perspectiva de innovación en la enseñanza de la visualización más realista que tenga en cuenta las fuentes bibliográficas del lugar en el que se investiga.

La recogida de datos se hace de forma más profunda y sistemática en la tercera iteración, en formato de tabla (Anexos) y de fotografías. Durante el análisis se presta atención a los siguientes elementos:

- Enfoque sobre el AL y planteamiento del libro: este aspecto se estudia principalmente a través del índice de contenidos y del prólogo o introducción, donde normalmente los autores explicitan sus intenciones y objetivos a la hora de escribir el libro, sus creencias sobre la asignatura y su enseñanza, las experiencias docentes previas que apoyan el texto, etcétera.
- Papel de la visualización: la información relativa a este aspecto procede de dos vías distintas. Primero, del prólogo o introducción (a veces hace referencia explícita al papel de la Geometría, la intuición o la abstracción, decisiones tomadas respecto a la redacción, la elección de lenguaje, el uso de ejemplos, etc.) Segundo, de la revisión página a página de los tipos de representaciones e imágenes visuales presentes en el texto. Si se detecta alguna interesante (normalmente cualquiera diferente a las características del lenguaje natural, simbólico o matricial), se lee el texto más detenidamente, se registra la página junto a una breve descripción de la imagen y se fotografía (indicando en la tabla que esto se había hecho). A medida que el proceso avanza, la convergencia de los datos permite centrarse más en las imágenes novedosas.
- Contenidos relativos a los EVC: interesa ver si se explican y en caso afirmativo, estudiar qué contenidos y representaciones se usan. La búsqueda de contenidos se realiza a través del índice inicial y final (de palabras), incluyendo nociones relacionadas como División, Ratio, Cociente, Factorización Canónica, Teoremas de Isomorfía, Proyección (Canónica), Relación de Equivalencia, Clases de Equivalencia, Partición, Paralelismo. Este análisis se completa con la revisión página a página del texto mencionada anteriormente.

El análisis de las fotos, independiente de la tabla, resulta lento y poco operativo. Se elaboran dos nuevos documentos en los que se combinaron ambas fuentes de información: en uno se recoge toda la información relativa a las representaciones y el uso de la visualización desde una perspectiva general (Anexos); en otro, más específico, se recoge la información relativa a los Cocientes (Anexos). La extensión de estos documentos obliga a sintetizar usando el Power Point en el primer caso (pues el uso de diapositivas es útil para agrupar imágenes en una misma categoría) y el Excell en el segundo (Anexos). Finalmente, los resultados del análisis se reflejan en dos tablas resumen (ver Figura 4. 7 y Figura 4. 8 de la sección 4.1.2.3).

2.4.2.2 Profundización en el Contexto

Análisis de Documentos Oficiales del Curso

El análisis de documentos oficiales del curso se hace fundamentalmente para el Estudio Institucional del Estudio Inicial. Se consulta la Guía Docente de AL (ver Anexos) y la página web de la UCM y de la Facultad de Matemáticas[9]. La lectura de estos documentos se

[9] http://www.ucm.es/ y http://www.mat.ucm.es/ respectivamente.

acompaña de la redacción de un resumen que recoge los aspectos relevantes para la investigación y sirve como base para la redacción posterior. Este análisis se actualiza cada curso y se complementa con la consulta de guías docentes de otras asignaturas relacionadas con los EVC en la Fase III.

Análisis de materiales del curso: Libro de Texto y Hojas de Problemas

El análisis de materiales del curso es una parte importante del Estudio Institucional y posteriormente del estudio de los EVC como concepto matemático. Siguiendo los principios anteriores se recogen los siguientes datos: Libro de Texto (complementados con unos apuntes sobre Diagonalización y el Teorema de Jordan), Hojas de Problemas, entregas semanales, exámenes (enunciados y respuestas del profesor). Finalmente se analizan en profundidad el Libro de Texto, las Hojas de Problemas y los enunciados de los exámenes.

<table>
<tr>
<td>REG: Gráfico geométrico IR^2
REG: Lenguaje natural
REG: Lenguaje natural matemático
REG: Simbolico
REG: Simbolico diagramatico~
REG: Simbolico matricial
REG: Simbolico vectorial~
REG: Simbólico abstracto~
REG: Tablas coordenadas algebraicas
REG: Tablas coordenadas numéricas
REG: Tablas ecuaciones algebraico~
REG: Tablas matricial algebraicas (ec)
REG: Tablas matricial numérico
REPR: Conversión~
REPR: Tratamiento~</td>
<td>- Registro Gráfico: incluye toda aquella representación que incluya representaciones gráficas de puntos, rectas, planos, superficies, sólidos así como de sus propiedades y relaciones. Se pueden establecer distinciones por: la dimensión (2,3,4 o n); la inclusión o no de coordenadas (analítica/sintética); la presencia de elementos comunicativos (notación, colores, sombras, ilustraciones)
- Registro de Tablas: incluye toda aquella representación que haga referencia de algún modo a coordenadas ya sea en forma de n-uplas, matrices, sistemas de ecuaciones, etc. Se pueden establecer distinciones por: la naturaleza de los elementos de las tablas (numérica, algebraica, diagramática); el contenido (vectorial, matricial, ecuaciones paramétricas o implícitas); la presencia de elementos comunicativos (color, notación para enfatizar ciertas posiciones, etc.)
- Registro Simbólico: incluye cualquier representación propia de la teoría axiomática del AL que varían según el concepto al que hagan referencia: letras que designan vectores, subespacios, espacios vectoriales, matrices, aplicaciones lineales; cuantificadores, útiles en la formulación de definiciones y teoremas; notación específica para referirse a dimensiones, imágenes, núcleos, etc.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">- Representaciones diagramáticas: (más en el sentido de Guzmán que de Pierce) son aquellas que muestran relaciones entre las diferentes partes de una colección o sistema de objetos matemáticos. Los más habituales en AL son referidos a matrices, conjuntos (como los diagramas de Venn) o los diagramas conmutativos (a veces mezclados con representaciones gráficas).
- Ilustraciones: son representaciones icónicas de objetos o situaciones de la realidad.
- Lenguaje natural (registro): son todas las representaciones propias del sistema de signos de la lengua vernácula que se utiliza de forma habitual para comunicarse. En un contexto matemático puede ocurrir que contenga términos específicos de esta disciplina (Imagen, Núcleo, Aplicación Lineal, Inyectiva, etc.). En ese caso se habla de lenguaje natural matemático.</td>
</tr>
</table>

Figura 2. 13: *Códigos creados en el Atlas.ti para el análisis de materiales del curso*. La definición de los tipos de representaciones está basada en investigaciones previas (Alves-Dias, 2007; Artigue, Gueudet-Chartier, & Dorier, 2000, pp. 247–252, sobre el trabajo de Pavlopoulou; Guzmán, 1996; Hillel, 2000) y en los resultados de fases previas de investigación.

El análisis de los materiales del curso guarda cierta correspondencia con el de los libros de AL referido anteriormente. Inicialmente se consultan globalmente para identificar el enfoque general de la asignatura, el manejo de la visualización, el tipo de tareas propuestas a los estudiantes y la evaluación. Posteriormente, se realiza la consulta de los materiales en relación de los EVC con ayuda del software Atlas.ti: primero, se rastrean, identifican y crean citas relativas a los Cocientes (y nociones relacionadas); segundo, las citas se renombran según su contenido (matemático) para facilitar su posterior identificación; finalmente, se codifican atendiendo por un lado al tipo de producto de la visualización y por otro al tipo de proceso. Los códigos empleados se detallan la Figura 2. 13. Se pueden ver algunos ejemplos de codificación en el Capítulo 4.3 sobre EVC (ver Figura 4. 49, Figura 4. 61, Figura 4. 67, Figura 4. 70 y Figura 4. 73)

2.4.3 Ciclos de Desarrollo

La Observación Participante es el principal método empleado en los ciclos de desarrollo, aunque a veces se complementa con otros instrumentos de recogida de datos como encuestas, entrevistas y el diario de investigación.

2.4.3.1 Observación Participante de Clases

La Observación Participante se emplea como método de generación y recogida de datos tanto en el Estudio Inicial como en la Fase II, pero con diferente grado de participación (casi nulo en el primero y con mayor importancia en el segundo).

Observación

La observación tuvo lugar a tres niveles: de clase, de grupo, tutorías. Para asegurar la triangulación de datos, éstos se recogen a través de distintos métodos: grabación de vídeo o audio, notas de campo, notas de preparación de las clases y apuntes de los estudiantes.

Las *observaciones de clase* conciernen a las explicaciones generales en las clases teóricas con el Gran Grupo y a las explicaciones sobre los problemas de las hojas en las clases de prácticas con el Grupo de Prácticas. Se graban en vídeo, se toman notas de campo (que en el caso de las clases prácticas se sustituyen por las notas de preparación de las clases) y se recogen apuntes de los estudiantes. En este tipo de observación, centrada de forma natural en el profesor, el vídeo se sitúa al fondo de la clase. Esto permite registrar lo que ocurre en la pizarra, al mismo tiempo que se observa el resto de la clase. Las caras de los estudiantes quedan ocultas, pero se toma nota de sus intervenciones. Las notas de campo se toman en dos columnas (a partir de la Semana 4 de observación): a la izquierda se sitúan las palabras y gestos del profesor y las interacciones con los estudiantes; y a la derecha, las anotaciones en la pizarra (Anexos)

Las *observaciones a nivel de grupo* conciernen al trabajo en grupos (de unos 4-5 estudiantes) propuestos en algunas actividades experimentales desarrolladas en las clases prácticas. Se graban en vídeo y/o audio, según los medios disponibles. El rol compartido como profesora-investigadora dificulta el uso de más de una cámara (por lo que se pide la colaboración de los estudiantes que a veces se graban con sus portátiles o móviles) y la toma de notas. Como sustituto más próximo se recogen los documentos escritos por los estudiantes durante el trabajo en grupo (incluyendo los borradores).

Las *observaciones a nivel de tutoría* hacen referencia a los momentos, fuera de las clases de prácticas, en que los estudiantes acuden a preguntar sus dudas, individualmente o en parejas. Las tutorías grupales del "Problema 7 con Ampliación" no se incluyen en este nivel de observación, sino en el anterior. Para no cohibir a los estudiantes, las tutorías no se graban ni en audio ni en vídeo. Únicamente se fotocopian los documentos escritos involucrados en ellas (como explicaciones de la profesora o dudas de los estudiantes).

En el *Estudio Inicial* todas las observaciones son a nivel de clase. Se observan un total de 13 horas (8 teóricas y 5 prácticas) cuya distribución y contenidos se muestran en la Figura 2. 14 (para una descripción más detallada, consultar el "Calendario&Agenda2009-10" en los Anexos). El análisis se realiza para dar una visión global de los datos a través de la elaboración de un calendario con las herramientas de Google Calendar (ver Figura 2. 14) y un visionado global elaborado con el programa de transcripción *f4* (Anexos) en el que se marcaban las diferentes partes de la clase y se transcribía algún episodio que se consideraba más interesante. Finalmente, este análisis facilita la narración de una clase genérica y la inclusión de citas textuales sobre mensajes dados en torno a la visualización (ver sección 4.1.2.3).

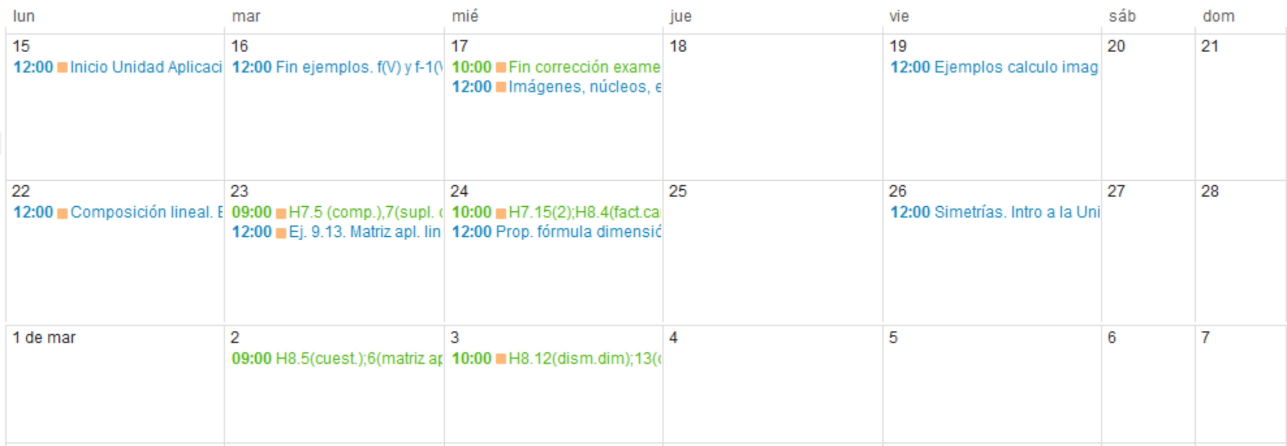


Figura 2. 14: *Calendario de las clases observadas durante el curso 2009/2010*. Las sesiones teóricas están marcadas en azul y las prácticas en verde. Con naranja se han señalado las clases que hacen referencia a algún contenido relacionado con los Cocientes.

En la Fase II se observan un total de 93 horas (46 teóricas y 47 prácticas), incluyendo clases a nivel de clase (la mayoría) y de grupo. Las tutorías se contabilizan aparte. El análisis sucede en diversas etapas (McMillan & Schumacher, 2005) correspondientes con los niveles anteriormente descritos.

- Etapa 1. *Análisis de descubrimiento, en el campo*.
  - Comentarios durante la observación en las notas de campo.
  - Redacción posterior a la observación de un resumen de lo ocurrido en el Diario de Observación, donde se trata de identificar temas, interpretaciones, preguntas y de desarrollar categorías iniciales sobre temas y conceptos (que se van incorporando en las notas de campo).
- Etapa 2. *Análisis intermedio.*
  - Revisión semanal de los datos recogidos y del método seguido.
  - Búsqueda de modelos de visualización (se consolida en torno a la Semana 5, ver "Diario de Observación" en Anexos).

  - Reformulación de los objetivos de la observación[10].
  - División en episodios y transcripción de las partes relevantes.

- Etapa 3. *Análisis reflexivo*.
  - Visión de conjunto, análisis inductivo.
    - Elaboración del "calendario de observaciones" con la herramienta Google Calendar (ver Figura 2. 14 y Anexos).
    - Visionado global con ayuda del software de transcripción *f4*.
  - Codificación de temas y categorías. Elaboración del "Póster de observaciones"[11] (la Figura 2. 15 muestra el proceso seguido y en la Figura 4. 13 el resultado).
    - Fuentes empleadas para clasificar sistemas y organizar datos: las preguntas y los objetivos de la investigación; los temas, conceptos o categorías manejados por otros investigadores en anteriores estudios; los conocimientos previos del investigador y los datos en sí mismos.
    - Estrategia de codificación mixta: se definen algunas categorías predeterminadas basadas en el Marco Conceptual y, al mismo tiempo, se añaden categorías descubiertas en los datos. Los resultados de esta codificación se plasmaron en una plantilla tamaño A0 (de ahí el nombre de 'póster', ver Figura 4. 13).
    - Códigos empleados[12]:
      - REPR: manejo y coordinación de representaciones.
      - DIAG: pensamiento diagramático o uso de diagramas.
      - GEOM: uso de la Geometría.
      - INT: desarrollo de la intuición y las imágenes mentales.
      - COM: comunicación a través de las imágenes.
      - **FLEX**: fomento de la flexibilidad.
      - EDU: aspectos didácticos de la clase.
      - SMS: normas, recomendaciones y mensajes sobre visualización.
  - Análisis deductivo sobre las categorías y temas para describir los modelos de visualización siguiendo las siguientes estrategias:
    - Uso del póster para combinar una visión de conjunto o, al hacer zoom, una visión más concreta de un determinado episodio.

[10] Por ejemplo, para las clases teóricas el objetivo de la Semana 1 a la 8 es identificar modelos de visualización y describir formas de uso; a partir de entonces se modifica el objetivo de la observación convirtiéndola en un medio de control y se reduce el número de observaciones semanales

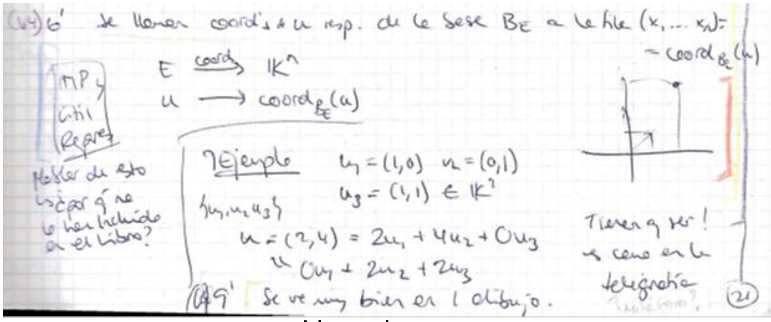
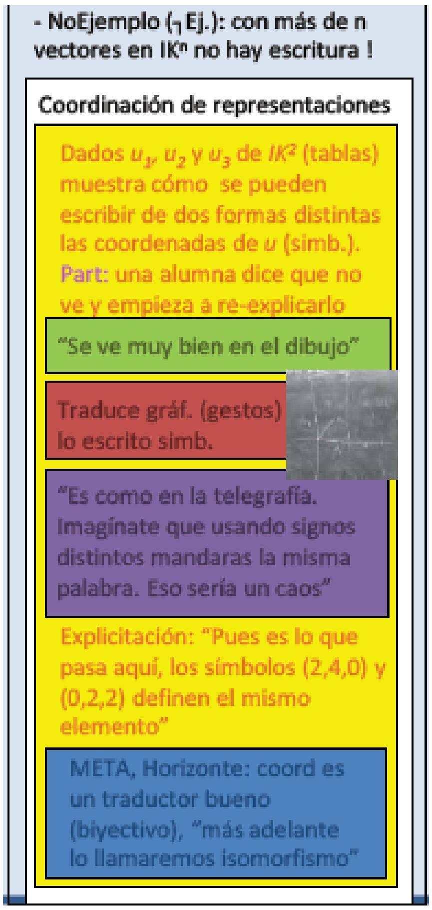
[11] Inicialmente el análisis se realiza con el software Atlas.ti. pero debido a la gran cantidad de datos y a la importancia de las imágenes en el proceso de análisis, finalmente resulta más adecuado hacer la codificación a mano y usar el formato de póster (elaborado con Power Point) para sintetizar el proceso realizado.

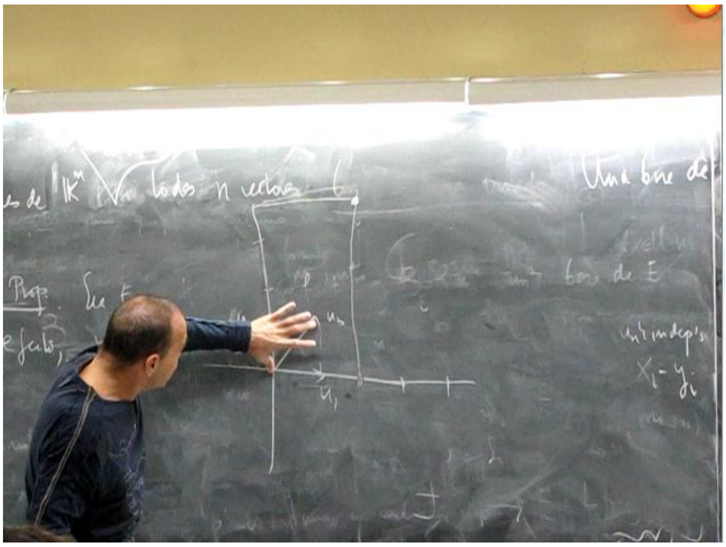
[12] En la sección 4.2.3 se describen con mayor detalle estos códigos, su evolución durante el análisis y los temas y modelos a los que dieron lugar.

- Revisión, clasificación y organización de los temas. Construcción de tablas resumen (ver sección 4.2.3).
- Detección de factores influyentes globales formulando preguntas básicas: quién, cuándo, dónde, etcétera (sección 4.2.2).

o Comunicación de los resultados:

- Secuencia narrativa de los episodios observados (ver sección 4.2.1).
- Descripción de los modelos (sección 4.2.3).
- Reflexión como participante (secciones 4.2.4 y 4.2.5).

<table>
<tr><th></th><th>3. División en episodios y codificación</th><th>4. Síntesis en el “Póster”</th></tr>
<tr><td rowspan="2">I.Revisión notas de clase y diario</td><td>
Notas de campo</td><td rowspan="4">

(S220110124G)</td></tr>
<tr><td> D → (V5:9’) Contraejemplo de unicidad de coordenadas (si tengo más de n vectores en IK^n). Dibuja y razona mentalmente sobre el dibujo. Metáfora con la unicidad necesaria en telegrafía.¶</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. Revisión del vídeo y transcripción</td><td>
Vídeo Clase (S220110124G5_10:03)</td></tr>
<tr><td>
Visionado2010-11 (S1-3).rtf Transcripción (a continuación)</td></tr>
</table>

(Viene después de la introducción de "*coord.*")
#00:06:47-7# Eh, antes de eso, para que veáis lo importante que es el que sea base para poder hablar de coordenadas... Lo voy a llamar como dije 'no-Ejemplo' (y escribe).

#00:07:07-3#

#00:07:07-3# Sean por ejemplo estos vectores $u_1 = (1,0)$, $u_2 = (0,1)$ y $u_3 = (1,1)$. Los tres en IK^2. Primera pregunta. ¿Esto es base? No. Seguro, ¿por qué no son base? (Los alumnos dicen algo incomprensible). Porque son tres, porque no son dos. #00:07:33-9# Condición: no siempre que coja dos vectores de IK^2 son base. Por ejemplo, si cojo el (0,0) y cualquier otro, la he "cagado" (pone otro ejemplo más). Lo que digo es que si son tres imposible #00:07:56-7# (Coge el vector (2,4) y lo escribe de forma simbólica como combinación lineal de los tres). #00:08:39-2#

#00:08:39-2# Entonces no cabe hablar de coordenada... #00:08:46-7#

#00:08:46-7# Al: No veo en la esquina. #00:08:49-2#

#00:08:49-2# G: Lo siento, lo siento. Deberíamos dejar de escribir en las esquinas (le cuenta lo que ha escrito). Y luego se trata de escribir el (2,4) como dos combinaciones lineales distintas de estos tres. Una primera... Bueno se ve muy bien en el dibujo. #00:09:09-1# Ya sé que se ha puesto naranja cuando termine de contar este ejemplo, lo dejamos. #00:09:15-4#

#00:09:15-4# Fijaros (dibuja dos ejes y los vectores u_1 y u_2 sobre ellos). Aquí está el u_1, aquí el u_2 y aquí está el u_3 (los pinta y les pone nombres). #00:09:28-6# El primer vector que nos han dado, el (2,4) (pinta rayitas en los ejes para situar el punto). Dos y ahora uno, dos, tres, cuatro. Es este. Este de aquí (pinta las proyecciones sobre los ejes). #00:09:47-8# Digo, una manera de ponerlo como combinación es alargar este al doble (lo marca con la mano), alargar este cuatro veces (lo hace con la mano también) y ponerlo. Pero otra es alargo este dos veces (lo marca), sumo este dos veces (también lo marca con la mano), sumo las dos cosas y también me ha dado este. #00:10:07-6# Luego la manera de escribir el vector (2,4) como combinación de estos tres vectores no es única. Por eso los sistemas generadores que no son base no nos sirven. Porque a lo mejor tú me dices no estoy considerando el tío de coordenadas (mira lo que ha escrito en la pizarra) (2,4,0). Y tú me dices, no yo el (0,2,2). #00:10:28-3# Y van y son el mismo. #00:10:34-4#

#00:10:34-4# Es como en la telegrafía, ¿no? Imagínate que usando signos distintos mandaras la misma palabra. Eso sería un caos brutal. Pues es lo que pasa aquí, los símbolos (2,4,0) y (0,2,2) definen al mismo elemento. #00:10:50-9#

#00:10:50-9# Eso no pasa con las bases. Tenemos un traductor de vectores en filas (se mueve hacia la parte donde tiene lo de "*coord.*"). Un traductor de puta madre, porque a vectores distintos proporcionan filas distintas, a cada fila le corresponde un sólo vector... Esto es lo que llamaremos más adelante isomorfismo de espacios vectoriales, pero de momento nada. #00:11:16-6#

#00:11:16-6# Bueno, mañana dedicaré un poco de tiempo a comentar alguno de los ejercicios #00:11:18-6#

Figura 2. 15: *Ejemplo del proceso de codificación y elaboración del Póster en torno a un episodio ocurrido en la Semana 2.* Durante las observaciones se graba en vídeo y se toman notas en el Cuaderno de Campo, y en el Diario de Observación, realizando los primeros análisis (se pueden observar anotaciones en el margen de las notas de campo). Después se revisa el vídeo. Como este episodio se considera relevante, se transcribe por completo en el documento "Visionado_f4_2010-11.rtf" (ver Anexos), elaborado a partir del Diario de Observación y el software de transcripción *f4*. Hecho esto, se vuelve a las notas de campo. Se divide la clase en episodios (este episodio pertenece a uno mayor en el que se están introduciendo las coordenadas y la aplicación "$coord_{BE}$") y se codifica. Este es un episodio rico, que involucra seis de los ocho códigos principales definidos. En los cuadros del póster se incluyen comentarios de los participantes. A pesar de usar comillas ("") para ello, no se deben tomar siempre como citas textuales. Por limitaciones espaciales, son una síntesis de lo dicho por ellos, lo más fiel posible a la realidad.

Participación

La participación en el curso se desarrolla en dos niveles: *general* como profesora de prácticas, *local* a través del diseño de actividades experimentales específicas. En los métodos para investigar cada una de ellas se debe tener en cuenta la discontinuidad existente entre ambas:

> *The intent is to investigate the possibilities for educational improvement by bringing about new forms of learning in order to study them. Consequently, there is frequently a significant discontinuity between typical forms of education (these could be studied naturalistically) and those that are the focus of a design experiment (Cobb et al., 2003, p. 10).*

La *participación general* consiste en la aplicación de los principios de diseño durante la enseñanza de las clases prácticas tradicionales y admite un modo de investigación naturalista que queda reflejado en el análisis anterior (se considera a la investigadora como una profesora más, la profesora B.) El diseño de *actividades experimentales* tiene un doble objetivo: (1) contribuir al desarrollo/mejora de la enseñanza de la visualización en la práctica; (2) generar datos que faciliten la investigación de dicho desarrollo. Son al mismo tiempo un instrumento de mejora de la enseñanza y de recogida de datos para la investigación. Cada actividad da lugar a unos métodos de análisis específicos. En esta Memoria se hace especial referencia a tres: "*Actividades de reflexión y autoevaluación*", la "*Cuestión 6*" del Examen Final, y el "*Problema 7 con Ampliación*". En este apartado se explican las dos primeras (la tercera se deja para la sección 2.4.4.2).

Actividades de reflexión y autoevaluación

La actividad titulada "*Actividades de reflexión y autoevaluación*" (ver Anexos) se diseña para la primera hora de la Tutoría Final con el doble objetivo de: (1) repasar de forma visual contenidos fundamentales del curso antes de los exámenes; (2) recoger información sobre las habilidades visuales y la comprensión de los estudiantes a final de curso. Se compone de varias partes:

- Parte 1. *Tarea de representación y conversión de seis endomorfismos de IR^2* (pregunta 1): tres en la columna de la izquierda, dados por su expresión algebraica; y los otros tres, en la columna de la derecha, dados gráficamente a través de la imagen de una casa como la de la Figura 2. 16. Esta pregunta se elabora a partir de algunos libros de texto consultados (Strang, 2005) y de una de las entregas semanales (aunque en el Grupo de Prácticas ningún estudiante la entrega). Al final de cada columna se solicita que describan el procedimiento seguido y valoren el grado de dificultad, justificando la respuesta.
- Parte 2. *Cuestiones de reflexión sobre los endomorfismos anteriores* (preguntas 2-4): se pide describir el tipo de imágenes que se obtienen bajo una aplicación lineal (poniendo un ejemplo gráfico de aplicación no lineal); se pregunta cuáles de los endomorfismos anteriores no son diagonalizables (y por qué) y cuáles son ortogonales (pensando en la interpretación gráfica de la definición); se pide la representación gráfica de sus subespacios invariantes o la clasificación por diferentes criterios (por semejanza, según conserven o no la orientación).
- Parte 3. *Reflexión tipo META* (pregunta 5 y 6): se plantea un debate sobre el sentido de la clasificación de endomorfismos por congruencia que posteriormente sirve de motivación para reflexionar sobre posibles formas de mirar una matriz simétrica (completando un mapa conceptual).

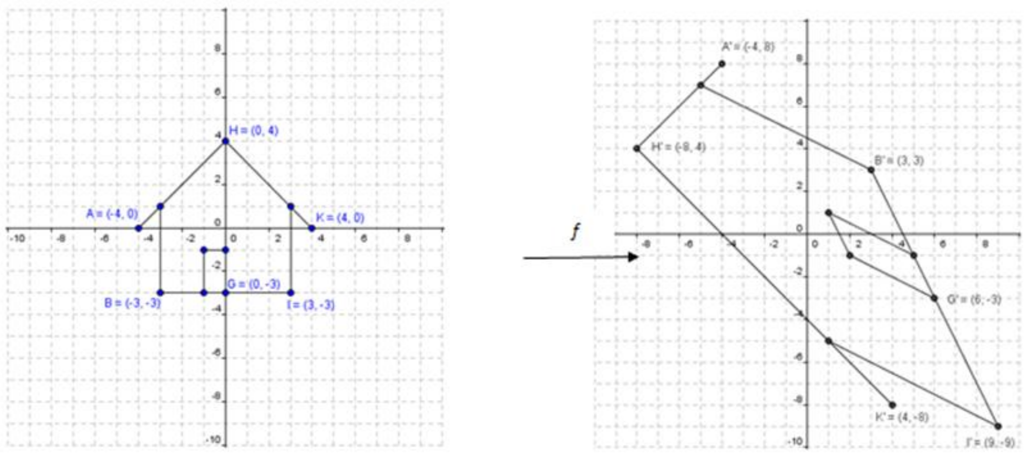
La aplicación de esta actividad se graba en vídeo y se narra posteriormente en el Diario de Observación. Este episodio se analiza y se incluye en "*el póster*". En contraste, las respuestas de los estudiantes no se analizan, pues no son significativas al no desarrollarse la actividad según lo esperado (ver sección 4.2.1.5).

Cuestión 6

La "*Cuestión 6*" surge para legitimar la visualización en el curso, incluyéndola en la evaluación (como resultado de la colaboración con el profesor G.), y para obtener respuestas de los estudiantes que informen sobre su habilidad y comprensión visual, más significativas que las obtenidas con la actividad anterior. El enunciado está basado en dicha actividad. Tiene tres apartados: en el primero se pide "*diagonalizar gráficamente*" el endomorfismo, y se explica qué se entiende por ello; en el segundo, se pide diagonalizar algebraicamente el endomorfismo (se hace a través de la definición, sin mencionar la palabra "*diagonalizar*"); el tercero admite varios tipos de respuestas, entre ellas una más visual y otra más algebraica, sirviendo para estudiar la preferencia por lo visual de los estudiantes.

Responde a la siguiente cuestión por detrás y en hojas independientes a las respuestas de las otras cuestiones.

(6) **(0.6 puntos)** Sea el espacio euclídeo IR^2 con el producto escalar usual y sea el siguiente endomorfismo $f: IR^2 \to IR^2$ que envía el primer conjunto de vectores en el segundo:



a) Diagonaliza gráficamente el endomorfismo, esto es, encuentra y dibuja una base $B = \{u_1, u_2\}$ tal que $M_f(B)$ es diagonal y escribe dicha matriz. Explica el procedimiento seguido para encontrar ambas, la base y la matriz.

b) Escribe la matriz de f respecto de la base canónica $\mathcal{E}$ de IR^2 y encuentra una matriz P invertible tal que $P^{-1} \cdot M_f(\mathcal{E}) \cdot P$ sea diagonal.

c) ¿Es f un endomorfismo autoadjunto? ¿Por qué?

Figura 2. 16: Enunciado de la "*Cuestión 6*", incluida en el Examen Final.

2.4.3.2 Cuestionarios para los Estudiantes

Con el objetivo de recoger información sobre las dificultades de los estudiantes en relación a la visualización, se elaboran tres cuestionarios diferentes a lo largo del estudio. Aquí se incluyen los de carácter más general, dejando la descripción del diseño de la Encuesta del "Problema 7 con Ampliación" para más adelante (ver sección 2.4.4.2).

Cuestionario sobre la Aplicación Lineal

Este cuestionario se diseña para el Estudio Exploratorio. Se elige el tema de las Aplicaciones Lineales porque corresponde a la unidad observada en las clases y porque ha sido objeto de investigaciones previas (Gueudet-Chartier, 2002; Molina & Oktaç, 2007), ofreciendo la posibilidad de cotejar los resultados.

El Cuestionario se estructura en cuatro partes de naturaleza diversa (ver Anexos):

- Parte 0. *Datos personales e instrucciones*.
- Parte 1. *Sobre la noción y definición de Aplicación Lineal*: compuesta de cinco preguntas abiertas –definición, explicación a un compañero, ejemplo, contraejemplo y utilidad de las Aplicaciones Lineales– inspiradas en el trabajo de Molina y Oktaç (2007) con las que se quieren explorar los esquemas conceptuales de los estudiantes en torno al concepto.
- Parte 2. *Sobre los modelos intuitivos y el manejo de diversidad de representaciones de las Aplicaciones Lineales*: compuesta de cuatro problemas –(1) sobre registro gráfico y modelos intuitivos inspirado por Guedet-Chartier (2002) y Molina y Oktaç (2007); (2) sobre otros registros inspirado en materiales consultados y los problemas de las hojas; (3) sobre tratamiento del registro gráfico inspirado por uno de los libros de texto consultados (Strang, 2005) y (4) en lenguaje simbólico extraído directamente de las Hojas de Problemas– con los que se quiere explorar la intuición y la habilidad para manejar diversidad de representaciones de los estudiantes en relación a su comprensión del concepto.
- Parte final. *Evaluación, comentarios y reflexión*: compuesta de cinco preguntas cerradas sobre la evaluación del instrumento –sobre dificultad, adecuación del tiempo y similitud con los problemas de clase– y un espacio para comentarios y reflexión sobre el impacto en el aprendizaje del tipo de tareas del cuestionario.

Una vez diseñado, el Cuestionario se somete a la evaluación de tres expertos (incluyendo al profesor G.) y de cinco estudiantes (a quienes se les pide que lo respondiesen completo) dando lugar a algunos cambios de redacción. El Cuestionario se aplica en 1 hora de duración a un total de 30 estudiantes (16 mujeres y 14 hombres)[13], aproximadamente un mes y medio después del final de las explicaciones sobre las Aplicaciones Lineales. No se entregan todas las partes a la vez para evitar influencias de las últimas partes sobre las primeras: primero se les reparte la primera hoja (con la Parte 0 y 1) y se leen las instrucciones en alto; 10 minutos después se entrega el resto del Cuestionario (con las Partes 2 y la Evaluación).

El análisis de datos se realiza desde una perspectiva doble –por problemas y por individuos–con más énfasis en los problemas, ya que inicialmente se decide centrarse más en los contenidos matemáticos que en las diferencias individuales (ver Introducción, sección 1.1.2). Debido a la convergencia de los datos es suficiente analizar en profundidad

[13] Como no se avisa con antelación la realización del Cuestionario, se supone que esta muestra coincide con el Gran Grupo, es decir, con los estudiantes que en ese momento asisten de forma habitual a las clases de teoría.

17 de los 30 cuestionarios[14]. Para proceder a la reducción de datos, los cuestionarios se ordenan alfabéticamente asignando un número a cada uno. La información se sintetiza en tablas (una para cada problema), siguiendo una metodología próxima a las redes sistémicas (Bliss et al., 1983). Cuando se desea complementar esta información con algún comentario (por ejemplo una cita literal de alguna respuesta) éste se introduce como pie de página junto al número de cuestionario. Al final de la tabla se recoge información relevante de cada estudiante (Anexos). Finalmente, la información se refleja en gráficos y se recogen ejemplos significativos en tablas (ver sección 4.1.3.1).

Cuestionario de Moodle

Al final de la Fase II surge la necesidad de recoger información de los estudiantes del Gran Grupo sobre: sus hábitos de estudio, su habilidad para visualizar y sus percepciones del curso y de la visualización. El "Cuestionario de Moodle" tiene dos partes diferenciadas, implementadas con Google Docs y las herramientas correspondientes de Moodle (ver Anexos):

- Parte 1. *Formulario implementado en Google Docs con los siguientes apartados*: datos de situación; preguntas sobre el estudio del AL y la asistencia a las clases de AL; preguntas abiertas sobre lo más difícil del curso y un episodio de visualización.
- Parte 2. *Cuestionario implementado con las herramientas del Moodle con preguntas sobre visualización en AL*: preguntas sobre la formación de imágenes mentales; preguntas relativas al manejo de representaciones y el pensamiento geométrico (con Geometría Dinámica); preguntas sobre recomendaciones para el futuro.

Este cuestionario permanece abierto en el Curso Virtual de la asignatura durante todo el verano. Obtiene un número muy bajo de respuestas que no se han analizado en profundidad. Únicamente resultan interesantes algunas percepciones de los estudiantes sobre la visualización recogida con las últimas preguntas de la segunda parte.

2.4.3.3 Entrevistas con los Participantes

Las entrevistas con los estudiantes surgen a raíz de la participación en el curso, ya sea en conversaciones informales antes o después de las clases, en las tutorías (individuales o colectivas) o incluso durante las clases prácticas (como se ha explicado anteriormente). Algo similar ocurre con los profesores, especialmente con S. y G., con quienes se dan comunicaciones puntuales, tanto orales como escritas (por email).

En contraste, están las reuniones planeadas al inicio de la Fase II para comentar las observaciones y facilitar la colaboración con el profesor G. Son entrevistas semi-estructuradas, pues se establecen con antelación los temas a discutir: aspectos generales de la asignatura, creencias sobre la enseñanza y la visualización, motivaciones e intenciones tras los hechos observados, discusiones sobre cuestiones específicas surgidas a raíz de las observaciones (en torno a algún episodio de visualización, dificultades de los estudiantes, etc.) El Diario de Observación es una referencia clave en la preparación de los protocolos (ver Anexos). Durante las entrevistas se graba en audio (el vídeo se descarta

[14] Se señala que la muestra analizada y el grupo total de participantes en el estudio son equivalentes desde el punto de vista del rendimiento académico: coinciden las medias de las calificaciones del primer cuatrimestre (4,74).

por resultar demasiado invasivo) y se toman notas. Al terminar, se completan las notas y se transcribe algún episodio relevante, consistiendo en el principal método de análisis de los datos. Aunque sólo se realizan tres entrevistas, por diversos motivos (entre los que destaca la diferencia de creencias sobre la educación y la visualización), éstas aportan una valiosa información sobre el profesor G. a la que no se podría haber accedido de otro modo y también, fruto de la colaboración, surgen algunos episodios más de visualización (ver sección 2.5.2).

2.4.3.4 Diario de la Investigadora

Richey y Klein (2005) recomiendan a los investigadores, que se acogen al Desarrollo Educacional, el uso de diarios o "logs" como medio de generación de datos confiables y comparables (p. 44). En este estudio, el diario (completado mensualmente) desempeña un papel clave en la reflexión y la documentación del proceso de aprendizaje de la investigadora, tan importante para el DR (Gravemeijer, 1994).

2.4.4 Estudio de un caso: el concepto de Espacio Vectorial Cociente (EVC)

Los métodos empleados en el estudio de los EVC como "concepto matemático" ya se han descrito, pues corresponden a extensiones de estudios realizados anteriormente (análisis de textos históricos, revisión de libros de texto de AL, análisis de los materiales del curso). Los resultados de este estudio se presentan en un mapa conceptual (ver Figura 4. 105). A continuación se describen los métodos empleados en la focalización en los EVC realizada sobre los datos de la Fase II y la actividad de experimentación "Problema 7 con Ampliación".

2.4.4.1 Focalización en los EVC

Para tener una visión global de los episodios de clase relativos a los EVC se realiza una búsqueda de episodios, en la que el Diario de Observación resulta más útil que las Notas de Campo al permitir la utilización de herramientas informáticas (ver Figura 2. 17). Esta búsqueda se completa con la labor del "*Póster*". La información encontrada se sintetiza e integra en el calendario de Google (Anexos). Una vez detectados todos los episodios del curso relativos a los Cocientes, se elabora una película que recoge los datos visuales (vídeos o fotos) correspondientes[15], facilitando la visión de conjunto y su posterior análisis. De este modo emergen concepciones, representaciones y modelos de visualización empleados en el curso para enseñar los EVC y dificultades que los estudiantes encuentran en su aprendizaje. Estos resultados después se contrastan con el estudio de los EVC como concepto matemático dando lugar a la sección 4.3.1.

[15] Para ello, se utiliza el software Windows Movie Maker que sólo admite el formato (.wmv). La conversión de vídeos a este formato se realiza gracias a la ayuda del software Any Video Converter.

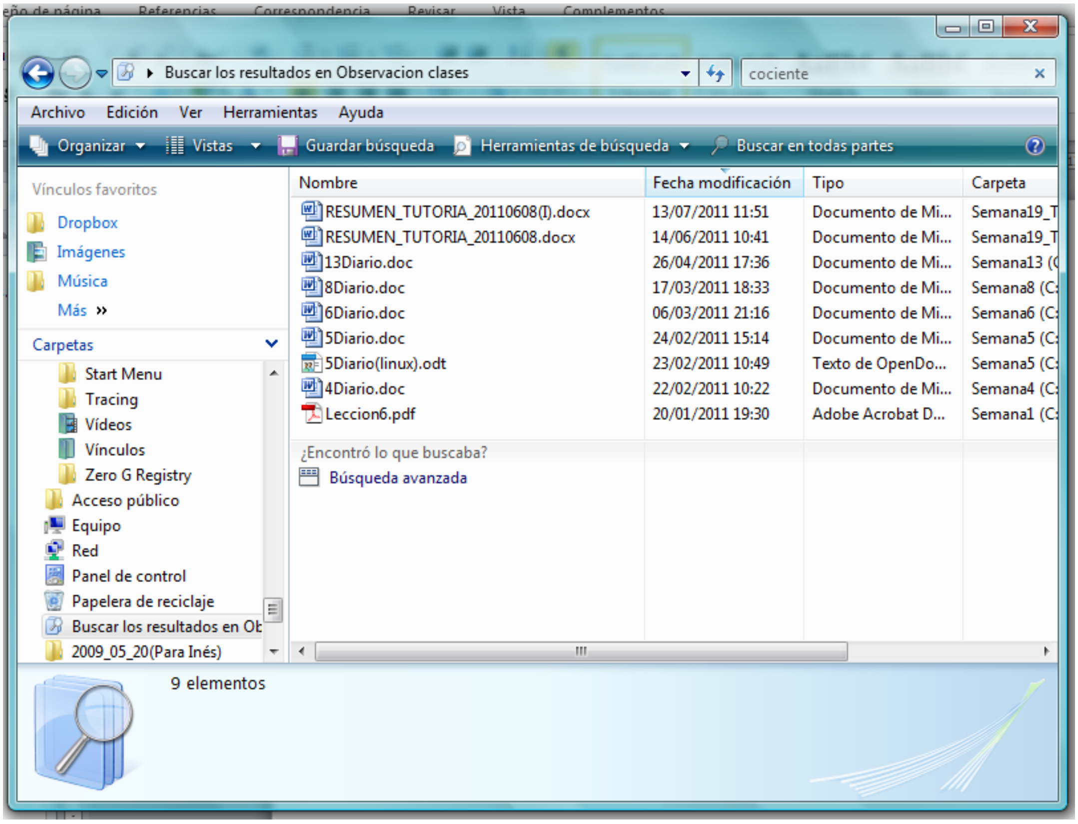


Figura 2. 17: Búsqueda de episodios sobre el Cociente en los diarios de observación.

2.4.4.2 Problema 7 con Ampliación

Esta actividad está motivada en respuesta a las dificultades observadas en los estudiantes con los EVC. También, inspirada en las explicaciones teóricas visuales sobre la Factorización Canónica tendrá por objetivo estudiar el impacto de la visualización sobre el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes.

Diseño y análisis previo de la actividad

Como base de la actividad se toma el *Problema 8.7* sobre Aplicaciones Lineales (Figura 2. 18). Con ello se quiere: proponer una actividad cercana a las prácticas del curso, que no resulte demasiado artificial para que su uso futuro sea factible; y evidenciar ante los estudiantes que cualquier problema es válido para profundizar en la visualización. El *Problema 8.7* resulta adecuado (según los objetivos anteriores) al versar sobre sobre una aplicación lineal en IK^3 cuya representación gráfica no resulta evidente (proyección sobre una recta). Como no es ni inyectiva ni sobreyectiva, también da pie a reconstruir en un ejemplo la explicación de las clases de teoría sobre la Factorización Canónica, introduciendo los EVC.

7. Calcular la matriz respecto de la base estándar de una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ que cumpla las condiciones siguientes:

$$(i)\ f((1,0,0)) \in L[(0,0,1)],\quad (ii)\ f^2 = f \quad \text{y} \quad (iii)\ \ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : x + z = 0\}.$$

Figura 2. 18: Enunciado del *Problema 8.7* de las hojas escogido para diseñar una actividad de ampliación

A nivel más concreto, con esta actividad se trabajan los siguientes objetivos específicos:

- Aprender a calcular la matriz asociada a una aplicación lineal *f* respecto de la base canónica dada de un modo no rutinario.
- Practicar la representación gráfica de Aplicaciones Lineales.
- Conocer mejor las características de las proyecciones, estableciendo una conexión entre la definición formal (simbólica) y la representación geométrica.
- Interpretar gráficamente el cociente $IK^3/ker\ f$ desarrollando diversos puntos de vista sobre él (como el espacio de las imágenes inversas de *f* o como colección de espacios paralelos al *ker f*).
- Ver isomorfismo entre *im f* y $IK^3/ker\ f$ y entender por qué está bien definido.
- Construir y recordar el diagrama de la Factorización Canónica.
- Reconocer la importancia de la notación en Matemáticas.
- Conectar distintas representaciones de las proyecciones y $IK^3/ker\ f$.
- Valorar la importancia de usar diversidad de representaciones.
- Desenvolver el lenguaje matemático formal y su escritura, en diálogo con la intuición.
- Aprender a trabajar en grupo.
- Desarrollar el nivel META de pensamiento matemático: aprender a hacerse preguntas para profundizar en un problema de clase, visualizarlo y después de resolverlo; reflexionar sobre lo aprendido, los procesos seguidos, los conocimientos necesitados y las dificultades encontradas.

En el diseño y la redacción del enunciado (Anexos) intervienen los siguientes elementos:

- Pasos dados por un resolutor experto para:
  - Representar gráficamente la proyección (a partir de la definición simbólica de clase) y familiarizarse con sus propiedades sobre cómo transforma el espacio (pensando en el cubo unidad) o su falta de sobreyectividad e inyectividad.
  - Construir un espacio que permita “arreglar” la falta de inyectividad de la proyección y darse cuenta de que es un EVC.
  - Identificar el isomorfismo que existe entre este nuevo EVC y la imagen de la proyección.
- La consulta de textos con construcciones similares tanto en dos como en tres dimensiones (Lin, 2005).
- Los principios de diseño (ver sección 4.1.4)
  - <u>Primer Principio de Diseño:</u> influye especialmente en la metodología escogida (se habla a continuación).
  - <u>Segundo Principio de Diseño:</u> se materializa en preguntar por argumentos geométricos cuando ya se tienen respuestas algebraicas, o por ambos a la vez si se construye algo nuevo (como en la Pregunta 4).

- Tercer Principio de Diseño: motiva la actividad y está detrás, junto al Segundo Principio de Diseño, del reconocimiento de la intuición[16] y de las preguntas que buscan un pensamiento geométrico.

La metodología escogida para trabajar esta actividad está basada en el Primer Principio de Diseño y en el ciclo didáctico que proponen las Teorías de Mediación Semiótica (ver Marco Conceptual, sección 3.2.2.4).

- Trabajo en grupos en la hora de clase: se propone que sólo una persona del grupo anote con objeto de favorecer la interacción y la explicitación de pensamientos, en particular, del manejo de la visualización.
- Trabajo individual y en grupos para elaborar la respuesta escrita: la distribución de los tiempos de trabajo (individuales o en grupos) durante las dos semanas siguientes dependen de cada grupo. Así se favorece la toma de decisiones y la autonomía. Los escritos producidos, que conllevan una organización y estructuración de ese trabajo, serán objeto de discusión en la fase siguiente.
- Tutorías por grupos: se plantea para producir los modelos de visualización asociados a la actividad y construir colectivamente un discurso matemático coherente. En éste debate, iniciado y mediado por el profesor, se espera una elevada participación de los estudiantes.

Junto al enunciado de la actividad, se entrega la "*Encuesta del Problema 7 con Ampliación*" (ver Anexos). Con este instrumento se atiende al último de los objetivos de la actividad, fomentando la reflexión sobre: el aprendizaje matemático desarrollado (procesos seguidos, conocimientos necesitados y adquiridos, dificultades encontradas); y el rol de la visualización en ese aprendizaje (imágenes mentales empleadas, dificultades derivadas del uso del pensamiento geométrico, peso de cada tipo de representación en la resolución del problema, su preferencia por lo visual). Las respuestas a la Encuesta complementan las dadas en la actividad y aportan información relevante para su revisión, como las valoraciones y percepciones de los estudiantes (preguntas 12 y 13).

Finalizamos este análisis previo resaltando algunos aspectos relevantes desde el punto de vista epistemológico y desde la ubicación institucional del problema (Figura 2. 19). La noción fundamental es el Primer Teorema de Isomorfía. Se ubica dentro de la Unidad de la Aplicaciones Lineales, pero tiene conexiones con unidades anteriores a través de los EVC. Esta noción tiene una gran potencial para hacer la transición de un tipo de concepciones más básicas sobre el cociente (como el Cociente como Partición o como Conjunto con Estructura Heredada) a otras más avanzadas (como la idea de Proyección, la de Eliminar Información que sobra o incluso la idea de Cociente como Preimágenes de una Aplicación Sobreyectiva), ideas necesarias para comprender futuros conceptos. En particular, introduce la noción de Cociente en Topología, aspecto algo descuidado hasta ahora en el Grado de Matemáticas (ver sección 4.3.1 sobre los EVC como concepto matemático).

[16] Las instrucciones del problema dicen: "*la intuición es válida, pero debéis esforzaros en justificar vuestros argumentos matemáticamente. Para ello podéis y debéis utilizar apuntes, libro…*". Esta frase reafirma las observaciones hechas en torno a la aplicación del Tercer Principio de Diseño (ver sección 4.2.4.1)

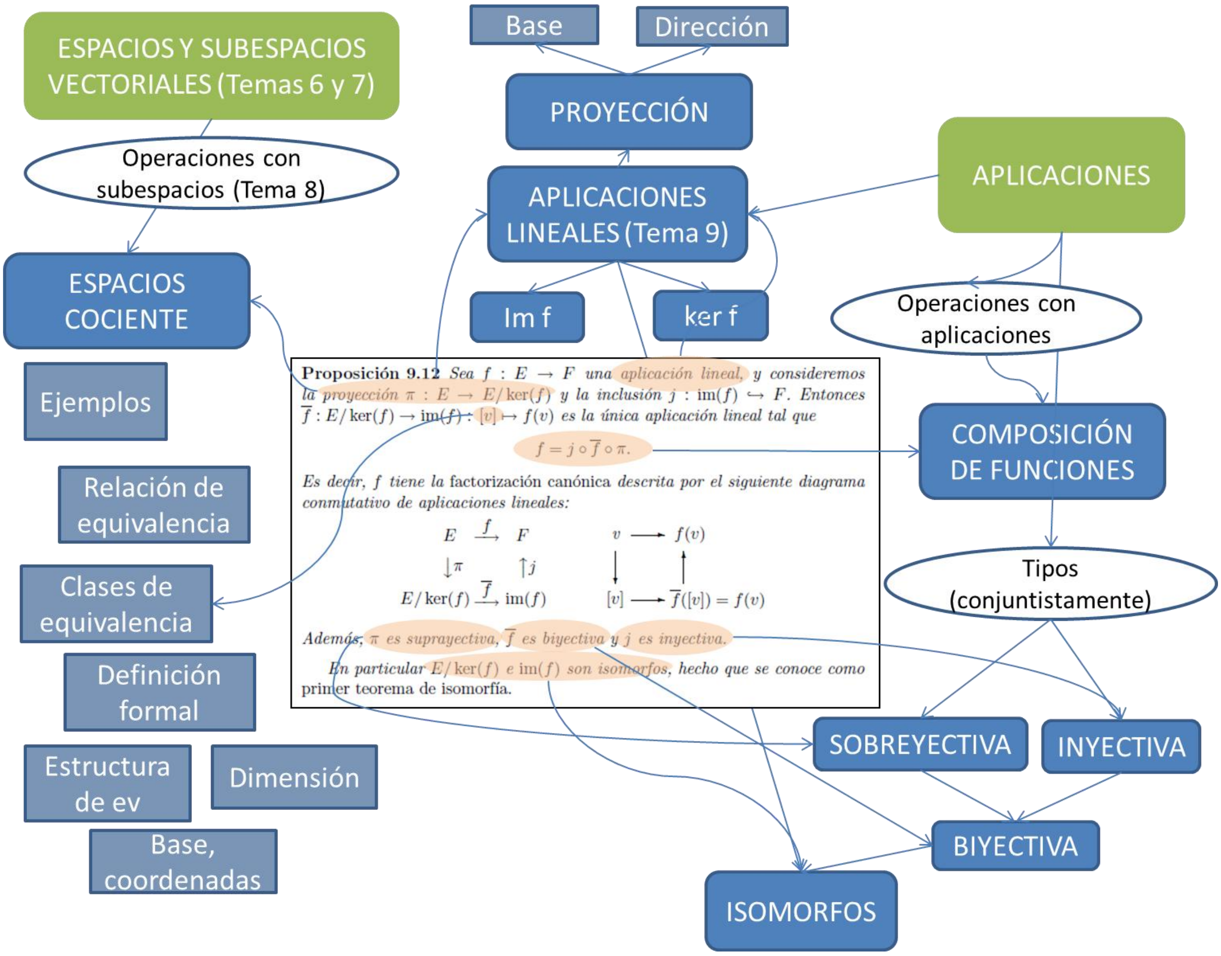


Figura 2. 19: Esquema delos aspectos relevantes de la actividad "*Problema 7 con Ampliación*" desde los puntos de vista epistemológico e institucional.

A continuación se describe el diseño de cada pregunta y la respuesta esperada de los estudiantes.

Problema 8.7

Inicialmente se contemplan dos caminos para encontrar la matriz respecto de la base canónica de la aplicación dada en el enunciado (Figura 2. 18).

Método 1: sin darse cuenta de que es proyección

Los datos del problema dan información suficiente para saber cómo se transforma una base diferente de la canónica. Después, haciendo un cambio de base se puede encontrar la matriz pedida fácilmente.

De la primera condición dada se obtiene la imagen del (1,0,0)

$$1)\ \ f\big((1,0,0)\big) \in L[(0,0,1)] \Longrightarrow \exists \lambda \in IK \ tal\ que\ f\big((1,0,0)\big) = \lambda(0,0,1)$$

De la tercera condición se puede calcular una base del *ker f*

$$3)\ \ker(f) = \{(x,y,z) \in IK^3 : x + z = 0\} \Rightarrow$$

$$B_{\ker f} = \{v_1 = e_2 = (0,1,0); v_2 = (1,0,-1)\}$$

Hecho esto hay dos opciones:

- Opción 1: Juntar estos tres vectores, se tiene una base de IK^3: $B = \{e_1 = (1,0,0);\ v_1 = (0,1,0); v_2 = (1,0,-1)\}$

$$M_f(B, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_f(\mathcal{E}) = M_f(B, \mathcal{E})C(\mathcal{E}, B)$$

$$M_f(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Opción 2: Darse cuenta de que $e_3 = e_1 - v_2$ y de ahí se obtiene, por ser f lineal, que $f(e_3) = f(e_1) - f(v_2) = \lambda(0,0,1)$. Por tanto,

$$M_f(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Para despejar λ basta con aplicar la segunda condición:

$$f^2 = f \Longrightarrow M_f(\mathcal{E})^2 = M_f(\mathcal{E}) \Longrightarrow \lambda^2 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 1$$

Este es el método esperado de resolución de los estudiantes, especialmente la Opción 2, que no involucra cambios de base.

Método 2: utilizando que es proyección

La condición *2* junto a la condición de linealidad de la f implica que ésta es una proyección de dirección $\ker f$ y base $imf = L[(0,0,1)]$ (pues este subespacio está contenido en la imagen y ésta debe tener dimensión *1*). Se tiene que

$$Imf \oplus \ker f = IK^3 \Leftrightarrow \forall u \in IK^3, \exists!\ v \in imf \text{ y } w \in \ker f \text{ tales que } u = v + w$$

En ese caso, por definición de proyección, $f(u)=f(v+w)=f(v)+f(w)=v$

Esto se puede aplicar para calcular la imagen de e_3, que es el único vector de la base canónica de quien no se conoce inicialmente la imagen. Como e_3 la forma única de escribir e_3 como un vector del núcleo y otro de la imagen es la de la opción 2 anterior ($e_3 = e_1 - v_2$), se vuelve a obtener $f(e_3) = f(e_1)$ y se puede terminar de razonar como en el método anterior.

Este razonamiento, aunque eminentemente algebraico, se considera más visual que el anterior al incluir la visión de la f como proyección. Es más complicado y no se espera que los estudiantes lo utilicen.

Pregunta 1

Pregunta 1. ¿Qué tipo de aplicación es? Representa gráficamente la función f. ¿Cómo transforma esta aplicación el espacio $\mathbb{K}^3$? Esto es, explica una forma geométrica de calcular la imagen de un vector u sin usar la matriz.

- Pista 1: Fíjate en el cubo cuyos lados son los vectores de la base canónica. ¿Cómo lo transforma f?
- Pista 2: Utiliza lo visto en la página 193 del libro para describir f sin necesidad de tomar coordenadas.

Figura 2. 20: Enunciado de la Pregunta 1 del "Problema 7 con Ampliación".

Un camino más visual de resolución que los dos anteriores pasaría por representar gráficamente la función y establecer una conexión con la definición formal de proyección (Figura 4. 69). Este es el objetivo de esta pregunta, en la que se obliga a los estudiantes a formarse una idea geométrica de cómo transforma la proyección el espacio. Se estima que los estudiantes no llegarán fácilmente a él. Al contrario, el método de representación esperado es punto a punto (calculando la imagen de algunos vectores vía la matriz de la aplicación). Pero éste no conduce necesariamente a la adquisición de la visión global que se busca en esta pregunta, necesaria para la construcción que sigue en la actividad. Para alejar a los estudiantes de este método, se pide explicar una forma geométrica de calcular la imagen de un vector *u* y se añade la condición explícita de que debe hacerse "*sin usar la matriz*". Se adjuntan dos pistas.

- La *Pista 1* estimula el razonamiento espacial sobre un objeto concreto como es el cubo unidad (para facilitarles esta labor se da un enlace de internet[17] con un applet).
- La *Pista 2* conduce al uso de la definición con lo que se espera que determinen la base y la dirección de la proyección, adquiriendo, de esta forma, la visión global de la transformación del espacio.

Pregunta 2

Las dos cuestiones siguientes van encaminadas a seguir profundizando en las propiedades de la proyección y a preparar la construcción posterior. También permiten profundizar en los hábitos y preferencia por lo visual de los estudiantes (dada la variedad de respuestas admitidas).

Pregunta 2. ¿Cómo es la imagen de f? ¿Es f sobreyectiva? En caso de que la respuesta sea positiva, explica por qué. En caso de que la respuesta sea negativa da un vector de $\mathbb{K}^3$ que no esté en la imagen.

Figura 2. 21: Enunciado a la Pregunta 2 del "Problema 7 con Ampliación"

Siguiendo el orden de las explicaciones de clase sobre la Factorización Canónica, se comienza por la sobreyectividad. La formulación abierta de la pregunta (Figura 2. 21)

[17] http://mathdl.maa.org/images/upload_library/4/vol5/latools/Transformer3D.html

propicia respuestas tanto visuales como no visuales. Por respuesta a "*¿cómo es la imagen de f?*" se aceptan desde descripciones en términos algebraicos –como hacer referencia a la dimensión, a una base o una ecuación– hasta descripciones más geométricas como escribir "*el eje z*" o incluso una representación gráfica. Lo mismo sucede con la argumentación de no ser sobreyectiva, que se deja abierta y que admite razonamientos tanto algebraicos como geométricos:

- Algebraico: se puede razonar diciendo que no es sobreyectiva porque la imagen tiene dimensión *1* y el espacio de llegada es IK^3 (con dimensión *3*), y dar cualquier vector no proporcional a *(0,0,1)*, que es una base de la imagen.
- Geométrico: se puede representar gráficamente el eje *z* dentro de IK^3, argumentar que "no llena" el espacio de llegada y elegir cualquier vector que no esté contenido en esa recta.

Hacemos notar que con la redacción del enunciado se recuerda a los estudiantes cómo deben responder cuestiones matemáticas (se habían observado dificultades al respecto): justificando formalmente en caso de respuesta afirmativa; dando un contraejemplo en caso negativo.

Pregunta 3

Pregunta 3. La función f no es inyectiva. ¿Por qué? Encuentra dos vectores cuya imagen sea la misma, por ejemplo $(0, 0, 0)$. ¿Cuántos vectores más hay con esa misma imagen? Enuncia una condición geométrica que cumplan todos los vectores que tienen por imagen $(0, 0, 0)$. ¿Qué nombre recibe este espacio?

Figura 2. 22: Enunciado de la Pregunta 3 de la actividad "Problema 7 con Ampliación".

Después de la sobreyectividad, y para introducir la construcción del Conjunto Cociente, se plantea la cuestión de la no inyectividad de la proyección. La pregunta comienza en la misma línea que la anterior, admitiendo respuestas de diversa naturaleza. La formulación no es abierta para ser coherente con las siguientes preguntas, que parten del hecho de que la aplicación no es inyectiva. Se pide justificación de esta afirmación y un contraejemplo de dos vectores con la misma imagen, por ejemplo *(0,0,0)*. Inicialmente se pensó en otro vector distinto del origen, como *(0,0,1)*, pero finalmente se prefiere centrar la atención en el núcleo de la aplicación (al jugar, después, un papel importante en la construcción del Cociente). Estos dos vectores con la misma imagen pueden elegirse tanto *algebraicamente* (atendiendo tanto a la ecuación del *ker f*) como *geométricamente* (a partir de su representación geométrica en forma de plano). Posteriormente se fija el modo de pensamiento geométrico pues, para la pregunta siguiente, interesa que se conciba el núcleo como un espacio formado, no sólo por dos, si no por infinitos vectores con la misma imagen –en este caso (0,0,0)– situados de manera específica en el espacio: formando un plano, que pasa por cero, y que se puede representar según su ecuación implícita dada en el enunciado del problema original (Figura 2. 22).

Pregunta 4

Esta pregunta prioriza la concepción de EVC como proyección que concentra el espacio por el que se cocienta en el cero. Como objetivo, también se trabaja el desarrollo del lenguaje MICRO/MACRO de la representación geométrica a través de la idea del zoom de "alejarse" y "acercarse".

Pregunta 4. Ahora colecciono todos estos vectores y (alejándome de esta imagen) consigo verlos como un solo elemento, el elemento cero, de otro espacio V. ¿Qué espacio es V? ¿Cómo son los elementos de V? Descríbelos geométricamente y algebraicamente. ¿Qué puedes afirmar de la dimensión de V?

- Pista 1: Para pensar geométricamente, si te ayuda, piensa en concreto. Escoge un elemento distinto del nulo de este conjunto V. Por ejemplo, volviendo a mirar los elementos de V de cerca, podemos escoger el elemento formado por los vectores cuya imagen es $(0, 0, 1)$. ¿Qué condición geométrica cumplen todos ellos?
- Pista 2: Para pensar algebraicamente, denota de alguna manera este elemento concreto de la Pista 1 escogiendo un vector de $\mathbb{K}^3$ que lo represente convenientemente. Ahora piensa cómo se relacionan el resto de vectores de este elemento con dicho representante.
- Pista 3 Para pensar en la dimensión de V, piensa en otro elemento más de V, por ejemplo el formado por los vectores cuya imagen es $(0, 0, 2)$. ¿Qué relación encuentras entre este elemento y el de la Pista 1?

Figura 2. 23: Enunciado de la Pregunta 4 del Problema 7 con Ampliación

La respuesta esperada a la pregunta "*¿qué espacio es V?*" es "*una Partición o un Conjunto Cociente*". El punto de partida para dar esta respuesta es bastante intuitivo, basta con haber entendido el Cociente como un modo de organizar en clases el espacio, de tal forma que éstas rellenan todo el espacio sin cortarse y cada elemento del espacio original pertenece sólo a una clase. Es decir, únicamente hace falta una concepción de los Cocientes como Partición o como Forma de Clasificar.

Las pistas son guía para favorecer la precisión y formalización, facilitan la descripción algebraica y geométrica de los elementos del espacio a construir. Éstas fomentan el pensamiento concreto como medio para ayudar a los estudiantes a situarse y familiarizarse mejor con el nuevo *V* y con sus elementos. Las descripciones que se esperan de éstos son del siguiente tipo:

- Geométrica: "*V* se obtiene al agrupar en la misma clase los vectores que tienen la misma imagen bajo *f*, esto es, los planos paralelos al núcleo de la aplicación" y se podría acompañar de una representación gráfica (**Figura 4. 100**). Como sugiere la Pista 1 puede llegarse a esta respuesta razonando de modo similar a como se hizo en la pregunta anterior, pero ahora con una imagen diferente, por ejemplo el *(0,0,1)*. Otro posible camino sería llegar a la descripción geométrica a través de la algebraica.
- Algebraica: "*V* se obtiene al agrupar en la misma clase los vectores que tienen la misma imagen bajo *f*, esto es, es la colección de las preimágenes de *f*" y se podría acompañar de una descripción más conjuntista, como la primera que se muestra a continuación, o más algebraica, como la segunda. La descripción conjuntista es más probable que surja directamente del modo en que se ha definido *V*, por

ejemplo fijando el vector de la imagen y pensando en los demás de su clase como sus preimágenes, como se propone en la Pista 2. Por el contrario, la algebraica provendría de plantear una ecuación a partir de la expresión de la f o bien de la descripción geométrica.

$$V = \{f^{-1}(u) \colon u \in imf\}$$

$$V = \{x + z = k\ , k \in IK\}$$

Pensar en la dimensión de *V* requiere un nuevo paso en la forma de concebirlo, ya que para que ésta tenga sentido se está dando a entender que tiene estructura de Espacio Vectorial. Sin entrar a dotar formalmente a *V* de dicha estructura, sí se quiere promover una reflexión en torno a la relación de dependencia lineal que existe entre dos clases distintas. Si esto se entiende, no debe resultar difícil pensar en él como en una recta vectorial y llegar a la conclusión de que el nuevo espacio tiene dimensión *1*. Así se da sentido a la representación MACRO. Para llegar a esta idea se propone, en la Pista 3, tomar dos clases distintas, la del *(0,0,1)* y la del *(0,0,2)*, y ver que dos veces cualquier vector de la primera clase vive en la segunda. Este argumento se puede generalizar para cualquier par de clases distintas.

Pregunta 5

Pregunta 5. ¿Encuentras alguna relación entre el espacio encontrado V y la imagen de la aplicación f? ¿Cuál? Representa en un diagrama las relaciones que existen entre la aplicación $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, el espacio V y el espacio imf.

- Pista: Define una aplicación ϕ que relacione los elementos de V y los de imf. ¿Qué tipo de aplicación es? ¿Qué nombre recibe?

Figura 2. 24: Enunciado de la Pregunta 5 del Problema 7 con ampliación

Este problema tiene por finalidad profundizar en las relaciones entre espacio e imagen de la aplicación y construir el diagrama de la Factorización Canónica, siendo capaz de interpretar visualmente cada uno de los elementos involucrados. Una vez visto el espacio *V* como una recta vectorial, donde los vectores de la imagen desempeñan un papel tan importante (sirven para dar nombre a cada una de las clases) se espera que resulte evidente la relación entre este espacio y la imagen de *f*. Esta relación resulta especialmente clara si se piensa en una representación MACRO del EVC: el conjunto *V* es la recta vectorial formada por los planos paralelos al *ker f* que van pasando por cada vector de la *im f*; si se consideran todos como puntos, queda una recta de vectores "gordos" casi idéntica al "eje z", que es la imagen de *f*; por tanto, se puede definir un isomorfismo entre ambos, el que asigna a cada plano paralelo el vector que tiene por imagen, esto es, el vector en el que corta al eje z.

La pista explicitada en esta pregunta va encaminada a que los estudiantes se hagan conscientes de que la aplicación debe estar bien definida. Ésta se forma enviando todos los vectores que comparten imagen a su imagen.

Al construir el diagrama de las relaciones entre los elementos con los que han estado trabajando en la actividad, se espera que hallen similitudes con el diagrama de la Factorización Canónica vista en clase. Aunque no se pide explícitamente, esta comparación sugiere la identificación entre V y $IK^3/kerf$, que sólo puede aceptarse como válida si se comprueba que la relación de equivalencia definida por *kerf* es la misma que "*tener la misma imagen*". Este último paso permite conectar la definición formal de EVC con todas las demás concepciones del concepto que se han manejado en la actividad: EVC como proyección, EVC como colección de preimágenes, EVC como el conjunto de espacios paralelos a uno dado. Puede resolverse por dos vías:

- Algebraicamente: dos vectores forman parte del mismo elemento de V si tienen la misma imagen, y si $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u-v \in ker\ f \Leftrightarrow u \backsim_{ker\ f} v \Leftrightarrow [u]=[v] \in IK^3/kerf$. Por tanto, esos dos vectores forman parte del mismo elemento $IK^3/kerf$. Como esto se cumple para todo elemento de V y de $IK^3/kerf$, ambos se tratan del mismo conjunto y de hecho, del mismo espacio vectorial.
- Geométricamente: dos vectores forman parte del mismo elemento de V si tienen la misma imagen, y si $f(u)=f(v) \Leftrightarrow$ *u y v están en el mismo plano paralelo al ker f* $\Leftrightarrow u+kerf=v+kerf \Leftrightarrow [u]=[v] \in IK^3/kerf$. Como esto se cumple para todo elemento de V y de $IK^3/kerf$, ambos se tratan del mismo conjunto y de hecho, del mismo espacio vectorial.

Aplicación de la actividad, tutorías y árbol del problema

La actividad se lleva a cabo en una de las clases prácticas de la Semana 7. Se hacen 4 grupos (de entre 4 y 5 miembros elegidos por cercanía en la clase) cuyo trabajo se graba en vídeo y audio (casi ninguno pasa del cálculo de la matriz). La entrega de las respuestas escritas está prevista para una semana después, pero a petición de los estudiantes, se alarga el plazo otra semana. Se acuerda con ellos un calendario para las tutorías (todos los grupos se presentan en el día acordado salvo el 4, con quienes se hace una semana después). La duración de las tutorías oscila entre un máximo de una hora y cuarenta minutos con el Grupo 2 y un mínimo de hora y cuarto con el 1 y 4. Se graban con una cámara y una grabadora de sonido.

Las líneas de generales de la mediación de la profesora-investigadora durante la tutoría se preparan con antelación, teniendo en cuenta las respuestas escritas de los estudiantes en las que se detectan niveles de comprensión y dificultades de cada grupo. A pesar de ello, se prevé que la interacción con los estudiantes y la construcción colectiva del discurso matemático, promovidos durante las mismas, obligue a tomar decisiones "in situ" que van más allá de esas líneas fijadas a priori. Para apoyar este proceso de mediación se diseña un instrumento específico, procedente de investigaciones sobre resolución de problemas, el *árbol del problema* (Morera, Souto, & Arteaga, 2011; Morera, 2013). Esta herramienta, pensada para ayudar al profesor a acompañar a los estudiantes durante la resolución de problemas facilita que cada uno llegue al máximo de sus posibilidades, resulta de especial utilidad en la mediación de problemas con visualización. El árbol del "*Problema 7 con Ampliación*" se elabora teniendo en cuenta el formato y la metodología elegidos para la actividad, sus objetivos, el análisis descrito a priori y las respuestas de los estudiantes (Figura 2. 25).

Análisis

Por último, describimos el análisis de los datos recogidos en torno a la actividad "Problema 7 con Ampliación". Los vídeos recogidos durante la hora de trabajo en clase resultan poco interesantes desde el punto de vista de la visualización y no se analizan. En contraste, las respuestas escritas por los estudiantes (incluyendo las de las Encuestas) y las grabaciones de las tutorías son datos clave en el análisis de la experimentación. Las Encuestas también se analizan.

Las *respuestas escritas* de los estudiantes se analizan en dos momentos: (1) antes de las tutorías, para prepararlas en función de la comprensión demostrada por el grupo; (2) durante el nivel de análisis reflexivo, en conexión con el análisis de las tutorías, para describir los resultados de cada grupo (ver sección 5.3.2). En cada fase se hace una lectura según los códigos que se manejan en ese momento y que, en el segundo caso, corresponde con los de la Figura 2. 13 para las representaciones y los de la Observación Participante de la Fase II para los modelos de visualización. Las respuestas de las Encuestas se numeran según el grupo al que pertenecen[18] y se recogen conjuntamente en un mismo documento (ver Anexos), facilitando así su consulta durante la interpretación de los demás datos.

Los *vídeos* (y audios en caso necesario) de las tutorías se analizan en dos pasos: (1) transcripción con el software *f4 media,* que facilita la detección de temas relevantes; (2) definición de citas y codificación con *Atlas.ti* (ver Figura 2. 26), que ayuda a comparar lo ocurrido en los distintos grupos y a obtener conclusiones más generales sobre la experimentación.

[18] Por ejemplo, la primera respuesta del Grupo 1 se numera como 1.1

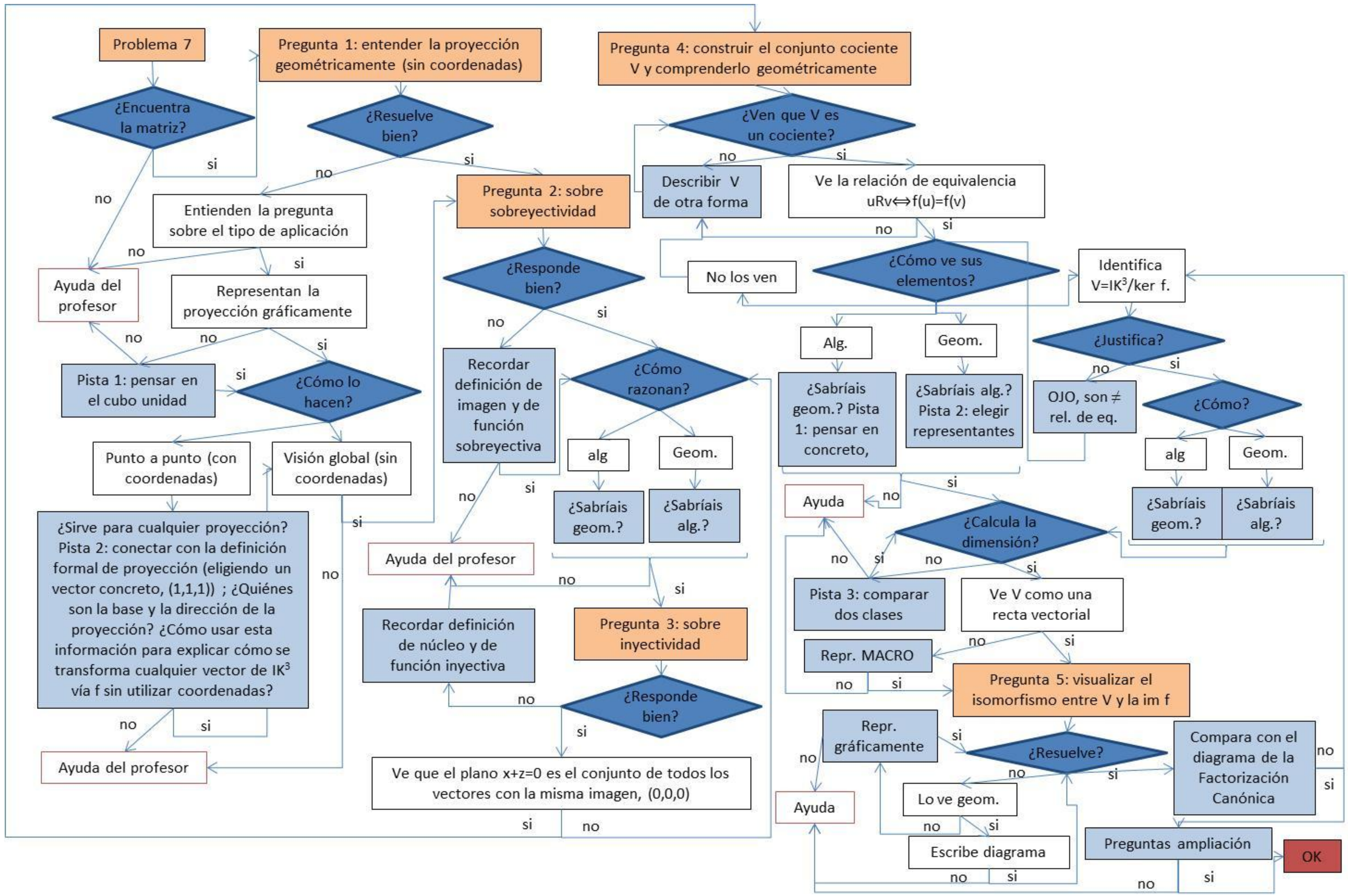


Figura 2. 25: *Árbol del problema para la actividad "Problema 7 con ampliación"*. El alumno debe ir avanzando por las ramas del árbol de pregunta a pregunta (marcadas en cuadrados color salmón). Este avance debe producirse de izquierda a derecha, y de arriba abajo (salvo excepciones). En los rombos azules y en los cuadros blancos se incluyen elementos que el profesor debe observar para decidir cómo va a mediar (cuadrados azul claro).

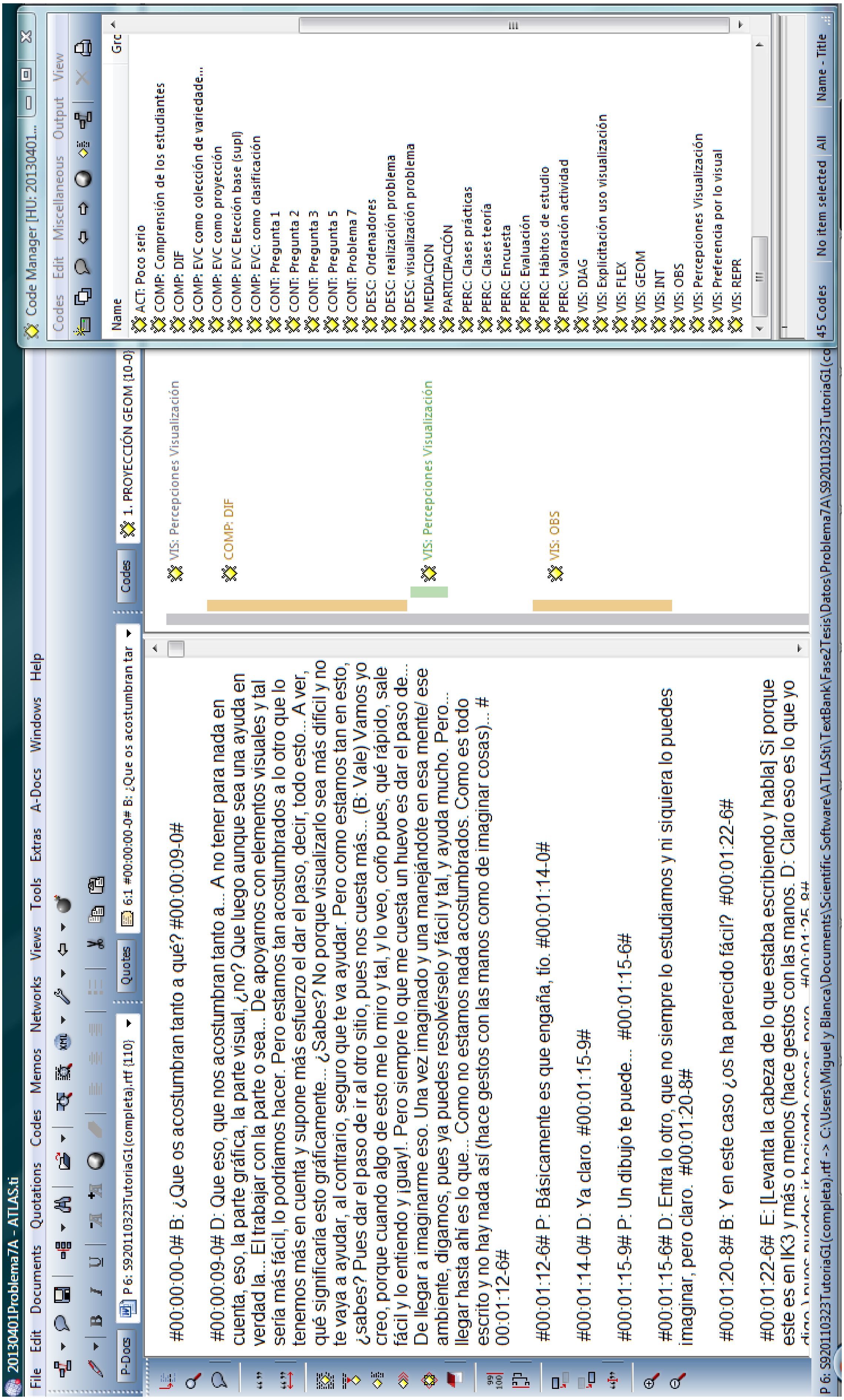


Figura 2. 26: Análisis con Atlas.ti de las tutorías del “Problema 7 con Ampliación”.

2.5 CALIDAD Y CUESTIONES ÉTICAS

2.5.1 Calidad de la Investigación

Van der Akker (2000) distingue tres criterios de calidad para las investigaciones de desarrollo –validez, incorporación a la práctica y efectividad– a los que añadimos la fiabilidad y la aplicabilidad.

En relación a la validez hemos considerado la dimensión interna y externa (Gravemeijer, 1994). Para la *validez interna*, distinguimos la del contenido y la de la construcción (Van den Akker, 2000, p. 10). La validez de contenido se consigue con la elaboración de un Marco Conceptual completo que revisa el conocimiento actual existente sobre el tema. La validez de construcción se asevera con una estrategia de investigación prolongada en el tiempo y e inspirada en el DR (organizada en fases cíclicas interdependientes y con una articulación entre teoría y práctica a través de distintos modelos).

La *validez externa* se ha llevado a cabo mediante el ajuste progresivo del tema a través de jueces. Durante la Fase I de preparación de la experimentación se ha conversado con profesores de AL de distintas nacionalidades (española, noruega e inglesa) sobre dificultades de los estudiantes y posibilidades del uso de la visualización en AL. El diseño de los objetivos y estrategia de investigación se ha sometido a juicio a través de la participación en diversos cursos de doctorado organizados por la Universitetet i Agder (UiA, Noruega), Universitetet i Oslo (Noruega) y Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). La publicación y la participación en diversidad de congresos internacionales, junto con la consulta a expertos en temas relacionados (ver Prefacio), también han servido para contrastar y evaluar los avances de la investigación con la comunidad investigadora.

La *fiabilidad* se logra gracias al uso de la variedad de fuentes provista por los criterios para la recogida de datos: redundancia, triangulación y sustituto más próximo. La comparación y complementariedad entre las distintas fuentes facilita la convergencia de los datos. Coincidimos con Schoenfeld (2000) en que "*cuantas más fuentes independientes de confirmación haya, más robusto será probablemente un descubrimiento (p.649)*".

La *incorporación a la práctica* se consigue al elegir una disciplina (AL) y un ámbito de estudio natural (un curso de primero de una Facultad de Matemáticas) habituales en contextos de estudios universitarios. Estos elementos hacen que la experimentación realizada pueda resultar interesante para otros usuarios. Para facilitar su *aplicabilidad* se detallan elementos del contexto, decisiones tomadas y se resaltan los resultados en mapas conceptuales. Para finalizar, consideramos que la *efectividad* de la investigación es limitada, principalmente por las restricciones impuestas por el contexto a un objetivo bastante ambicioso, como es la mejora de la enseñanza de la visualización.

2.5.2 Problemas y Dilemas en Development Research

En la literatura sobre DR se señalan algunos dilemas que surgen durante la investigación (Richey & Klein, 2005; Van den Akker, 2000). Conocerlos de antemano ayuda a tomar decisiones para controlarlos. Destacamos la tensión derivada de los diversos roles de la investigadora en el estudio y el problema de la generalización y la transferencia de resultados.

Primero, los *roles de la investigadora* a lo largo de la investigación varían según el grado de participación en el contexto. Inicialmente es sólo una observadora que interfiere poco en el campo. Sin embargo, a medida que aumenta la participación, el papel de investigadora y de profesora se integran pudiendo generar tensiones e interferir tanto en los datos como en su análisis. Para regular estos problemas se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las tensiones derivadas del rol de profesora-investigadora se dan si ambos papeles entran en conflicto. Éstas no tienen por qué ser negativas, pudiendo actuar como una fuerza equilibradora que ayude a producir intervenciones más adaptadas a la realidad (Van den Akker, 2000). Pero en caso de que lo sean, se prima el papel que menos perjudique a los estudiantes, normalmente el de profesora.
- La interferencia con los datos, en nuestro caso, se espera que vaya en un aumento de episodios y mensajes sobre la visualización que, lejos de resultar perjudicial, beneficia tanto a la investigación (ayudando a profundizar en el objeto de estudio) como a los estudiantes.
- La interferencia con el análisis se evita utilizando un punto de vista externo para la profesora B., cuyas acciones se narran en tercera persona, frente a un punto de vista interno para la investigadora, cuyas reflexiones se narran en primera persona.

Segundo, optamos por el estudio de una clase concreta y de un grupo reducido dentro de ella. La pérdida de *generalización* de los resultados obtenidos de este modo se compensa, no obstante, con una comprensión más profunda del objeto de estudio y con la posibilidad de generar hipótesis que den lugar a trabajos subsiguientes en este campo. A medida que el nivel de desarrollo y madurez de la intervención avance, es más fácil emplear métodos experimentales con un grupos mayores de estudiantes, que ayuden a medir la eficiencia de dicha intervención (Van den Akker, 2000, p. 11). La generalización de los resultados no es estadística sino "analítica", consistente en proporcionar suficiente información a los lectores –sobre el ámbito de estudio (Richey & Klein, 2005, pp. 27–28) y sobre el desarrollo de la intervención– como para que ellos mismos sean capaces de replicar la experiencia y evaluar así el grado de *transferencia* que ésta tiene en su contexto específico (Van den Akker, 2000, p. 12). Estas características, que forman parte de la justificación en el DR, dan rigor a los resultados pero también influyen en la extensión de esta Memoria (Gravemeijer, 1994, p. 453).

2.5.3 Consideraciones Éticas

Coincidimos con Goodchild (2008) cuando afirma que una "buena" investigación es aquella que nace del deseo de hacer mejor las cosas y que no sólo se preocupa de resultados sino también de los participantes involucrados. En nuestro caso, esto se consigue: enmarcando la investigación en un paradigma de Desarrollo Educacional; fomentando la colaboración (tanto profesores como estudiantes); y planteando una recogida de datos respetuosa con los actores involucrados y negociada con ellos. Se han recogido “consentimientos informados” donde se les comunica la naturaleza de la investigación y se les plantea su derecho a decidir libremente su participación en la misma, la garantía del anonimato y la confidencialidad de los datos recogidos (ver Anexos).

What is perhaps most important for researchers is to attempt to reveal and expose their underlying philosophical positions [...] so that others can locate and relate themselves to the perspective being taken. Theses and dissertations are expected to do this. It is probable good for everyone to work on the role of theory in their research, and to attempt to clarify the particular theories being called upon (Mason & Waywood, 1996, p. 1085).

3 MARCO CONCEPTUAL

Los antecedentes y fundamentos teóricos de la investigación se presentan en forma de Marco Conceptual, al ser esta estructura de argumentación y justificación la más coherente con el enfoque de investigación escogido (Eisenhart, 1991; Gravemeijer, 1994). Se organiza en torno a los tres tipos de teorías específicas del DR: Base Filosófica, Teorías Globales y Teorías Locales (ver Metodología, sección 2.2.1). En la *Base Filosófica* se expone la visión de la investigadora en torno a la naturaleza de las Matemáticas, cómo éstas se aprenden y cómo se enseñan. El planteamiento del problema y los objetivos de investigación, llevan a organizar las *Teorías Globales* en torno a tres pilares fundamentales (Figura 3. 1): la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas a nivel universitario; las representaciones y la comprensión de las Matemáticas Avanzadas; y la Visualización en EM. Finalmente, como se representa en la Figura 3. 1, las Teorías Locales concretan cada uno de estos temas al contexto específico del Álgebra Lineal (AL).

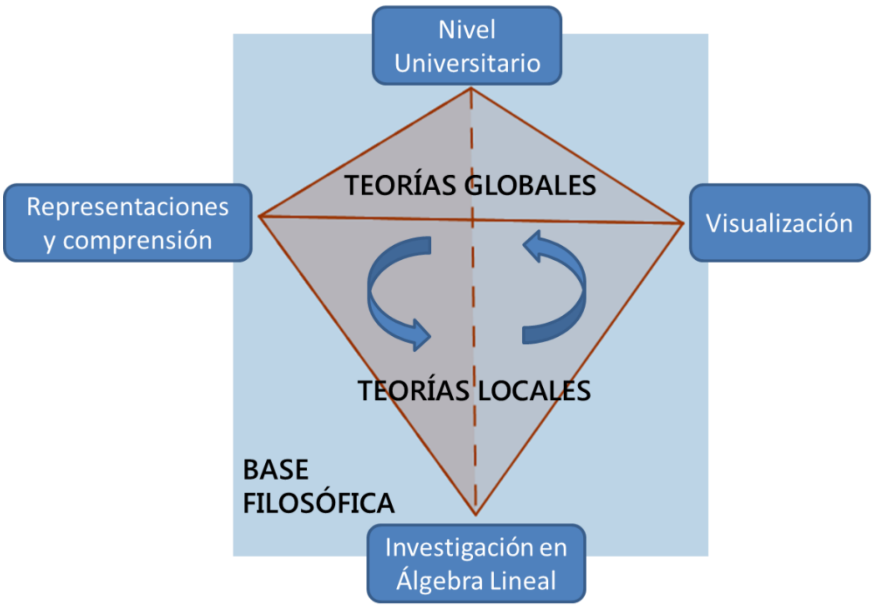


Figura 3. 1: Esquema de las Teorías Globales y Locales en esta investigación.

3.1 BASE FILOSÓFICA

Como se ha indicado, el trabajo del investigador –tanto a nivel de observador como de diseñador– está guiado por un conjunto de creencias e hipótesis, en general una "visión", sobre qué son las Matemáticas, cómo se aprenden y cómo se deberían enseñar. Esta visión, a la que se ha denominado *Base Filosófica*, funciona como un trasfondo teórico sobre el que se evalúan todas las actividades de instrucción (Gravemeijer, 1994). Al mismo tiempo, teniendo en cuenta que en ocasiones el papel del investigador y del profesor coincide, dicha visión guiará y condicionará las acciones del docente. Por eso, a pesar de que este punto de vista actúa normalmente de forma implícita, consideramos importante comenzar el Marco Conceptual realizando un esfuerzo por hacer explícitos algunos de sus elementos. De este modo, en coherencia con la metodología DR, esperamos contribuir a hacer más transparentes las decisiones tomadas durante el diseño, el desarrollo y la interpretación de los resultados de la investigación (Gravemeijer, 1994).

Los contenidos de este capítulo se presentarán de forma breve y general, ya que las nociones teóricas más específicas que forman el núcleo teórico de esta visión, llamadas *Teorías Globales*, se tratarán más adelante (Capítulo 3.2).

3.1.1 Visión sobre la Naturaleza de las Matemáticas

Mi visión sobre las Matemáticas ha ido tomando forma a través de las experiencias vividas en cada una de las distintas facetas en que convivo y he convivido con esta disciplina. Como estudiante a distintos niveles, y en especial durante la Licenciatura de Matemáticas, comprendí que esta ciencia, más que un compendio de fórmulas y números eran una forma de pensar y de hacerse preguntas que cambiaba mi modo de ver el mundo. Como investigadora en EM, en especial a través de lecturas sobre filosofía de las Matemáticas y PMA, entendí que las Matemáticas son una ciencia que el ser humano ha desarrollado de forma colectiva a lo largo de toda su historia, a través de procesos deductivos y de abstracción, y cuya comprensión, en ocasiones, entraña grandes dificultades. Finalmente, como profesora de cursos universitarios –tanto de Matemáticas como de formación de profesorado- trato de buscar actividades y conversaciones con las que contagiar a mis estudiantes el entusiasmo y la belleza que esta disciplina siempre ha despertado en mí.

Uno de los autores con los que más identificada me siento y que más ha influido en mi visión de las Matemáticas es Miguel de Guzmán. Para él las Matemáticas son a la vez (Guzmán, 1984):

a) Una ciencia con sus fines propios. Entre ellos la ordenación racional y lógica de los aspectos cuantitativos, en sentido amplio, de las estructuras reales y mentales.

b) Un arte, que consigue, al menos como premio añadido a su esfuerzo por alcanzar sus objetivos específicos, la creación de estructuras mentales profundamente bellas.

c) Un instrumento poderoso de exploración y transformación del universo (p.92).

En un sentido más amplio, y en concordancia con otros autores como Freudenthal (1971, 1973, citado en Gravemeijer, 1994, p.445), Guzmán habla de las Matemáticas como una *actividad humana*, el *quehacer matemático*. Las Matemáticas son esencialmente *actividad* porque son fundamentalmente un método de pensamiento para resolver situaciones-problema reales. Son *humanas* porque son seres humanos quienes las desarrollan, condicionados por las circunstancias culturales del momento, y sus hallazgos impactan en la filosofía, en la sociedad y en la historia de la humanidad. Por tanto las Matemáticas son tanto una actividad humana colectiva o *social* como una actividad constructiva *individual* (Cobb, Yackel, & Wood, 1992, p. 17) que consiste más en *saber hacer* que meramente en *saber*.

Esta visión de las Matemáticas choca con la que anteriormente era la visión más extendida en la comunidad de educadores matemáticos y que entiende las Matemáticas como un sistema de definiciones, reglas, principios y procedimientos que se deben enseñar como tal (Gravemeijer, 1994). De hecho, este enfoque aún pervive en muchos cursos universitarios y, en particular, se puede percibir tras alguno de los episodios observados en esta investigación. Esta tensión entre ambas visiones de las Matemáticas –la de la investigadora-profesora de prácticas y la del curso observado– está presente a lo largo de todo el estudio y se debe tener en cuenta en el desarrollo de actividades y de experimentos de enseñanza.

3.1.2 Visión sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

En Matemáticas, la forma principal de acceso a los objetos de estudio es a través de sus representaciones. Esto la distingue del resto de las ciencias (Física, Química, Biología, Astronomía) donde las representaciones que aparecen son imágenes o descripciones sobre ciertos fenómenos del "mundo real exterior". Por eso, tanto las representaciones como la visualización son esenciales para la comprensión en Matemáticas (Duval, 1999a). Desde este punto de vista, *comprender* un objeto matemático implica la construcción de una imagen mental rica, una estructura cognitiva que, entre otros elementos, incluya diversas representaciones del objeto y conexiones adecuadas entre ellas. Mediante esta imagen mental rica, el individuo que aprende es capaz de reconocer el objeto a través de sus diferentes representaciones logrando de este modo dar sentido al objeto. Así, *aprender* Matemáticas implica la construcción de esta imagen mental rica y *enseñar* involucra el ofrecimiento del estímulo y la guía necesarios para facilitar ese proceso de construcción.

Pero ¿cómo se debe proceder en la enseñanza y el aprendizaje para asegurar que dicho proceso de construcción tenga lugar en la mente del individuo? De acuerdo con la visión de las Matemáticas como actividad, expuesta en la anterior sección, este proceder debe implicar cierta práctica, la del "*quehacer matemático*". De acuerdo con Miguel de Guzmán:

> *La educación matemática se debe concebir como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, a la manera como el aprendiz de artista va siendo imbuido, como por ósmosis, en la forma peculiar de ver las cosas característica de la escuela en la que se entronca (Guzmán, 1993, p. 5).*

Es decir, el individuo aprende los fundamentos de la actividad matemática a base de verse inmerso en un entorno que promueva el contacto con ella y con su ejercicio. Este entorno se debe crear en el aula de Matemáticas, con sus propias normas de funcionamiento, y el modo de ejercicio debe ser similar al que el ser humano ha utilizado históricamente en su creación de ideas matemáticas o al que el matemático activo usa en la "matematización" de la parcela de la realidad a la que se dedica: a través del enfrentamiento con problemas (Guzmán, 1984, p. 95). Para que estos problemas faciliten la construcción de la imagen mental rica, deben incluir tareas que involucren diversas representaciones y promuevan la coordinación flexible entre ellas.

Sin embargo, sería un error pensar que este tipo de materiales va a permitir que el individuo, de forma autónoma, construya la imagen mental adecuada. La construcción de un determinado concepto a partir de cierto material puede resultar transparente para quien ya sabe el concepto, pero no necesariamente para quien lo está aprendiendo. Esto sólo ocurriría si presuponemos que el individuo que aprende ya sabe el concepto de antemano y se conoce como la "*paradoja del aprendizaje*" (Cobb et al., 1992, p. 4). Para superar esta paradoja es necesario tener en cuenta la faceta social de la actividad matemática. Así, aunque las interpretaciones de los aprendices y el experto derivadas de un cierto material diverjan, a través de una discusión matemática en la que se comuniquen y negocien las distintas interpretaciones, los aprendices pueden terminar de construir la imagen mental rica necesaria para la comprensión (Cobb et al., 1992). Por tanto, el método de enseñanza más adecuado y que mejor estimula la actividad matemática del individuo que trata de aprender es el basado en problemas –interesantes para él y que involucren diversidad de representaciones– acompañados de discusiones colectivas en las que éste puede contrastar su imagen mental con la de los demás y, en particular, con la del experto.

3.1.3 Resumen

En la visión que se acaba de exponer sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas se considera clave abordar simultáneamente la doble naturaleza –social e individual– de la actividad matemática ya que la construcción de las imágenes mentales, y por tanto de los significados, discurre tanto a nivel individual como colectivo. Si hubiera que situar dicha visión dentro de algún paradigma, encajaría en el *socio-constructivismo*. A través de la interacción social, el profesor y los estudiantes influyen mutuamente en su respectivo quehacer matemático de modo que los procesos de enseñanza y aprendizaje quedan estrechamente ligados en lo que de ahora en adelante llamaré *procesos de enseñanza-aprendizaje*. Con estos procesos buscamos crear oportunidades en el aula para que los estudiantes, en colaboración con el resto de la clase, reconstruyan en sus propias mentes los objetos y las prácticas propios de la actividad matemática. Como estas oportunidades dependen finalmente de las propias Matemáticas, nos preocupamos de darles a éstas un lugar fundamental en esta investigación.

3.2 TEORÍAS GLOBALES

En este capítulo se exponen los contenidos referidos a las *Teorías Globales* que conforman el núcleo de la visión que se acaba de exponer en la *Base Filosófica*. Se organizan en torno a tres pilares fundamentales de acuerdo a las preguntas y el planteamiento de la investigación:

- Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas a nivel universitario.
- Las representaciones y la comprensión de las Matemáticas.
- Visualización en Educación Matemática.

3.2.1 Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas a Nivel Universitario

En EM, el estudio del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas a nivel universitario es bastante reciente. El primer volumen importante publicado es de 1991: *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991). En el primer Handbook (Grouws, 1992), de un año más tarde, sólo aparece un capítulo referido a nivel de post-secundaria. Será en 1994 cuando aparece la primera serie de volúmenes de "*Research in Collegiate in Mathematics Education*" dedicado exclusivamente a EM a nivel universitario. Posteriormente, en 2001, se realiza el estudio del ICMI, "*The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. A ICMI Study*" (Holton et al., 2001). Más recientemente se publican destacados artículos que ofrecen una panorámica sobre el estado de la cuestión (Artigue et al., 2007; Harel, Selden, Selden, Gutiérrez, & Boero, 2006; Selden & Selden, 2001, 2005).

3.2.1.1 Problemática del Pensamiento Matemático Avanzado

Este estudio se sitúa en una Facultad de Matemáticas, y en particular en un Grado de Matemáticas. Uno de los principales objetivos de la enseñanza-aprendizaje en este contexto es lograr la comprensión de las Matemáticas Avanzadas por parte de los estudiantes[19]. Las primeras investigaciones realizadas a nivel universitario se interesan en describir y tratar de explicar las dificultades en áreas específicas de las Matemáticas que obstaculizan esta comprensión, dando lugar al desarrollo de diversas teorías cognitivas en torno a lo que se conoce en la literatura como el "*Pensamiento Matemático Avanzado*" (*PMA*). El libro del mismo nombre, editado por Tall (1991), ofrece una buena panorámica de estas teorías en sus estados iniciales y se tomará, junto al capítulo de Artigue et al. (2007), como principal fuente de referencia para este apartado.

Según Tall (1991) el PMA abarca un rango de actividades que van desde la consideración de un problema matemático hasta la última fase de refinamiento y demostración, pasando por la formulación creativa de conjeturas. Muchas de estas actividades pueden

[19] Aprovecho esta observación para hacer explícito el hecho de que esta investigación considera que el principal objetivo de la enseñanza-aprendizaje en la universidad es el desarrollo de futuros matemáticos. Artigue (2001) señala que esta consideración suele permanecer implícita y que eso podría estar contribuyendo a cierto fracaso en la mejora real de la formación de otro tipo de estudiantes que cursen matemáticas en la universidad con fines más profesionales. Esta última aproximación al problema podría dar un enfoque muy distinto a la investigación, pero no es éste el que se ha escogido.

encontrarse en el *"Pensamiento Matemático Elemental"* (PME), pero lo que diferencia a uno y a otro es la presencia en el PMA de definiciones formales y de procesos deductivos. Desde este punto de vista, uno de los principales problemas a nivel universitario es el exceso de énfasis en la demostración, como producto final del proceso, en lugar de introducir a los estudiantes en todo el proceso creativo; en palabras de Skemp: "*en las universidades se tiende a dar a los estudiantes el producto matemático pensado (product of mathematical thought) en lugar del proceso de pensamiento matemático (process of mathematical thinking)*" (Tall, 1991, p. 3). En la sección sobre "Innovación a Nivel Universitario" (3.2.1.3) se revisarán algunas investigaciones que confirman y revisan esta afirmación.

Entre las explicaciones dadas a estas prácticas están las relativas a cómo el matemático experto organiza la información en su mente (Weber, 2009; Wilkerson-Jerde & Wilensky, 2011). El experto es capaz de conectar grandes porciones de conocimiento en secuencias de argumentos deductivos. Esto facilita la categorización del conocimiento, al estructurarlo lógicamente, lo que lleva al experto a considerar que esta forma de presentación es la manera más adecuada para que el estudiante lo comprenda. Sin embargo, una presentación lógica formal de las Matemáticas no tiene por qué ser la más apropiada para el desarrollo cognitivo del estudiante (Tall, 1991, p. 7). De hecho, para lograr avanzar del PME al PMA es necesaria una transición significativa: desde la *descripción* a la *definición*; desde el *convencimiento* a la *demostración*; desde la *coherencia* de las Matemáticas Elementales a la *consecuencia* de las Matemáticas Avanzadas (basadas en entidades abstractas que el individuo debe construir a través de deducciones lógicas sobre definiciones formales). Esta transición requiere de una fuerte reconstrucción cognitiva, que tiene lugar en los primeros años universitarios (Tall, 1991, p. 20). ¿Cómo se produce dicha reconstrucción cognitiva en la mente del estudiante? ¿Puede aprenderse algo al respecto observando cómo establece y construye el experto el conocimiento matemático? La respuesta a estas preguntas ha dado lugar a las distintas teorías que se resumen en la siguiente tabla (Figura 3. 2).

TEORÍA	**CONSTRUCTOS TEÓRICOS FUNDAMENTALES**	**ADQUISICIÓN DE CONCEPTOS**	**DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES.**
Concepto imagen y definición Vinner y Hershkowitz (1980) Tall y Vinner (1981)	- *Concepto imagen:* estructura cognitiva individual formada por los dibujos mentales, las propiedades y los procesos asociados a un concepto. Se construye a través de la experiencia y no necesariamente de forma coherente. En cada situación concreta se activa una porción particular que se denomina el *concepto imagen evocado*. - *Concepto definición:* forma de palabras usadas para especificar un concepto. Puede ser personal o formal (institucionalizado dentro de la comunidad de matemáticos).	Consiste en la construcción de un concepto imagen rico y bien articulado (que incluya el concepto definición). Así se dota de significado al concepto en general, y a la definición en particular, de modo que ambos pueden emplearse de forma efectiva en resolución de problemas y en tareas de demostración.	Surgen cuando se posee un concepto imagen incompleto; cuando no se han establecido relaciones entre los distintos elementos o cuando se evocan dos partes del concepto imagen no coherentes entre sí. A menudo surgen cuando un concepto se introduce únicamente a través de su definición formal.

Obstáculos Cornu (1983) Brousseau (1997) Sierpinska (1985)		- *Obstáculo:* forma previa de conocimiento que es difícilmente generalizable pero resistente (ya que la experiencia lo ha mostrado útil en contextos sociales y/o educativos limitados) Pueden ser de distinta naturaleza: epistemológicos, cognitivos, didácticos	Se considera que el conocimiento científico no se construye como un proceso continuo, sino a través de reconstrucciones cognitiva provocadas por el rechazo de formas previas de conocimiento.	Provienen de la resistencia al cambio de algunas formas de conocimiento que son coherentes y han sido efectivas por un tiempo
Dualidad proceso/ objeto[20]	APOS Dubinsky, (1991) Dubinsky y MacDonald, (2001)	- *Acción*, *Proceso*, *Objeto* y *Esquema:* cuatro tipos de concepciones mentales diferentes asociadas a un concepto: - *Interiorización, Coordinación, Encapsulación*, *Generalización* y *Reversión*: tipos de acción de abstracción reflexiva[21] y que dan lugar a las distintas concepciones anteriores. - *Descomposición genética* de los conceptos: análisis teórico desde esta perspectiva que precede a cualquier diseño didáctico que se realice.	Comienza con la manipulación de constructos mentales u objetos físicos previamente construidos para formar *acciones*, éstas se interiorizan para formar *procesos*, que a su vez son encapsulados para formar *objetos*. Finalmente, acciones, procesos y objetos se organizan de forma más o menos coherente, en *esquemas*.	Para el PMA es necesario poseer al menos una concepción a nivel de objeto de los conceptos, pero muchos estudiantes no logran pasar de la concepción de proceso.
	Proceptual Tall y Gray, (1994)	- *Procepto*: amalgama de proceso y objeto. Lo que permite vincular las formas operacional (proceso) y estructural (objeto) de un mismo concepto matemático es el simbolismo matemático	Consiste en alcanzar la visión proceptual de los símbolos: comenzar con los procesos, para después fijar la atención en el producto del proceso, tomar conciencia de él como un todo y llegar al nivel proceptual	Surgen de la falta de flexibilidad por parte de los estudiantes en el manejo de los proceptos. Como ocurría para el caso anterior, los estudiantes suelen quedar anclados en la dimensión de proceso.

Figura 3. 2: Desarrollos teóricos en torno al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

Desde el punto de vista de la visualización, y en coherencia con la visión sobre la comprensión de los conceptos matemáticos expuesta en la *Base Filosófica*, la teoría que mejor se adapta a los propósitos de esta investigación es la de *concepto imagen/definición*. Esta teoría da forma a la idea de que comprender un concepto implica la construcción de una imagen mental rica en la que deben convivir de una forma coherente y bien articulada representaciones, procesos y propiedades de diversa naturaleza: ideas más intuitivas (adquiridas de experiencias previas) y nociones más formales (como puede ser la definición de dicho concepto) necesitan conectarse al conocimiento previo para poder ser debidamente incluidas en el *concepto imagen* –la imagen mental– del individuo. En este contexto, como argumentamos en la Introducción, la visualización se presenta como un importante recurso:

[20] Sfard (1991) define la *reificación* como un viaje individual desde una concepción **operativa** (proceso) hasta una **estructural** (objeto). Ella considera que ambos modos de pensamiento son duales y observa que las construcciones estructurales previas (objetos) sirven para construir nuevas concepciones operativas (procesos) (Selden & Selden, 2001, p. 241)

[21] La abstracción reflexiva (*reflexive abstraction*) es una noción introducida por Piaget y se refiere a una operación mental sobre representaciones mentales de alguna acción física que conduce a la identificación de esas representaciones mental como objetos en sí mismos (Dorier & Sierpinska, 2001, pp. 264–265).

> *In general it may be possible to use the complementary power of visualization to give a global gestalt for a mathematical concept, to show its strengths and weaknesses, its properties and non-properties, in a way that makes it a logical necessity to formulate the theory clearly. Visual ideas without links to the sequential processes of computation and proof are insights which lack mathematical fulfilment. On the other hand, logical sequential processes without a vision of the total picture, are blinkered and limiting. It is therefore a worthy goal to seek the fruitful interaction of these very different modes of thought (Tall, 1991, p. 18).*

Esta aproximación teórica enfatiza la definición formal. Sin embargo, en este estudio, la definición formal se contemplará como una forma más de pensar en el concepto –la institucional– y no como un elemento destacado del concepto imagen. Los procesos de enseñanza-aprendizaje también deben ofrecer diversidad de elementos que incorporar en el concepto imagen, asegurando la conexión adecuada en la mente del individuo. De este modo los aprendices podrán dar sentido al concepto y mirarlo desde distintos puntos de vista. Al mismo tiempo, esta imagen mental rica ofrece un nuevo punto de partida, cognitivamente superior, que hace posible avanzar hacia el PMA. En palabras de la teoría APOS (Asiala, Brown, Devries, Mathews, & Thomas, 1996), el concepto se *encapsula* para formar un *objeto* que puede incorporarse, de forma más o menos coherente, en un *esquema* y, en definitiva, en la imagen mental del individuo asociada a ese concepto. De ese modo, el individuo logra alcanzar mayores niveles de abstracción y avanzar en el desarrollo de su pensamiento matemático. En este sentido, parece más adecuado el término "*esquema conceptual*" propuesto desde los trabajos realizados dentro del proyecto "Procesos de pensamiento matemático avanzado" desarrollado por el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las CCEE de la UAB (Azcárate & Camacho, 2003; Moreno & Giménez, 1997; Romero, 1996). Éste término –*esquema conceptual*– será el que usemos en esta investigación, en lugar de *imagen mental*, para referirnos a la imagen mental rica que un individuo construye en su mente para poder pensar y dar sentido a un concepto matemático.

En este proceso de enseñanza-aprendizaje, que debe favorecer la construcción de esquemas mentales ricos, aparecen *obstáculos* de diversa naturaleza: epistemológica, cognitiva o didáctica (ver Figura 3. 2). Estos obstáculos deben identificarse (este es uno de los principales objetivos del Estudio Inicial) y tenerse en cuenta a la hora de diseñar secuencias didácticas. En la superación de dichos obstáculos consideramos especialmente importante el acento que pone la teoría *proceptual* en el manejo flexible de los símbolos, ya que la única forma de acceso a los conceptos matemáticos es a través de sus diferentes representaciones (ver sección 3.2.2).

3.2.1.2 Hacia Enfoques más Globales. La Transición de Secundaria a la Universidad

A continuación, dada la población de nuestro estudio, creemos pertinente explicitar algunas dificultades más globales relacionadas con el cambio de institución educativa que pueden afectar a la reconstrucción cognitiva. Esta problemática aparece en la literatura bajo lo que se conoce como '*la transición de Secundaria a la Universidad*'. La revisión de algunas investigaciones realizadas bajo el paraguas de esta 'transición' permite ampliar la visión de enfoques de investigación más cognitivos a enfoques más socioculturales y afectivos. En particular, Gueudet-Chartier (2008) ofrece una revisión y organización de estos enfoques desde los distintos puntos de vista con los que se ha tratado el problema, pues considera que éstos influyen fuertemente en el tipo de dificultades que se detectarán a priori (ver Figura 3. 3) así como en las consecuentes acciones didácticas que se propongan.

MARCOS TEÓRICOS, AUTORES	**CENTRO DE ATENCIÓN**	**VISIÓN DE LA TRANSICIÓN**	**DIFICULTADES A PRIORI**
PMA (Tall), APOS, FUGS	Modos de pensamiento	Paso específico a través de las diferentes fases para cada parte relevante del contenido matemático.	Debidas a que el contenido matemático difícil de adquirir y hay fases a las que no llegan los estudiantes.
Sierpinska (práctico/teórico) Lithner (RP, EE; IS[22]) Battie (dimensión organizativa/ operativa)	Organización del conocimiento y modos de razonamiento que usan los matemáticos expertos	Proceso a largo plazo de construcción y estructuración de distintos tipos de conocimiento y modos de razonamiento que necesita de la propia experiencia de los estudiantes, desarrollada con autonomía.	Derivadas de una falta de organización del conocimiento y de flexibilidad entre modos de razonamiento, que hace que los estudiantes queden limitados a un tratamiento técnico y no puedan abordar problemas complejos
Semióticas Enculturación Iannone y Nardi	Prácticas de la comunidad matemática, en particular, aspectos de la demostración y del lenguaje	Proceso largo de enculturación en el que los estudiantes deben habituarse poco a poco aun nuevo lenguaje y a unas nuevas reglas que no se hacen explícitas.	Producidas a consecuencia de la brecha entre las prácticas del instituto y la Universidad y observables en el uso de los signos, la sintaxis o en la falta de coherencia de un texto.
TAD, Praslon (2000) Castela (2004)	Trasposición didáctica y contrato didáctico	Consiste en diversos tipos de rupturas (entre ellas en el cambio de *contrato didáctico*) que se combinan y acaban provocando una profunda brecha (en particular en las expectaciones sobre los estudiantes).	Provocadas por el uso de una técnica de Secundaria inadecuada para una tarea universitaria, por la escasa autonomía y flexibilidad, o debidas a la falta de coherencia entre lo que se espera de los estudiantes y lo que se les pide hacer (tanto en los problemas como en las formas de evaluación).

Figura 3. 3: Enfoques empleados al tratar la transición entre enseñanza secundaria y terciaria (Gueudet-Chartier, 2008)

Si se observa la tabla de la Figura 3. 3 hay una diferencia importante entre la primera fila y las siguientes. La primera se centra más en el contenido matemático y justifica las dificultades de los estudiantes argumentando que la Matemática posee una dificultad intrínseca. El resto de las filas tienen en cuenta el aspecto humano de la actividad matemática y ponen la atención sobre las prácticas culturales e institucionales en las que el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene lugar. Esto hace posible detectar otro tipo de rupturas que pasarían inadvertidas bajo las lentes de las teorías del PMA, como por ejemplo rupturas: en los modos de organizar el conocimiento matemático (más rígido en Secundaria y más flexible en la Universidad), en los tipos de problemas que se plantean (más técnicos y prácticos en Secundaria y más complejos y teóricos en la Universidad), en las reglas y procesos de demostración (prácticamente inexistentes en Secundaria pero

[22] Lithner (2003, citado en Artigue, Batanero, & Kent, 2007) estudió las prácticas de los estudiantes. Vio que éstos empleaban la mayor parte de tiempo de estudio en casa en realizar ejercicios de los libros de texto y esto le llevó a distinguir tres formas de razonamiento en la resolución de dichos ejercicios: Razonamiento Plausible (RP), Experiencia Establecida (EE) e Identificación de Similitudes (IS). Dominaba el IS, habiendo apenas espacio para el RP.

necesarios en la Universidad); en el lenguaje y las reglas sintácticas que lo guían (completamente nuevos para los alumnos que ingresan en la Universidad), en el modo de trabajo (más guiada en Secundaria y más autónoma en la Universidad), en las expectativas de profesores y estudiantes (modeladas fuertemente por las formas de evaluación), etcétera. Por tanto, pone de manifiesto la necesidad de otros constructos teóricos que permitan hablar de este tipo de rupturas, más asociadas a la faceta institucional y social de la actividad matemática.

Entre estas teorías, la *Teoría Antropológica de la Didáctica* (TAD) tiene un papel destacado. Esta teoría se introduce en Francia por Chevallard al principio de los años 90 y se basa en la definición de cultura matemática en torno a la idea de *praxeologías*, que son las organizaciones matemáticas[23] que propone una cierta institución. Las instituciones, a través de elementos como el currículo oficial o los libros de texto, reconocen ciertos objetos y contenidos como matemáticos y se encargan de determinar lo que significa saber ese concepto. Este conocimiento matemático válido también se establece a través de reglas implícitas de comportamiento, responsabilidades y expectativas de los protagonistas de dichas situaciones didácticas, a las que Brousseau denominó *contrato didáctico*: "*Esos hábitos del profesor esperados por parte del alumno y esos comportamientos del alumno esperados por parte del profesor* (Brousseau, 1980, p. 180)". En este estudio se usa una noción más global que es la *cultura de clase* (Presmeg, 2006a).

PERSPECTIVA SOCIAL	PERSPECTIVA PSICOLÓGICA
Normas sociales de clase	Creencias sobre el propio papel, el papel de otros y la naturaleza general de la actividad matemática en la escuela
Normas sociomatemáticas	Creencias y valores matemáticos
Prácticas matemáticas de clase	Actividad y concepciones matemáticas

Figura 3. 4: *Un marco interpretativo para analizar la actividad individual y colectiva al nivel de clase* (Cobb & Yackel, 1996, p. 177). El paradigma socio-constructivista ofrece instrumentos para visibilizar normas y creencias de clase que pueden influir, aunque de forma implícita, en las prácticas de clase. Además, la distinción que aporta entre la naturaleza social o matemática de dichas normas y creencias puede tener ventajas añadidas de cara al análisis: las normas sociales de clase delinean la estructura de la participación en clase mientras que las sociomatemáticas establecen qué cuenta como una solución matemática diferente o eficiente, qué tipo de solución arroja más comprensión o qué es una explicación matemática aceptable.

La noción de "*contrato didáctico*" encuentra su equivalencia anglosajona en el *paradigma emergente* (o socio-constructivista) introducido por Cobb y su equipo (Cobb & Yackel, 1996). Este paradigma trata de integrar y coordinar las perspectivas psicológica y social o intervencionista para describir y desarrollar *prácticas de clase*, por lo que encaja especialmente bien con la metodología DR. A diferencia de la TAD, esta teoría apenas se ha empleado como marco interpretativo a nivel universitario, a pesar de que define instrumentos que, desde nuestro punto de vista, pueden ser muy útiles para describir dichas prácticas y que se resumen en el cuadro de la Figura 3. 4. El "*contrato didáctico*" estaría a caballo entre las dos columnas ya que, a través de las *prácticas* y las *normas de clase*

[23] Una organización matemática [T, τ, θ, Θ] se compone de cuatro elementos: el tipo de tareas, T, las formas de resolver esas tareas llamadas técnicas, τ, un discurso que explica y justifica esas técnicas llamado tecnología, θ; y las teorías que organizan y estructuran el discurso tecnológico, Θ.

(columna de la izquierda) se da forma a las *creencias individuales* de los estudiantes (columna de la derecha). Por tanto, al igual que la noción de "contrato didáctico", el paradigma socio-constructivista también ofrece instrumentos para visibilizar normas y creencias de clase que pueden influir, aunque de forma implícita, en las prácticas de clase. Además la distinción que aporta entre la naturaleza social o matemática de dichas normas y creencias puede tener ventajas añadidas de cara al análisis. Por todas estas razones, en esta investigación hablaremos de *normas* y *creencias* en lugar de utilizar el término "contrato didáctico".

Así pues, de acuerdo con estas teorías (tanto la TAD como el paradigma emergente de Cobb y su equipo), no tiene sentido analizar un problema didáctico de forma aislada. Deben tenerse en cuenta, además de las condiciones individuales, el contexto social y las prácticas institucionales que lo rodean. Desde este punto de vista, ambos enfoques hablan de *ecología* de las prácticas matemáticas. Para su estudio, la TAD introduce una jerarquía con los siguientes niveles (Barquero, 2011):

Civilización ↔ Sociedad ↔ Escuela ↔ Pedagogía ↔ Disciplina ↔ Dominio ↔ Sector ↔ Tema ↔ Concepto

Esta jerarquía sirve para situar de forma más clara esta investigación. En particular, este trabajo se sitúa en el *dominio* del Álgebra Lineal, en el *sector* de los Subespacios Vectoriales y las Aplicaciones Lineales y, finalmente, en el *tema* de los Espacios Vectoriales Cocientes y la Factorización Canónica. Este estudio se restringe a los niveles inferiores, excluyendo un contexto social más amplio.

Antes de pasar a revisar algunos de los resultados de investigaciones realizadas en torno a la innovación docente, hacemos una observación en torno a la idea de *flexibilidad*. La necesidad de la flexibilidad en el manejo de los conceptos matemáticos se ponía de manifiesto en teorías del PMA, como por ejemplo en las relacionadas con la dualidad proceso/objeto (Figura 3. 2). En la problemática de la transición, la *flexibilidad cognitiva* surge al comparar la actividad matemática del experto con la del estudiante. Ésta es la habilidad que permite al experto: pasar coherentemente de un modo de pensamiento a otro, de un tipo de lenguaje a otro, de un contexto matemático a otro, etcétera. La falta de desarrollo de esta flexibilidad cognitiva por parte del estudiante podría ser una posible respuesta a algunas de las rupturas, mencionadas con anterioridad, que éste sufre a su entrada a la Universidad. ¿Cómo fomentar el desarrollo de esta flexibilidad cognitiva en los estudiantes a través de las prácticas docentes? Esta cuestión se retomará en el capítulo de Teorías Locales (3.3), ya que es fundamental para la comprensión del AL.

3.2.1.3 Innovación a Nivel Universitario

Hasta ahora hemos descrito cómo el análisis de algunas de las dificultades que los estudiantes encuentran en el estudio de las Matemáticas en su entrada a la Universidad –procedentes tanto del contacto con el PMA como del fenómeno de la transición– ha dado pie a diversas teorías de investigación. Al mismo tiempo, los investigadores centrados en el nivel universitario han buscado estrategias alternativas de instrucción con las que tratar de superar dichas dificultades. Este interés ha estado motivado en parte por los resultados de investigaciones previas, que a menudo atribuyen dichas dificultades al tipo de enseñanza tradicional dominante. Sin embargo, recientemente estudios como los de

Weber (2004) reseñan la importancia de un análisis más profundo de las prácticas docentes y en la profundización en el estudio del conocimiento didáctico del profesor (Selden & Selden, 2001).

En este apartado se revisarán algunos de los resultados más relevantes en torno a estas tres ramas relacionadas con la innovación docente: propuestas de mejora y experimentos de enseñanza; estudio sobre las prácticas docentes actuales; y Conocimiento Matemático del Profesor.

Propuestas de mejora y experimentos de enseñanza a nivel universitario

Desde los inicios de la investigación a nivel universitario se han buscado formas alternativas de mejora. Entre ellas aparece con un papel destacado el uso de la visualización. Por ejemplo, en el prefacio del libro editado por Tall (1991) se postulan las siguientes aproximaciones, cognitivamente más apropiadas, de las que entonces se habían recogido algunas evidencias de éxito:

- *The participation of the student in the process of mathematical thinking through an active process of "scientific debate", rather than passive receipt of preorganized theory.*
- *The direct confrontation of the student with conflict which occurs in developing new theoretical constructs, to help them reflect on the problem and build a new, more coherent, cognitive structure.*
- *The building up of appropriate intuitive foundations for the advanced mathematical concepts, through an approach which balances cognitive growth and an appreciation of logical development.*
- *The use of visualization, particularly utilizing a computer, to give the student an overall view of concepts and enabling more versatile methods of handling the information.*
- *The use of programming to cause the student to think through mathematical processes in a way which can be encapsulated by reflective abstraction* (Tall, 1991, pp. xiv–xv).

Diez años después, Selden y Selden (2001) en su capítulo para el estudio del ICMI también se preguntan sobre los esfuerzos instructivos que podrían dar lugar a una comprensión "genuina" y, basándose en los marcos teóricos que la sustenta, señalan cuatro ejemplos (Figura 3. 5). En este panorama se echan en falta las aportaciones realizadas desde las teorías semióticas, que son fundamentales en esta investigación. Las propuestas de mejora realizadas desde estas teorías se caracterizan por poner especial atención al uso y al manejo del lenguaje y en particular de las representaciones. En la próxima sección (3.2.2) sobre "Representación y Comprensión" se prestará especial atención a este tema.

Los resultados de estas experiencias y las líneas señaladas por Tall (1991) sirven en esta investigación como inspiración para el diseño de experimentos y para enunciar algunos de los principios de diseño iniciales (ver sección 4.1.4). En particular, hemos considerado los resultados en torno a: la importancia de la resolución de problemas, las características que éstos deben tener (capaces de provocar conflictos cognitivos; fáciles de atacar en un inicio; desafiantes; con soluciones abiertas; y acompañados de un análisis previo); recursos interesantes para trabajarlos (visualización y uso de ordenadores); y formas de culturas de clase adecuadas para acercar el quehacer matemático a los estudiantes (trabajo colaborativo y debate científico). En el próximo capítulo (3.3) sobre Teorías Locales se analizarán experimentos didácticos particulares realizados dentro del área del AL con la intención de extraer ideas más específicas sobre cómo enseñar con eficacia esta disciplina.

EJEMPLOS Y TEORÍAS DE DISEÑOS DE INSTRUCCIÓN	DESCRIPCIÓN
Teoría APOS y el ciclo de enseñanza ACE (Actividades, discusión de Clase, Ejercicios)	Comienza con la *descomposición genética*, se diseñan situaciones desequilibradoras a las que los estudiantes se deben enfrentar, individualmente o en grupos, para tratar de dar sentido a esas situaciones y construir los conceptos. Se implementan a veces con libros de texto específicos que no incluyen respuestas a los problemas.
La Ingeniería Didáctica y el Método del Debate Científico	Basándose en investigaciones previas se diseñan situaciones que involucren alguna parte relevante de las Matemáticas; los estudiantes aprenden como resultado de la adaptación a esas situaciones. Con el Debate Científico se busca convertir la clase en una comunidad matemática donde los estudiantes conjeturen y discutan con poca participación del profesor. Para su implementación es necesario renegociar el 'contrato didáctico'
Educación Matemática Realista (Freudenthal) y las Teorías Locales de Instrucción	Se comienza diseñando una secuencia didáctica con situaciones en contextos "reales" donde hay cierto contenido matemático que los estudiantes deben matematizar, colaborativamente; de este modo emergen las Matemáticas abstractas. Esta secuencia didáctica se somete a un proceso iterativo que acaba dando lugar al desarrollo de Teorías Locales de Instrucción (ver sección 2.2.1) [24].
El Método Moore de enseñanza (surge de modo informal en U.S.; similitudes con la teoría de la Ingeniería Didáctica y el trabajo de Brousseau)	Se enfrenta a los estudiantes a demostrar problemas difíciles sin darles ninguna indicación, el profesor únicamente estructura el material y critica los esfuerzos de los estudiantes. Este método puede resumirse con la metáfora de que "para aprender a nadar lo mejor es tirarse a la piscina y tratar de flotar". Ha resultado útil para educar futuros matemáticos.

Figura 3. 5: Resumen de los ejemplos y teorías de diseños de instrucción (Selden & Selden, 2001, pp. 242–245).

Estudios sobre las prácticas docentes actuales en la Universidad

A menudo las experiencias descritas en el apartado anterior han sido experimentos aislados que no han durado en el tiempo. ¿Cómo lograr que las innovaciones se incorporen de forma duradera a las prácticas universitarias? Desde nuestro punto de vista, para lograr esta duración en el tiempo es necesario conocer bien el contexto en el que se están tratando de implementar esas mejoras. Esto implica entender cómo son las prácticas actuales de clase actualmente y por qué son de ese modo antes de realizar propuestas de mejora. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en niveles inferiores, esta línea de investigación ha sido poco explorada a nivel universitario (Weber, 2004). En el presente estudio se contribuye a esta línea de investigación tan necesaria.

El estilo de enseñanza dominante en los cursos universitarios suele referirse como *Definición-Teorema-Demostración* (DTD) (Weber, 2004). Este término aglutina las siguientes caracterísiticas: la enseñanza se organiza principalmente en torno a clases magistrales (que suelen tener una duranción de entre 50 y 55 minutos); la principal motivación de estas clases es transferir material nuevo a los estudiantes; este material se presenta en una

[24] Esta observación no debe llevar a inducir que esta investigación se sitúe dentro del paradigma de la Educación Matemática Realista. De hecho, como se verá, los materiales que se van a diseñar no parten de contextos reales. La única conexión con este paradigma es metodológica, ya que se ha elegido una metodología DR y ésta surgió dentro de la Educación Matemática Realista.

secuencia donde domina su naturaleza lógica (por ejemplo, las definiciones formales) frente a la intuitiva; además, aunque puede haber cierta interacción, el profesor lleva el peso de la clase y los estudiantes (que pueden ser desde 20 a 800) se suelen centrar en escuchar y tomar notas; finalmente, el objetivo final del curso es que los estudiantes aprendan Matemáticas, lo que se traduce en que sean capaces de producir demostraciones rigurosas sobre los conceptos matemáticos cubiertos (Slomson, 2010; Weber, 2004; Wood et al., 2007).

El estilo de enseñanza DTD, ha dominado los cursos universitarios durante mucho tiempo, y de hecho hay quienes opinan que el panorama apenas ha cambiado en los últimos 40 años (Slomson, 2010). Se podría pensar que el desarrollo de las nuevas tecnologías podría desplazar parcialmente la importancia de las clases magistrales y los seminarios, pero estudios recientes muestran que esto no es lo que está sucediendo (Wood et al., 2007). ¿Qué razones hacen que tantos matemáticos prefieran este método de enseñanza? Según Körner (2004) hay diversas razones para ello, todas ellas interconectadas entre sí:

- Una clase magistral presenta las Matemáticas como algo vivo, que se crea en tiempo real. Esto permite ir más despacio cuando el contenido es difícil y más rápido en las partes fáciles.
- Una clase magistral ofrece la oportunidad de la interacción. El profesor puede estar atento a su audiencia y dar una nueva explicación o una ilustración si ve que no se ha entendido bien.
- Un libro, por ejemplo, ofrece la oportunidad de incluir un punto extra más, mientras que las limitaciones en las clases magistrales hacen que éstas deban ceñirse a lo esencial.
- Una clase magistral abre la puerta a comentarios y juicios de valor más personales que pueden ser útiles para los estudiantes, como por ejemplo: "esto es útil pero necesario" o "me llevó tres días llegar a esto".
- Las Matemáticas se aprenden viendo hacerlas a expertos y luego imitándolos.
- Las clases magistrales no dan una comprensión completa de cierta parte de las Matemáticas, para ello hace falta enfrentarse a ella por una misma, pero ayudan a comenzar el camino hacia la verdadera comprensión (pp. 3-5).

¿Y los estudiantes? ¿Por qué deciden asistir a una clase magistral? Rodd (2003) añade que las clases magistrales son lugares donde se puede experimentar, como espectador, el "sobrecogimiento" y el "asombro" de las Matemáticas, la participación activa y un sentimiento de identidad y comunidad, de forma similar a como ocurre en un teatro. En 2011, en el grupo de EM a nivel universitario del CERME 7, Bergsten presentó un artículo cuyo título coincidía con esa pregunta (Bergsten, 2011). Este autor diseñó un cuestionario que le permitió concluir que, además de algunas de las razones anteriores, los estudiantes asisten a las clases magistrales porque: les facilita el estudio de los contenidos en comparación con la lectura solitaria del libro; les permite tomar notas; y les ayuda a saber qué es importante para el examen y qué no. Además, este cuestionario también ayudó a detectar elementos que los estudiantes valoran en una clase magistral como: la cercanía del profesor, la exhibición de ejemplos, explicaciones que ayudan a la comprensión, la claridad, un ritmo cómodo, la coherencia y un equilibrio adecuado entre teoría y métodos (Bergsten, 2011, pp. 1966–1967). Desde un punto de vista más práctico, Slomson (2010) en una sesión sobre clases magistrales de Matemáticas dirigida a profesores noveles de la universidad en el MSOR Network, señala que la opinión de los estudiantes también depende de quién imparta la clase y que en general prefieren a profesores que les hablen a ellos y no sólo a la pizarra, que interactúen con la clase y que den oportunidades de hacer preguntas (p.19).

Sin embargo, a pesar de su papel dominante, el estilo de enseñanza DTD también ha recibido un número considerable de críticas. Entre ellas se pueden destacar las siguientes: intimida a los estudiantes convirtiéndolos en oyentes pasivos en lugar de en aprendices activos, da a los estudiantes una idea equivocada sobre la naturaleza de las Matemáticas, esconde muchos de los procesos que se usan en el razonamiento matemático, niega a los estudiantes la oportunidad de emplear la intuición, es inefectiva para producir aprendizaje significativo (Bergsten, 2007; Weber, 2004, p. 117). Por tanto, se observa una aparente contradicción entre las opiniones de unos y de otros en torno a la eficacia del estilo DTD de enseñanza en general y sobre el uso de clases magistrales en particular. ¿Qué ocurre realmente en los cursos universitarios actuales? ¿Cómo se lleva a cabo la enseñanza? Paradójicamente, existe muy poca investigación en torno a este tipo de preguntas (Slomson, 2010; Weber, 2004; Wood et al., 2007).

Weber (2004), motivado por buscar respuestas a estas preguntas que se basen en evidencias y no en prejuicios, observa un caso particular de enseñanza en un grupo pequeño (de 16 estudiantes) con un profesor de un curso de Análisis Real. Este autor se encuentra, dentro del estilo DTD, con tres estilos de enseñanza que se organizan deliberadamente en la siguiente secuencia para ofrecer una base sólida de comprensión a los estudiantes: el *lógico-estructural*, el *procedimental* y el *semántico*[25]. Este resultado lleva al autor a afirmar que la instrucción DTD no es un paradigma único de enseñanza, si no que más bien consiste en una colección diversa de técnicas que comparten algunos rasgos comunes (p.131). Otros autores también se han ocupado de tratar de caracterizar esta diversidad dentro del DTD. Por ejemplo, Saroyan y Snell (citado en Bergsten, 2007) han detectado tres tipos de clases magistrales: *guiadas por el contenido*, *guiadas por el contexto* y *guiadas pedagógicamente* (p.49). Y se verá más adelante que también hay diversidad en los modos de representación empleados en las clases magistrales.

En su investigación, Weber (2004) no sólo se interesa por el *cómo* enseña el profesor que observa, sino también en el *porqué* de su actuación. Tras entrevistar al profesor, este autor concluye que éste elige el paradigma DTD por buenas razones y no por desinterés, arrogancia o inseguridad como se señala en otras investigaciones (p.131). Este profesor elige DTD porque, de acuerdo con sus creencias, es bueno para aprender Matemáticas. Finalmente, este resultado conduce a Weber a afirmar que no basta con diseminar métodos alternativos de enseñanza entre los docentes universitarios. Por el contrario, para producir un verdadero impacto en el modo de enseñanza, los profesores deben elegir

[25] En el estilo *lógico-estructural* se utiliza un modo de trabajo estrictamente formal, sin discusión del significado de los términos que se estudian. El estilo *procedimental* se centra en completar los detalles técnicos de tareas de demostración, mientras que con el estilo *semántico* se tratan de resaltar los significados intuitivos de los conceptos usando, por ejemplo, diagramas que apoyen la argumentación. (Bergsten, 2007, p. 51)

emplear dichos métodos y hacerlo de forma efectiva. Así, este autor concluye afirmando que, desde su punto de vista, el único modo en que se puede lograr este impacto es involucrando a matemáticos y a educadores matemáticos en una negociación mutua en torno a los objetivos de los cursos de Matemáticas Avanzadas y a creencias adecuadas sobre EM (p.132).

Otro tipo de investigaciones son las que se preocupan por la calidad de las clases magistrales, donde el término *calidad* se refiere a la existencia de una conexión entre la enseñanza realizada y el aprendizaje de los estudiantes producido (Bergsten, 2007, p. 49). Bergsten (2007), basándose en la observación de un caso particular de una clase magistral de Análisis, expone un modelo triangular sistémico que engloba los aspectos críticos de la calidad de una clase magistral en Matemáticas. Estos elementos son: la *exposición matemática* (que desglosa en *Institucionalización*, *Contenido Matemático* y *Procesos Matemáticos*), los *criterios generales* y la *inmediatez didáctica* (*teacher inmediacy*) (Bergsten, 2007). En esta línea sobre la calidad de la enseñanza, aunque en un plano más práctico, hay trabajos dedicados a describir casos de "buenas prácticas" en clases magistrales (ver Krantz (1999), citado en Bergsten, 2007, p. 50) y se han encontrado también documentos en los que se recogen una serie de consejos, basados en las propias experiencias, sobre cómo impartir (Churchill, 2003; Slomson, 2010) o sobre cómo asistir (Körner, 2004) a una lectura de forma más efectiva.

Finalmente, en una línea de investigación más próxima al presente estudio, Wood et al. (2010), se fijan en aspectos de las clases magistrales relacionados con el lenguaje. Detectan distintos modos de representación empleados por el profesor en las clases magistrales: lenguaje oral, lenguaje escrito, notaciones matemáticas, diagramas visuales. El profesor organiza la atención de los estudiantes a cada modo a través de pistas verbales y no verbales, aunque también hay evidencias de que en ocasiones se dejan pasar oportunidades de conectar diversos modos de representación. Estos autores señalan que esta mediación que realiza (o debería realizar el profesor) entre las distintas modalidades es clave para lograr un buen desarrollo del concepto imagen y, por tanto, una buena comprensión matemática (p.4). Como elementos clave de dicha mediación señalan, además de las propias representaciones, breves acciones como un contacto visual, pausas significativas o gestos con los brazos; historias personales, imágenes, modelos y metáforas; o incluso el sentido de humor (p.5).

Las investigaciones referidas hasta ahora se han centrado principalmente en las clases magistrales y muestran que, más allá de prejuicios y simplificaciones, éstas son un tema complejo que aún está muy poco explorado. Hay otro tipo de sesiones que también desempeñan un importante papel en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a nivel universitario: los *seminarios* o clases de problemas y las *tutorías*. Éstos aparecen mucho menos en la literatura pero, en nuestra opinión, son tan importantes o más que las clases magistrales para el aprendizaje de los estudiantes. Como se verá más adelante y como algunas investigaciones demuestran, son un fuente rica de datos que puede arrojar luz en la comprensión de procesos de enseñanza-aprendizaje (Jaworski, Nardi, & Hegedus, 1999, p. 121). En el presente estudio, el análisis de clases prácticas ofrece un valioso medio para la observación del impacto que algunas de las clases magistrales tiene sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Conocimiento Matemático del Profesor

En general se piensa que, para enseñar, basta con entender bien los contenidos que se deben explicar. Sin embargo, no está claro en qué consiste exactamente ese buen entendimiento. A mediados de los 80 se revitalizó el interés por la conceptualización de qué tipo de conocimiento del contenido debía tener el profesor (Ball et al., 2008, p. 389). Esto se produjo principalmente gracias a los trabajos de Shulman y su equipo en torno a lo que ellos denominaron el "paradigma ausente" (*missing paradigm)*, que precisamente recibe este nombre porque hasta ese momento el tratamiento del contenido había estado muy descuidado en los estudios sobre conocimiento del profesor (Ball et al., 2008, p. 390). Tiene tres componentes, siendo la tercera la que mayor influencia tuvo:

- Conocimiento de la materia (*Subject Matter Knowledge,* SMK[26]): no sólo es importante tener conocimiento de los hechos, teorías, modelos o conceptos de un dominio (*conocimiento substantivo*) sino que también es necesario comprender su estructura, es decir, los procesos por los cuales las teorías y los modelos se generan y se establecen como válidos (*conocimiento sintáctico*) (Petrou & Goulding, 2011, p. 11).
- Conocimiento del currículo: programas para enseñar una asignatura a un determinado nivel, la variedad de materiales de enseñanza disponibles en relación a esos programas (donde se incluyen los libros de texto) y el conjunto de características que sirven tanto de indicaciones como de contraindicaciones para utilizar cierto currículo o materiales en circunstancias particulares (Petrou & Goulding, 2011, p. 11). Se distingue entre *currículo horizontal* (se refiere a los currículos de otras asignaturas paralelas a la dada) y *vertical* (se refiere a los temas y problemas enseñados en los años anteriores y posteriores que se relacionan con la materia que se enseña) (Ball et al., 2008, p. 391)
- Conocimiento Pedagógico del Contenio (*Pedagogical Content Knowledge,* PCK): es el conocimiento único de los profesores, va más allá del SMK.

  > *That special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding [...] It goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter knowledge for teaching (Shulman, 1986, p. 9 citado en Petrou & Goulding, 2011, p. 11).*

En la actualidad, muchos investigadores se han ocupado de desarrollar estas ideas que permiten tender un puente entre el conocimiento del contenido y las prácticas de enseñanza. Al principio el enfoque era más teórico –lo que condujo a cierto estancamiento– pero en la última década se han definido modelos (ver Figura 3. 6) que basados en evidencias empíricas –obtenidas principalmente de clases de Primaria y Secundaria y de cursos de formación de profesorado– han logrado ampliar crecientemente la utilidad y el alcance de este tipo de estudios (Ball et al., 2008, p. 389).

[26] En esta sección, aunque traducimos los nombres de los tipos de conocimiento al español, mantenemos las siglas en inglés porque su uso en este idioma está muy extendido.

	Shulman		Fennema & Franke	MTLT y LMT[27] (Ball)		SKIMA
Componentes del modelo	- Conocimiento pedagógico general - Conocimiento de las características de los estudiantes - Conocimiento del contexto educativo - Conocimiento de los propósitos y valores educativos		- Conocimiento de la Pedagogía - Creencias de los profesores			
	- <u>Conocimiento del contenido</u> → (SMK) - <u>Conocimiento del currículo</u> - <u>Conocimiento pedagógico del contenido</u> (PCK)	**El paradigm ausente**	- Conocimiento del contenido - Conocimiento de la cognición de los estudiantes	- Conocimiento Común del Contenido (CCK) - Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) - Conocimiento del Contenido en el Horizonte (HCK) - Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) - Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) - Conocimiento del Contenido y el Currículo (KCC)	SMK PCK	Fundación Transformación Conexión Contingencia
Críticas positivas	PCK, noción que tiene el poder de reconocer unos contenidos únicos para la enseñanza		Reconocimiento de la naturaleza dinámica e interactiva del conocimiento	Refinamiento del SMK y PCK y clarificación de su distinción Progresos en: desarrollar modos de medir el Conocimiento Matemático del Profesor; identificar relaciones entre éste y los logros de los estudiantes.		Herramienta útil para clasificar formas en que SMK y PCK se relacionan y aparecen en clase Diversos usos en investigación
	Idea común de que saber cómo piensan y aprenden los estudiantes es central en una enseñanza efectiva					
Retos	Necesidad de expandirla a otros tipos de enseñanza[28] Visión estática del conocimiento con poca influencia de las creencias y el contexto Poco operativo para investigar		Metodología que englobe las interacciones y el desarrollo de los tipos de conocimiento y reconozca el papel del contexto	Falta de reconocimiento de la importancia de las creencias SCK, noción poco clara que se confunde con el PCK		No inclusión de libros de texto y del conocimiento sobre el currículo

Figura 3. 6: Resumen de la revisión crítica de modelos para el Conocimiento Matemático del Profesor de Petrou y Goulding (2011).

Hacemos notar la escasa repercusión que la noción de PCK ha tenido a nivel universitario. Una posible causa de esta falta de estudios podría ser la no existencia de espacios en los que aplicar este conocimiento (ya se ha mencionado que la observación de clases de Universidad es algo relativamente reciente y es raro encontrar cursos de formación de profesorado universitario). A pesar de ello, algunos autores los consideran relevantes para la mejora de la enseñanza universitaria:

[27] Siglas para el nombre de los proyectos de Ball y su equipo: "*The Mathematics Teaching and Learning to Teach Project*" (MTLT) y el "*Learning Mathematics for Teaching Project*" (LMT)

[28] Consideramos que este modelo supone una enseñanza en la que el papel del profesor es transmitir el conocimiento matemático y ayudar a los estudiantes a adquirirlo, dejando de lado otros tipos de enseñanza como los basados en resolución de problemas o en los que los estudiantes, de forma autónoma, construyen su propio entendimiento de los contenidos (Petrou & Goulding, 2011, p. 12)

> *Could some research be directed towards generating pedagogical content knowledge, e.g., how to teach the Chain Rule or an explanation of why some university students persist in adding fractions incorrectly? Such knowledge can be a major part of the pre-service teacher curriculum, but there is a dearth of it at the tertiary level. Perhaps some mathematicians would be interested in discovering and analyzing pedagogical content knowledge by conducting small teaching experiments, thereby making a contribution without having to delve deeply into the theoretical aspects of mathematics education research (Selden & Selden, 2001, p. 250).*

Este enfoque experimental es el que se toma, en esta investigación, para realizar una aportación de mejora de la enseñanza a nivel universitario basada en el conocimiento del profesor. Al contrario que muchas investigaciones desarrolladas dentro de este contexto, aquí no pretendemos profundizar en aspectos teóricos de los diversos modelos, ni describir o medir el impacto entre el conocimiento de los profesores y el aprendizaje de los estudiantes. Tampoco podemos utilizar estos conocimientos para desarrollar programas de enseñanza a futuros profesores. Únicamente usamos las herramientas que algunos de estos modelos nos dan para explorar, descubrir y analizar –a través de la observación de clases, el análisis de libros de texto y el diseño e implementación de situaciones experimentales– el conocimiento necesario para enseñar a visualizar algunos contenidos de AL (en particular, los EVC). Creemos que la utilización de este enfoque puede resultar especialmente efectiva para la mejora de la enseñanza a nivel universitario porque pone el énfasis en los contenidos de Matemáticas. Éste es un ámbito en el que los profesores de Universidad se sienten cómodos. Pero como se trata desde un punto de vista más amplio de lo habitual, consideramos que puede ayudar a crear un espacio integrador de diálogo entre la comunidad educativa y la matemática.

Desde este punto de vista, el modelo que resulta más operativo es el de Ball y su equipo (2008) para el "Conocimiento Matemático del Profesor" (*Mathematical Knowledge for Teaching,* MKT), que definen como "*el conocimiento matemático necesario para desarrollar el trabajo de enseñar Matemáticas* (p.395)". Teniendo en cuenta algunos comentarios a este modelo (ver la Figura 3. 6), realizados por Petrou y Goulding (2011) en su capítulo del libro "*Mathematical Knowledge in Teaching*" (Rowland & Ruthven, 2011), se propone la taxonomía de la Figura 3. 7 que sintetiza: las componentes del *paradigma ausente* de Shulman (cuadros con letras negras mayúsculas y fondo rojo), las cuatro componentes de otro modelo debido a Fennema y Franke (cuadros con letras negras minúsculas y fondo blando) y las componentes de la famosa elipse de Ball y su equipo (cuadros azules con letras minúsculas blancas).

Desde el punto de vista de la enseñanza de la visualización este marco también resulta prometedor como herramienta de análisis. La idea de '*enseñar a visualizar*' se introdujo como ese *algo más* que hay que hacer en clase para que los estudiantes desarrollen una capacidad de visualización que les ayude a comprender mejor las Matemáticas (ver Introducción, sección 1.1.3). De este modo, para ser capaz de enseñar a visualizar será necesario un conocimiento que vaya más allá del mero conocimiento del contenido que se enseña, y esa es precisamente la raíz del *PCK*. De hecho, el uso efectivo de representaciones, analogías, ilustraciones, ejemplos y, en definitiva *visualizaciones*[29], aparece como una de las dimensiones fundamentales del *PCK:*

> *Shulman (1986) defined PCK as comprising: "The most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations—in a word, the most useful ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others" (Ball et al., 2008, p. 391).*

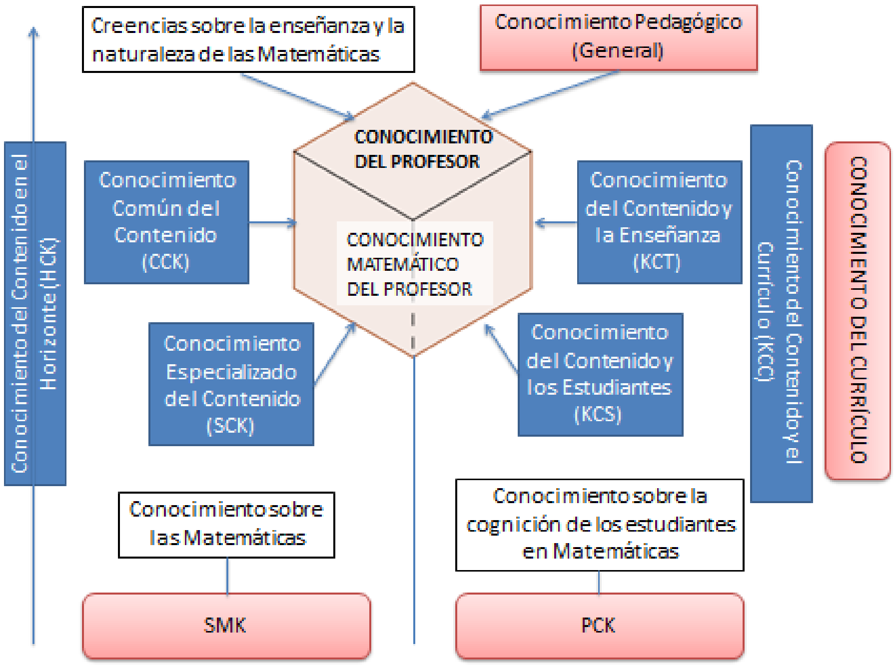


Figura 3. 7: *Taxonomía del Conocimiento Matemático del Profesor para esta investigación basada en una síntesis de los modelos de Shulman, Fennema y Franke, y Ball y su equipo*. Para la interpretación del diagrama se deben tener en cuenta algunas observaciones. Primero, se hace notar que el modelo de Ball y otros es exclusivo para el conocimiento matemático, por lo que se ha considerado apropiado complementarlo con dos componentes más generales del modelo de Fennema y Franke: las creencias y el conocimiento pedagógico (que se corresponde con el Conocimiento Pedagógico Genera[30]l de Shulman y por eso se ha marcado en rojo). Segundo se ha identificado, por un lado, el SMK con el Conocimiento sobre las Matemáticas siguiendo a Petrou y Goulding (2011), y por otro, el PCK con el Conocimiento sobre la cognición de los estudiantes en Matemáticas[31]. A su vez, el SMK se divide en CCK y SCK y el PCK en KCT y KCS, siguiendo a Ball y otros (2008). Tercero, el KCC (que se ve como una subcategoría del Conocimiento del Currículum de Shulman) se ha situado a la derecha porque Ball y su equipo lo consideran parte del PCK, pero se ha orientado verticalmente para reflejar sus dudas sobre si debiera ser una categoría transversal o incluso independiente (Ball et al., 2008, p. 403). Algo similar ocurre con el HCK (según Petrou y Goulding (2011, p. 16) relacionado con el currículo vertical de Shulman) que Ball y otros sitúan con dudas dentro del SCK. Además, la flecha vertical representa el punto de vista longitudinal y de continuidad que Fernández y Figueiras (2010) encuentran dentro de esta componente que "da forma al Conocimiento Matemático del Profesor y retrata su naturaleza" (p.297).

---

[29] Ver sección 3.2.3 sobre Visualización para entender el uso de este término

[30] "*Conocimiento de los profesores sobre las estrategias efectivas para planificar, rutinas de clase, técnicas de manejo del comportamiento y técnicas de motivación* (Petrou & Goulding, 2011, p. 14)"

[31] "*Conocimiento sobre cómo los estudiantes piensan y aprenden dentro de un contenido matemático específico así como comprender los procesos que los estudiantes utilizarán y las dificultades y éxitos* (Petrou & Goulding, 2011, p. 14)"

Esta dimensión del PCK es la que Ball y su equipo (2008) han englobado dentro del KCT. Gracias a este conocimiento el profesor es capaz de decidir sobre la secuenciación de actividades, sobre cuándo pausar una discusión, o de qué ejemplo es mejor para introducir o para profundizar en un concepto. Además, este conocimiento le permite evaluar las posibles ventajas y desventajas de las representaciones que utiliza cuando enseña, así como identificar qué métodos –incluyendo los visuales (ver sección 3.2.3)– son susceptibles de ser usados (p.401). La otra dimensión importante del *PCK* es la que se refiere a los estudiantes y en particular a "*la comprensión de qué hace fácil o difícil el aprendizaje de contenidos específicos: las concepciones y los preconceptos que los estudiantes de diferentes trayectorias y edades traen consigo cuando aprenden* (p.392)". Gracias a este conocimiento el profesor es capaz de anticipar el pensamiento o las dificultades de los estudiantes, elegir ejemplos o ilustraciones teniendo en cuenta la motivación o interés que les pueden suscitar, interpretar el lenguaje o las visualizaciones incompletas o erróneas que éstos puedan producir. Por tanto, el PCK a través de sus dos componentes, *PCT* y *PCS*, se presenta como una poderosa herramienta de cara a precisar mejor en qué consiste la enseñanza de la visualización.

Por otro lado, el profesor debe saber cómo visualizar para poder enseñar a otros a desarrollar esta habilidad. En la sección 3.2.3 sobre Visualización se profundiza en qué consiste, pero a grandes rasgos "saber visualizar" supone: poseer diferentes representaciones y puntos de vista de un concepto y ser capaz de articularlos de forma flexible (incluyendo saber elegir el más adecuado a cierta situación). Este tipo de conocimiento forma parte del *MKT*, que tiene dos componentes. El *CCK* es el conocimiento y las capacidades matemáticas que se utilizan en cualquier entorno diferente a la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 399) y, en relación a la visualización, involucraría saber cómo realizar representaciones visuales o como resolver problemas matemáticos que involucren métodos visuales correctamente. El *SCK*, es central en el modelo, y es el conocimiento y las capacidades matemáticas que se utilizan en el entorno de la enseñanza y que permiten enseñar de forma efectiva. Implica la capacidad de descomponer el conocimiento matemático de tal modo que se facilite la comprensión a los estudiantes (p.400). En el contexto de la visualización esto supone saber no sólo utilizar una figura determinada si no también entender y ser capaz de hablar explícitamente de cómo funciona, cuáles son sus unidades, qué relaciones hay representadas, cómo se conecta con otras representaciones, por qué es mejor en determinada situación, etcétera.

Finalmente, el profesor debe ser capaz de relacionar la visualización tanto con la trayectoria de aprendizaje del estudiante como con el currículo. El *HCK*, que es el "*conocimiento global de la evolución del contenido matemático y la relación entre sus diferentes enfoques* (Fernández & Figueiras, 2010, p. 295)" es relevante en tanto que modela y está incluido en los anteriores tipos de conocimiento (p.296). El *HCK* involucra competencias fuertemente relacionadas con la visualización: identificar, reconocer y prevenir errores conceptuales y dificultades; modificar las tareas, usando la notación matemática y lenguaje apropiados; interpretar los conocimientos matemáticos de los estudiantes contenidos en el uso de una representación particular (p. 299). De otro lado, aunque a menudo los procesos de visualización no se incluyen de forma explícita en los programas, sí que es importante el *KCC* para determinar qué oportunidades y limitaciones, para enseñar a visualizar, ofrecen tanto el currículo como los materiales correspondientes.

3.2.1.4 Resumen

En este capítulo hemos revisado las aportaciones, relevantes para este estudio, realizadas en el reciente campo de la investigación en EM a nivel universitario. De este modo concretamos, para este nivel, las ideas generales expresadas en la Base Filosófica sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje. Hemos comenzado revisando la problemática del PMA y las diversas teorías que surgieron en torno a él, cuyo principal objetivo era explicar las dificultades de los estudiantes en sus primeros años de Universidad. De todos los constructos teóricos, el de *esquema conceptual* es el que consideramos más interesante para este trabajo. A continuación, hemos revisado las investigaciones en torno a la transición de Secundaria a Universidad, permitiendo pasar de enfoques de investigación más cognitivos a enfoques más socioculturales y afectivos. Estos enfoques, más globales, ayudan a situar mejor el problema y a visibilizar elementos, relacionados con la faceta social de las Matemáticas, que corren peligro de permanecer ocultos si sólo se emplean nociones procedentes de teorías más cognitivas, como las descritas en torno al PMA. En particular hemos repasado la noción de contrato didáctico, que referiremos a través de las expresiones "*cultura o prácticas de clase*" (Presmeg, 2006a) y "*normas y creencias*" (Cobb & Yackel, 1996).

En la última parte del capítulo hemos sentado las bases teóricas para hablar de innovación en la enseñanza universitaria, aspecto clave de esta investigación. En particular, hemos presentado ejemplos de experiencias de innovación realizados desde las teorías referidas anteriormente, que han servido de fuente de inspiración en la formulación inicial de los principios de diseño. Además, buscando herramientas de cara al análisis de las observaciones, hemos efectuado un recorrido por las escasas y recientes investigaciones sobre el estado actual de la enseñanza universitaria. Por último, se han introducido las teorías sobre Conocimiento Matemático del Profesor como un marco interesante y prometedor para tratar la cuestión de la enseñanza de la visualización en la Universidad. Por un lado, materializa ese "algo más" necesario para enseñar a visualizar. Por otro, desplaza la discusión de la mejora de la enseñanza a un terreno más impersonal y cómodo para los profesores universitarios.

3.2.2 Las Representaciones y la Comprensión de las Matemáticas Avanzadas.

La EM trata con fenómenos que pueden verse como procesos de dotación de significado y comunicación y, por tanto, juzgamos pertinente usar conceptos semióticos[32] como signo, texto y sistema (matemático) de signos para hablar de ellos (Puig, 2003, p. 1). De hecho, en este estudio sostenemos que no se puede hablar de comprensión de las Matemáticas si no es a través de sus sistemas de signos (Filloy & Sutherland, 1996, p. 142) o representaciones (Duval, 1999a). De acuerdo con Duval, consideramos crucial reflexionar sobre el papel que juegan las representaciones en la comprensión y la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas:

> *La pregunta sobre la naturaleza del vínculo que une el funcionamiento cognitivo y la utilización de varios sistemas de representación, toca, pues, un verdadero problema. Su puesta en juego es importante tanto desde un punto de vista teórico como para la práctica de la enseñanza. Según la hipótesis que se adopte implícita o explícitamente, no se construye el mismo tipo de modelo para el funcionamiento cognitivo del pensamiento humano, no se privilegian los mismos factores de variación para el estudio de los aprendizajes, y en absoluto se proponen las mismas tareas escolares para desarrollar la adquisición de conocimientos, al menos en Matemáticas y en lengua materna (Duval, 1999b, pp. 15–16).*

En esta sección explicamos diferentes nociones y teorías en torno al papel que las representaciones juegan en la comprensión y la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. En particular, se han escogido aquellas que resultan relevantes para un nivel avanzado de pensamiento y útiles para el estudio de la visualización. Al igual que en la sección anterior, y coherentemente con su desarrollo dentro de la evolución de la investigación en EM, el orden escogido para exponer los contenidos de este capítulo parte de enfoques más cognitivos y avanza hacia más socioculturales.

3.2.2.1 Antecedentes y Terminología. Signos y sistemas de signos.

Es bajo la influencia de las nuevas tecnologías cuando el estudio de las representaciones o los sistemas de signos (Kaput, 1998) ha retomado relevancia en EM. Entre los temas que preocupan destaca la cuestión de la terminología (Goldin, 1998; Kaput, 1998). Desde los inicios diversos autores utilizan el mismo término de forma diferente o, por el contrario, distintos términos aparecen en trabajos diversos para referirse a conceptos similares. Para evitar este tipo de ambigüedades con el lenguaje, en esta sección exponemos algunas nociones importantes para el estudio como son *representación*, *signo*, *significación*, *sistemas de signos* y *significado*.

Comenzamos precisando la noción de *representación.* En la revisión que Goldin realiza en 1998 aparecen diversas acepciones de este término: materialización física externa (incluyendo los entornos informáticos), materializaciones lingüísticas externas, constructos matemáticos formales, representaciones cognitivas internas o imágenes mentales (Goldin, 1998, p. 285). Para esta investigación consideramos la representación en sentido amplio: una *representación* es "*algo que está en lugar de otro algo*". Según Kaput (1987

[32] La *semiótica* es la teoría general que estudia los signos.

citado en Presmeg, 2006a) incluye los siguientes elementos: una entidad de representación, la entidad representada, aspectos particulares de la entidad de representación; los aspectos particulares de la entidad representada que forman la representación; la correspondencia entre las dos entidades (Presmeg, 2006a, p. 206). Por tanto, se acerca mucho a la noción de *signo*, que explicamos a continuación.

Con esta definición amplia de representación queremos evitar la discusión (presente en la clasificación anterior) sobre si éstas son internas o externas, pues ésta da pie a complicadas cuestiones filosóficas (Kaput, 1998) no relevantes para este estudio. De hecho, coincidimos con Duval (1999) en que la *distinción interna/externa* hace referencia al modo de producción de las representaciones, irrelevante en la producción de significado donde lo único importante es la relación de unos signos con otros (como se explica más adelante). Como alternativa a esta problemática, desde la sociología de la ciencia y el discurso postmodernista, se ha introducido en la literatura el término *inscripción* para referirse a las marcas realizadas en cualquier medio físico. Este término, adecuado para estudios con una fuerte componente social, únicamente lo utilizaremos cuando los autores citados lo usen o cuando queramos hacer especial énfasis en la falta de relación representacional con un objeto determinado.

En general, los primeros trabajos desarrollados en torno a la cuestión de las representaciones en Matemáticas siguen los trabajos de Charles Sanders Peirce. Este autor, considerado el padre de la semiótica actual, dio numerosas definiciones de *signo*, pero la más breve y compacta de todas es la siguiente: “*un signo es un objeto que está en el lugar de otro para alguna mente*” (Puig, 2003, p. 2). En esta definición se observa que el signo no se caracteriza por una relación diádica, como la pareja significante/significado de Saussure, sino que la relación es triádica. Sus elementos, como se muestra en la Figura 3. 8, son: el signo o *representamen*, el *objeto* y el *interpretante*. Por tanto, no sólo es importante la relación entre representamen y el objeto representado, sino que también hay que tener en cuenta quién está interpretando el signo y el punto de vista desde el que lo hace. De esta interpretación es precisamente de dónde emerge el *significado* del signo. Otra observación que merece esta definición de signo, es que no es estática. Por el contrario, éste va asociado a un proceso: la *semiosis*. Más adelante explicaremos el proceso de dar significado (*signification*).

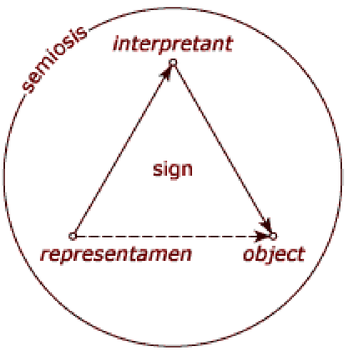


Figura 3. 8: Elementos y procesos de dotación de significado integrados en un signo según la teoría semiótica de Pierce[33].

Un signo [...] se dirige a alguien; es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizás un signo más desarrollado. A ese signo que crea yo lo llamo el Interpretante del primer signo. Ese signo ocupa el lugar de algo: de su Objeto. (Peirce, 1987, pág. 33 citado en Puig, 2003, p. 3).

Pierce distingue tres tipos de signos según las conexiones que aparecen entre los tres elementos anteriores: *iconos, índices y símbolos*[34]. Éstos no tienen por qué aparecer de forma

[33] http://www9.georgetown.edu/faculty/irvinem/theory/semiotics_and_communication.html

aislada, sino que pueden agruparse en *expresiones* donde aparecen los tres tipos de signos de forma simultánea, como ocurre por ejemplo con las expresiones algebraicas (Puig, 2003). Por otro lado hay quienes, al mirar textos matemáticos, advierten que hay dos clases de signos: una formada por signos propiamente matemáticos y otra formada por los signos de alguna lengua vernácula. Sin embargo, más interesante que considerar los signos y sus tipos es el estudio los procesos de significación o producción de significado. Desde este punto de vista, la diferencia entre signos matemáticos y no matemáticos no es importante. Lo que sí es crucial es considerar en su conjunto todos los símbolos que intervienen en el proceso, es decir, considerar los *sistemas de símbolos* (Puig, 2003). Esta noción lleva a diferenciar entre *sistemas matemáticos (SMS) y no matemáticos (SNS) de signos*, distinción relevante para explicar la producción de significado en Matemáticas. Kaput (1989 citado en Filloy & Sutherland, 1996) utiliza esta distinción para, teniendo en cuenta la diversidad de sistemas de signos presente en las Matemáticas, dar una clasificación de las fuentes de significado en esta disciplina:

1) *Transformación dentro un sistema matemático de signos particular*, sin hacer referencia a otro sistema.
2) *Transformación a través de sistemas matemáticos de signos*.
3) *Traducciones entre sistemas matemáticos y no matemáticos de signos*, tales como el lenguaje natural, las imágenes visuales y otros sistemas como los gestos.
4) *Consolidación, simplificación, generalización y reificación de acciones, procedimientos y conceptos de los sistemas de símbolos matemáticos intermediarios creados durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza*. [...] Estos sistemas de signos matemáticos evolucionan en un nuevo sistema de signos matemático más abstracto en el que habrá nuevas acciones, procedimientos y conceptos. De este modo se alcanza un nivel más elevado de organización que supone un nuevo punto de partida para el futuro desarrollo cognitivo. (Filloy & Sutherland, 1996, pp. 142–143)

Las tres primeras fuentes de significado tratan con expresiones primitivas y los medios de combinarlas. Sin embargo, la cuarta representa un medio de abstracción, especialmente interesante para el avance hacia el PMA, que permite nombrar y manipular conjuntos de objetos como si fueran nuevas unidades disponibles para comenzar posteriores procesos de significado. Este tipo de proceso de dotación de significado a través de los signos, la *semiosis*, ocurre en la mente de personas cuándo éstas tratan de *comprender*[35] (en este caso matemáticas) y no acaba nunca. Una buena metáfora para ilustrar este proceso es la búsqueda de una palabra que no se comprende en el diccionario. La descripción que se encuentre de ella será una expresión de otras palabras que, si tienen sentido, se podrán conectar y reificar creando un nuevo significado para la palabra buscada. Ésta, una vez comprendida, servirá en el futuro para comprender nuevas palabras. En la *comprensión* de las Matemáticas sucede algo similar, con la diferencia de que coexisten al mismo tiempo

[34] En los *iconos* la relación entre el representamen y el interpretante es de semejanza o parecido, en los k es de contigüidad (causa-efecto) y en los *símbolos* es fuente de una convención, de un convenio.

[35] Donde *comprender* significa percibir mentalmente algo, captar el significado de algo, entender con claridad lo que quiere decir alguien, conocer en un objeto todo lo que en él es conocible, llegar a conocer la naturaleza o modo de ser de una cosa (Cuervo, 1998; Seco, Andrés y Ramos, 1999 citados en Rico, 2009, p. 2)

una mayor diversidad de sistemas de signos. Por eso son importantes las tres primeras fuentes de significado que distingue Kaput.

A continuación, se revisarán cómo otras teorías dentro de la investigación en EM que han dado forma a estas ideas generales sobre la producción de significado, y por tanto de comprensión, a través de las representaciones y los sistemas de signos.

3.2.2.2 Pensamiento Diagramático

El primer tipo de estas son las que estudian el pensamiento diagramático en Matemáticas. Para exponer algunas de sus ideas principales tomamos como referente el trabajo de Willi Dörfler [36].

El punto de vista de Dörfler está fuertemente influenciado por Pierce, por lo que toma su definición de diagrama y sus tesis sobre el carácter empírico de las Matemáticas. En Pierce los *diagramas* son signos especiales (con carácter icónico) que tienen una estructura clara y reconocible, tomados junto a las reglas convencionales por las que pueden ser manipulados (a través de transformaciones y composiciones). Por tanto, un aspecto fundamental en los diagramas es su carácter operativo y no las posibles connotaciones geométricas que algunos les podrían atribuir[37] (Dörfler, 2005, p. 60). De hecho los diagramas son muy variados, y pueden estar constituidos por cualquier otro tipo de inscripción como letras, números, signos especiales, además de las figuras geométricas (Dörfler, 2003a, p. 39). Se puede consultar una caracterización mucho más extensa de los diagramas en los trabajos de Dörfler (2003a, 2004, 2005, 2006).

Por lo tanto, el pensamiento diagramático consiste en la manipulación de los diagramas de acuerdo con dichas reglas y operaciones. La principal consecuencia de considerar este tipo de pensamiento dentro de la actividad matemática es que afecta a la visión de la misma. El pensamiento y razonamiento matemático se supone a menudo como una actividad puramente mental y abstracta, separada completamente de cualquier tipo de investigación empírica (Dörfler, 2003a, p. 39). La perspectiva del pensamiento diagramático no lo ve así. Por el contrario, considera que la observación empírica y perceptiva se vuelve una parte decisiva del diseño y comprensión de demostraciones y, en general, del razonamiento matemático. Con esta concepción las Matemáticas no son tanto el manejo de ideas abstractas en nuestra mente sino la observación de los efectos de nuestra manipulación de diagramas (Dörfler, 2003b, p. 1). De esta forma el diagrama se agrega a las propiedades conocidas del concepto asociado y amplía el conocimiento sobre él (p.3). De hecho, desde esta perspectiva, así es como se produce el aprendizaje y la comprensión de los conceptos, siendo necesario en ocasiones combinar este proceder con un pensamiento más conceptual, verbal o incluso metafórico.

En la manipulación de los diagramas lo importante son las reglas operativas y no tanto el significado (referencial) de los símbolos manipulados (Dörfler, 2003b, p. 4). En términos de Pierce, este hecho implica, en cierta forma, quedarse únicamente con el *representamen* de la tríada que integra un signo. Por tanto, aunque no se niega su importancia, la posesión

[36] Agradezco la oportunidad de discutir en persona con él en un curso de verano organizado por la Universitetet i Agder, Noruega.
[37] Esta confrontación imágenes-diagramas se tratará en la sección 3.2.3.2.

de una comprensión conceptual de los objetos involucrados no se considera una condición necesaria para el aprendizaje. Este punto de vista, que puede parecer limitado para el estudio de la actividad matemática, no lo es y de hecho está en consonancia con la dualidad operacional/estructural de Anna Sfard (ver sección 3.2.1). Es verdad que, tal y como acabamos de describir el manejo de diagramas, puede parecer un juego sin sentido, meramente formalista. Pero lo cierto es que hace falta inventiva, creatividad y capacidad para descubrir relaciones, a veces sorprendentes (Dörfler, 2003b, p. 3).

Para apoyar estas afirmaciones, Dörfler analiza numerosos ejemplos de demostraciones y razonamientos matemáticos encontrando que, aunque existen algunas limitaciones para el pensamiento diagramático (Dörfler, 2005), en general éste es de gran importancia para la comprensión de esta disciplina (Dörfler, 2003a, 2003b, 2004). En particular, señala que dentro del AL, donde los diagramas básicos son matrices y sus operaciones, hay ejemplos muy llamativos (Dörfler, 2004). Algunos de ellos se revisarán en el capítulo sobre Teorías Locales (ver 3.3). Además de estos ejemplos, Dörfler ofrece otro argumento relevante para poner de manifiesto la importancia del pensamiento diagramático. Para este autor, el escaso desarrollo teórico que algunos campos de las Matemáticas han experimentado, como por ejemplo los números irracionales, podría explicarse por la inexistencia de una escritura diagramática que permita exhibir y explotar las propiedades de estos conceptos (ver Dörfler, 2005).

Este argumento también se puede aplicar para explicar las dificultades de los estudiantes. La falta intrínseca de representación diagramática es un obstáculo epistemológico que dificulta el aprendizaje. Además, el aprendizaje de cierto concepto tampoco podrá producirse si no se posee una familiaridad con los diagramas asociados a él y competencias en sus operaciones (Dörfler, 2003b, p. 3), hecho que tiene importantes implicaciones didácticas:

> *The thrust of the following is the thesis that it might be of great educational value to present mathematics to the learner as the systematic study of diagrams (presented as inscriptions of many different forms) and all sensible operations with them. This would move those diagrams into the very centre of mathematical learning and teaching. The diagrammatic inscriptions then do not serve just representational purposes but they themselves are the objects of interest, investigation and discussion (Dörfler, 2006, p. 104).*

Por tanto, la principal aportación importante de esta perspectiva a la presente investigación es que justifica una atención explícita a los diagramas y sus operaciones en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto implica no sólo considerarlos como medios de representación de los conceptos matemáticos, relegándolos a un papel secundario, sino como objetos de estudio en sí mismo.

3.2.2.3 Teoría de Registros Semióticos de Representación. Duval y Hitt.

El segundo tipo de teorías que tomamos en cuenta son las de los registros de representación semiótica. Como referencia de esta aproximación se han tomado los trabajos de Duval (1993, 1999a, 1999b, 2004, 2006) y de Hitt (2002, 2003, 2006). Ambos parten del hecho que una característica específica del pensamiento matemático es la diversidad de sistemas de representación. Algunas de las nociones teóricas desarrolladas proporcionan herramientas útiles para el análisis de las unidades y de los procesos cognitivos relacionados con la representación y la visualización, claves en este estudio.

Al igual que las teorías en torno al pensamiento diagramático, las teorías de registros de representación consideran fundamentales los signos matemáticos, no tanto por su relación con el objeto representado, como por su capacidad de ser transformados en otros signos distintos (Duval, 2004). Para ello, en lugar de hablar de diagramas o sistemas de signos, se define la noción de *registro semiótico de representación*. Duval (1987, 1999b) señala que no todo registro semiótico (o sistema de signos) es necesariamente de *representación*. Esto sólo ocurre si permite las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación que se representan en la Figura 3. 9 y se detallan a continuación:

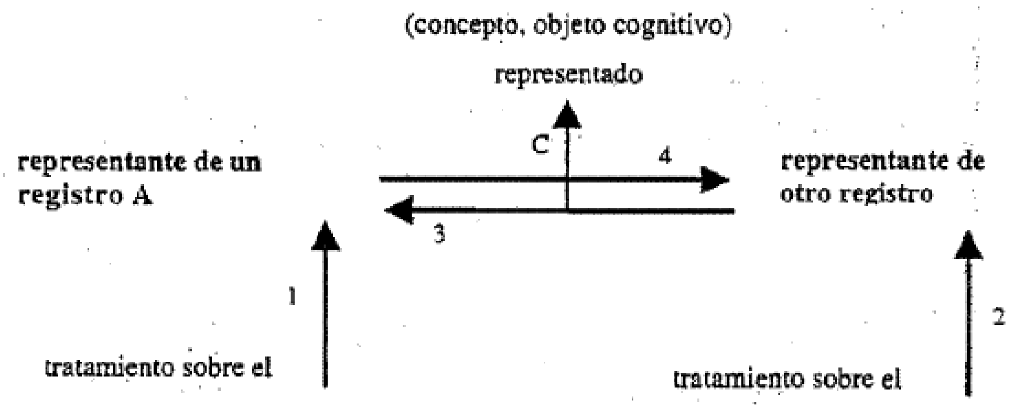


Figura 3. 9: *Modelo de la representación centrado en la función de objetivación*. Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro (tratamientos). Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas (conversiones). La flecha C corresponde a lo que se denomina comprensión integrativa de una representación: supone una coordinación de dos registros. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros; como se verá, en algunos dominios como el AL, puede requerirse una coordinación entre tres registros por lo menos. Igualmente se puede ver una de las posibilidades importantes de la estructura de la representación: lo que representa en un registro puede ser considerado como lo representado en otro registro, como es el caso en la relación entre texto e imagen (Duval, 1999b, pp. 65–66).

1. *Formación de representaciones*: ya sea para "expresar" una representación mental, o bien para "evocar" un objeto real (Duval, 1999b, p. 40). Esta formación implica siempre una selección en el conjunto de rasgos y de datos en el contenido por representar. La selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. [...] La función de estas reglas es asegurar, en primer lugar, las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación y, en segundo lugar, la posibilidad de su utilización para los tratamientos (Duval, 1993, p. 177).
2. *Tratamiento de representaciones* (en la Figura 3. 9, flechas 1 y 2)**:** es la transformación de estas representaciones en el mismo registro donde se han formado. El tratamiento es una transformación interna a un registro. [...] Existen reglas de tratamiento propias de cada registro. Su naturaleza y su número varían

considerablemente de un registro a otro. Ejemplos: la paráfrasis, la inferencia, la reconfiguración (Duval, 1993, p. 178).

3. *Conversión de representaciones* (en la Figura 3. 9, flechas 3 y 4): es la transformación de estas representaciones en otras de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida. Ejemplos: la ilustración, la traducción, la descripción. (Duval, 1993, p. 178) [...] No se debe confundir a la conversión con dos actividades que forman parte de ella: la codificación y la interpretación[38] (Duval, 1993, p. 179).

Es posible combinar la teoría de Duval con la de Kaput (ver sección 3.2.2.1) para ganar un marco más adecuado con el que explicar procesos de PMA. Los tipos de transformaciones distinguidos por Duval son coherentes con las fuentes de significado de Kaput: el tratamiento correspondería con el primer tipo de transformación y la conversión con el segundo y el tercero. Sin embargo el cuarto, que es fundamental para el PMA, no se encuentra presente en la teoría de Duval. Únicamente aparece de forma implícita cuando se describe cómo se produce la *comprensión,* que requiere de la coordinación y articulación de diferentes sistemas de representación (en la Figura 3. 9, flecha C), y el *aprendizaje*, que implica la construcción de una arquitectura cognitiva "*con la que los estudiantes pueden reconocer el mismo objeto a través de diferentes representaciones*" (Duval, 1999a, p. 12). Pero la movilización de varios registros a la vez no implica necesariamente su coordinación, y por tanto, comprensión. Es decir, la coordinación de registros es una condición necesaria, no suficiente para la comprensión. Por eso, resulta adecuado complementarla con la cuarta fuente de significado de Kaput, relativa a la abstracción y la reificación (ver sección 3.2.2.1).

Desde el punto de vista matemático, conviene no separar la conversión del tratamiento, ya que ambos son necesarios en la resolución de un problema. El tratamiento es lo más importante ya que de él depende la elección del registro de representación: cuál es mejor para realizar menos operaciones, para generalizar más fácilmente, para que resulte más intuitivo, etcétera. Sin embargo, desde el punto de vista cognitivo, ambos tipos de transformación dan lugar a problemas muy diferentes. Por ejemplo, el tratamiento requiere un conocimiento previo de las operaciones y flexibilidad en el manejo de las representaciones, pudiendo llevar a romper unidades previas de significado (ver el ejemplo de tratamiento algebraico en Duval, 2004, p. 4). A veces puede ser complejo, sobre todo en casos en que se use lenguaje y visualización (Duval, 2004, p. 16). Pero, en general, la conversión es cognitivamente más difícil. Involucra dos niveles de procesos:

1) *identificar el mismo objeto denotado en dos representaciones (de dos registros diferentes) cuyos contenidos parecen bastante diferentes;*
2) *identificar dos objetos diferentes denotados en dos representaciones (dentro del mismo registro) cuyos contenidos parecen similares* (Duval, 2004, p. 11).

[38] Duval (1993) asegura, por un lado que, la *interpretación* requiere un cambio de marco teórico, o de un cambio de contexto. Este cambio no implica un cambio de registro, sino que con frecuencia moviliza analogías; y por otro que, la *codificación* es la trascripción de una representación en otro sistema semiótico distinto de aquél donde está dada (p.179).

Para el segundo nivel es necesario establecer una conexión entre los dos registros de representación involucrados y ser capaz de identificar elementos matemáticamente relevantes. Esto provoca grandes dificultades a los estudiantes, especialmente debido al fenómeno de no congruencia[39] (Duval, 1999b, pp. 18–19), y por ello se le considera especialmente importante en el camino a la comprensión. Sin embargo, de las tres actividades ligadas a los registros de representación, la conversión es tradicionalmente la menos considerada en la enseñanza (Duval, 1993, p. 181). Esta conducta se basa en dos creencias que las evidencias han probado erróneas: la conversión surge de forma espontánea en el momento en que se es capaz de representar y tratar un objeto en registros diferentes; la conversión no tiene importancia real para la comprensión, ya que se limita a un cambio de registro (Duval, 1993, p. 181). Esta última afirmación podría ser cierta si el contenido de cualquier representación semiótica sólo dependiera de los conceptos representados. Pero no es así, ya que también depende del sistema de representación empleado. Por eso al cambiar de registro, cambia el contenido de la representación pero no las propiedades matemáticas representadas (Duval, 2004, p. 10). Desde este punto de vista, Duval (1999b) señala que para que una representación pueda funcionar realmente como tal para un sujeto, es decir, le permita el acceso al objeto representado, deben darse dos condiciones:

- *Que se dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación*
- *Que espontáneamente se puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin ni siquiera notarlo* (Duval, 1999b, p. 30)

¿Cómo lograr que se den estas dos condiciones con los estudiantes? A través de la enseñanza y, en particular, a través de "*un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus 'traducciones' mutuas* (Duval, 1999b, p. 17)". A continuación resumimos algunos resultados relevantes para el diseño de tareas derivados de las investigaciones realizadas desde esta perspectiva:

- La posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado (Duval, 1999b, p. 14).
- La separación de los procesos de tratamiento y conversión es importante desde el punto de vista metodológico, tanto para el análisis de las dificultades de los estudiantes como para proponer actividades de enseñanza.
- Algunas características recomendables para actividades que ayuden a los estudiantes a familiarizarse con los dos niveles de conversión son (Duval, 2004, pp. 11–13):
    - Para el nivel (1): deben exponer al mismo tiempo diversas representaciones posibles y hacer que las conexiones entre ambas se

[39] Una conversión puede ser *congruente* (o *no-congruente*) según la relación que exista entre las unidades de ambas. Esta relación depende del sentido en que se haga la conversión. Por ejemplo, el paso de la expresión algebraico de una función a su gráfica, es congruente, pero no existe congruencia si la conversión se hace en sentido contrario.

hagan explícitas pidiendo realizar algún comentario o tratamiento sobre ellas.

- Para el nivel (2):
    - Deben centrar la atención en las variaciones de la representación dentro del registro de partida.
    - Deben fomentar la investigación del campo de esas posibles variaciones.
    - Deben promover la comparación de esas variaciones con los efectos que éstas producen en el registro de llegada: ¿cambia algo en el registro de llegada? ¿qué cambia?

Por otro lado, Hitt (2003, 2006) criticó la aproximación de Duval, señalando que indirectamente sólo estaba considerando representaciones institucionales, es decir, las empleadas por el experto o los libros de texto, dejando de lado las representaciones que espontáneamente producen los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de un problema. Este tipo de representaciones, a las que Hitt (2003) llama *representaciones funcionales*, no tienen por qué coincidir con las institucionales e incluso pueden no ser aceptadas desde ese punto de vista. Sin embargo, Hitt (2003) defiende que juegan un papel fundamental en la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes y que por tanto, vale la pena prestarles atención. Por tanto, en esta investigación, tendremos en cuenta este punto de vista para el análisis de producciones de los estudiantes.

Otra noción introducida por Hitt importante en esta investigación es la de *concepción*. Según Hitt (2006):

> *Una concepción es un conocimiento personal, construido por un individuo a través de una interacción personal o social que no es equivalente al conocimiento institucionalizado. Es posible detectar una concepción de una persona a través de las representaciones personales que usa cuando está resolviendo una tarea matemática. Por tanto, una concepción podría ser:*
>
> - *Un obstáculo epistemológico.*
> - *Una construcción parcial de un concepto, construcción coherente de algunas representaciones y sus conversiones desde una representación a otra.*
> - *Una construcción parcial de un concepto que funciona en ciertos contextos y otros no, pero que no necesariamente representa un obstáculo epistemológico.*
> - *Una combinación coherente de representaciones funcionales (p.6).*

Esta definición encaja la de *esquema conceptual* (ver sección 3.2.1.1). De modo que el término *concepción* queda libre y se utilizará en la expresión "*concepción matemática*" para designar las diferentes construcciones coherentes (parciales o completas) que se han empleado y se emplean por la comunidad matemática para pensar sobre cierto concepto matemático. Así pues, desde esta perspectiva, las concepciones están más relacionadas con el desarrollo epistemológico del concepto que con la construcción mental que cierto individuo pueda tener de él.

3.2.2.4 Hacia Perspectivas más Globales. Teorías de Mediación Semiótica.

Hasta ahora, las teorías descritas se han centrado en aspectos cognitivos de los procesos semióticos. Las teorías basadas en el trabajo de Vygotsky, conocidas como la *Teoría de Mediación Semiótica*, considera que la evolución de los procesos mentales de los seres humanos no sólo dependen de la actividad individual (cognitiva), sino que también está fuertemente afectada por la interacción social y cultural (Mariotti & Bartolini Bussi, 2008, p. 749). En particular, esto afecta a los signos, que proceden de la cultura (en este caso la cultura matemática). En el trabajo de Vygotsky, el lenguaje, en particular, y los signos, en general, desempeñan un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento (matemático): inicialmente los signos toman una función social y comunicativa; más tarde, éstos se "internalizan" convirtiéndose finalmente en una nueva herramienta con la que el sujeto puede pensar. En este proceso, los estudiantes inevitablemente utilizarán sistemas de signos sin comprender por completo qué están haciendo, al igual que ocurre cuando un bebé está aprendiendo a hablar. Es labor del profesor inducir a los estudiantes al uso de los sistemas matemáticos de signos en su función comunicativa y facilitar su posterior desarrollo (Filloy & Sutherland, 1996, p. 143).

La Teoría de Mediación Semiótica desarrollada por Mariotti y sus colegas, con base en Vygotsky, propone un modelo de análisis y diseño de secuencias didácticas en Matemáticas. En particular precisan la noción de *mediación* tomando el modelo de 2002 de Hasan, que la define a partir del verbo *mediar* como un proceso con una compleja estructura semántica que involucra los siguientes participantes y circunstancias:

1. Alguien que media, es decir, un *mediador*.
2. Algo que es mediado, es decir, un *contenido/fuerza/energía* liberado por la mediación.
3. Alguien/algo sujeto a la mediación, es decir, el "*mediando*" para quien/el cual la mediación marca una diferencia.
4. Las circunstancias para la mediación:
    a. Los medios de mediación, es decir, la *modalidad.*
    b. La localización, es decir, el *emplazamiento* en el que la mediación podría ocurrir (Mariotti & Bartolini Bussi, 2008, p. 751).

En definitiva, la mediación se usa para referirse a las posibilidades de desarrollar, (normalmente a través de la realización de una tarea) una relación entre los estudiantes y el conocimiento matemático (Mariotti & Bartolini Bussi, 2008, p. 752). En ese proceso intervienen *artefactos*[40] que, al usarse socialmente, generan distintos tipos de signos y significados personales y compartidos. La guía del profesor, que debe actuar tanto a nivel cognitivo como metacognitivo, es fundamental para asegurar en clase la evolución de estos signos y significados (inicialmente más ligados al artefacto) hacia los signos y significados matemáticos, tal y como se comparten dentro de la comunidad científica.

[40] Dentro de estas teorías la noción de artefacto"*normalmente se usa de forma muy general para englobar formas orales y escritas de lenguaje, textos, herramientas físicas empleadas en la historia de la aritmética (por ejemplo, los ábacos y calculadores mecánicos) y en geometría (por ejemplo la regla y el compás), herramientas proporcionadas por las TIC, manipulativos, etc.* (Mariotti, 2012, p. 45)

Para ello, los *signos pivote* se refieren tanto al artefacto como al contenido matemático, resultando de gran ayuda. En la Figura 3. 10 se representan los elementos y las relaciones que se establecen en este proceso.

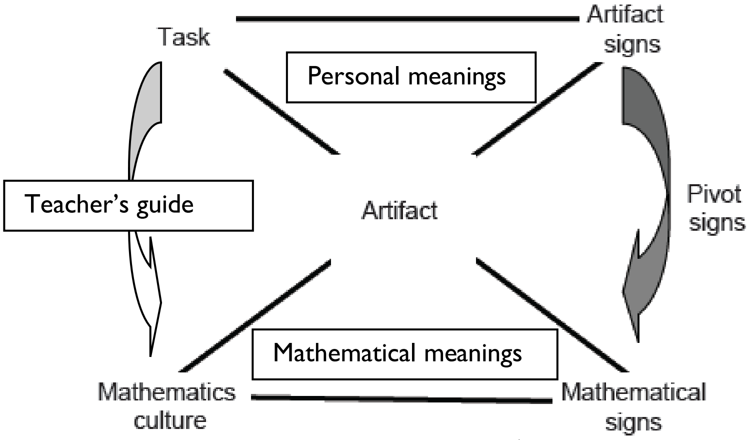


Figura 3. 10: Esquema de la mediación semiótica en clase (basado en las figuras de Mariotti & Bartolini Bussi, 2008).

De este modo, se logra que dichos signos sirvan de vehículo hacia el contenido que se quiere mediar y es posible finalmente la *construcción del conocimiento matemático*. Las posibilidades ofrecidas por el artefacto en su doble relación con los significados personales y los matemáticos se denominan *potencial semiótico del artefacto*. Sin embargo, este potencial no se activa de forma espontánea. Es necesaria la acción del profesor. Cuando éste hace un uso intencionado de dichas posibilidades (para lo que se recomienda haber realizado un análisis previo) se dice que utiliza el artefacto como *herramienta de mediación semiótica*. Por otro lado, es necesario que el artefacto esté completamente integrado en la actividad de la clase, es decir, que esté debidamente *"orquestado"* (en términos de Trouche, 2005, p.123 citado en Mariotti & Bartolini Bussi, 2008, p. 754). Con este fin, la Teoría de la Mediación Semiótica propone el *ciclo didáctico,* una tipología de actividades que hemos tenido en cuenta en el diseño de secuencias didácticas en esta investigación (ver sección 2.4.4.2):

- **Actividades con los artefactos:** son los que promueven la aparición de signos específicos. La realización en parejas o pequeños grupos promueve el intercambio social y la necesidad de comunicación, lo que puede favorecer la aparición de más signos.
- **Producción individual de signos:** a través de actividades semióticas diferentes, principalmente relacionadas con producciones escritas en torno a las actividades previas con el artefacto. Esta actividad se distingue de las otras en que se espera una contribución personal. Los escritos producidos pueden convertirse en objeto de discusión en la fase siguiente.
- **Producción colectiva de signos:** las discusiones colectivas juegan un papel fundamental en los procesos de enseñanza-aprendizaje, ofreciendo un medio idóneo para que ocurran los procesos semióticos. En una discusión matemática,

toda la clase se ve envuelta en un discurso matemático, normalmente iniciado y guiado por el profesor[41].

3.2.2.5 Resumen

Para concluir, hacemos notar que las teorías presentadas en esta sección sobre representaciones permiten concretar las ideas generales expresadas en la Base Filosófica sobre cómo se construye, se enseña y se aprende el conocimiento matemático. Las teorías de Pierce, Kaput, Dörfler, Duval y Hitt han ayudado a precisar el tipo de elementos que debe incluir el esquema conceptual de un individuo, con especial atención a las representaciones y sus transformaciones. También modelan cómo se produce la comprensión y la obtención de significado de los objetos matemáticos, sirviendo para describir y explicar algunas dificultades observadas en los estudiantes. Estos resultados tienen importantes implicaciones didácticas que se deben tener en cuenta en el desarrollo de tareas que presten especial atención a las representaciones.

Por otro lado, las teorías de Vygotsky y de Mediación Semiótica proporcionan el lenguaje y las nociones necesarias sobre las representaciones en su faceta social. En este estudio nos circunscribimos a la mediación del profesor como dimensión clave para la creación y el desarrollo de signos y significados en la comprensión matemática.

[41] La naturaleza de esta guía es difícil de explicar y ha dado lugar a publicaciones específicas dentro de esta teoría (Mariotti, 2009) a las que se recomienda acudir si se quiere ahondar en este tema.

3.2.3 La Visualización en la Educación Matemática

3.2.3.1 Panorámica de Investigaciones Previas y Noción de Visualización

La investigación en Visualización ha tenido como punto de partida la década de los 80 (Presmeg, 2006a). En la siguiente tabla (Figura 3. 11) se sintetiza la trayectoria y los temas de las investigaciones realizadas (subrayándose las preguntas y aspectos relacionados con este estudio). Para este resumen nos basamos en dos documentos que presentan el estado del arte a este respecto: Presmeg (2006a) y Rivera (2011).

Fechas	**Acontecimientos**
Antecedentes	- S.XIX: investigaciones, desde la psicología, sobre imágenes en relación con los sentidos y sus interconexiones. - S.XX: prácticamente desaparece salvo en campos de psicoterapia y conducta del comportamiento (conductivismo).
Comienzos	- Años 1970 – 1980: re-emerge la investigación en imágenes desde su base psicológica con metodologías cuantitativas y sobre todo cualitativas. - Investigación sobre las ventajas y desventajas así como sobre los aspectos cognitivos y afectivos. - Primeros estudios sobre pensamiento geométrico espacial (con sólidos), relación con la intuición, representaciones de funciones con ordenadores.
Años 90	- La visualización se reconoce como un campo específico de investigación de la EM. - Categorías de imaginería (Presmeg) y esquemas de imaginería (Dörfler). - Incorporación de estudios sobre el desarrollo curricular y de materiales sobre áreas particulares de las Matemáticas: pensamiento geométrico y visión espacial, representación de funciones, resolución de problemas, etc. - Investigaciones sobre qué tipo de enseñanza, qué prácticas de clase, promueven (o inhiben) una visualización matemática efectiva. - Influencia de las tecnologías (visualizaciones dinámicas). - Diferencias individuales, de género y entre el experto/ novicio en el uso de la visualización, y uso que hace de ella la comunidad matemática. - Status de la visualización y rechazo a visualizar en Matemáticas. - Imágenes prototípicas y dificultades con la generalización. - Estudios longitudinales para explorar la evolución individual de las formas y los usos de imágenes (hipótesis de Kosslyn).
Del 2000 en adelante	- Ampliación de la visión de la visualización hacia otros enfoques teóricos, como sus aspectos semióticos: coordinación entre diferentes inscripciones o registros matemáticos, conexión de lo visual y lo simbólico. - Relación entre imágenes personales y aspectos emocionales del aprendizaje. - Investigaciones sobre metáforas y gesticulación en conexión con teorías de la *embodied cognition*[42] . - Necesidad de solidificar teorías que puedan unificar todo el campo de visualización dentro de la EM.
Direcciones futuras	- Necesidad de unir la visualización matemática con "todo el paisaje". - Aspectos que hacen efectivo el uso de imágenes en Matemáticas. - Investigación sobre cómo ayudan o perjudican las imágenes en los procesos de abstracción, generalización y "reification" de los objetos matemáticos. - Influencias crecientes del punto de vista neurocognitivo.
Preguntas de investigación	*¿Qué aspectos de la pedagogía son significativos en promover las ventajas y en obviar las dificultades del uso de la visualización en el aprendizaje de las Matemáticas?* *¿Qué aspectos de la cultura de clase promueven el uso activo de un pensamiento visual efectivo en Matemáticas?* ¿Qué aspectos del uso de diferentes tipos de imágenes y visualización son efectivos en la resolución de

[42] El término *"embodied cognition"* aparece varias veces en el capítulo, a veces se traduce como cognición embebida, encarnada o corpórea, pero se dejará en inglés por su uso extendido en esa lengua.

	problemas matemáticos a distintos niveles? ¿Cuál es el papel de los gestos en la visualización matemática? ¿Qué proceso de conversión está implicado en el movimiento flexible entre varios registros matemáticos, incluyendo aquellos de una naturaleza visual, y combatiendo por tanto el fenómeno de compartimentación? *¿Cuál es el papel de las metáforas a la hora de conectar distintos registros de inscripciones, incluyendo aquellas de naturaleza visual?* *¿Cómo pueden los profesores ayudar a sus alumnos a hacer conexiones entre las inscripciones simbólicas y visuales de una misma noción matemática?* *¿Cómo ayudan los profesores a sus alumnos a hacer conexiones entre las imágenes visuales idiosincráticas y los procesos matemáticos convencionales y las notaciones?* *¿Cómo podría facilitar o dificultar el uso de imágenes e inscripciones visuales la 'reification' de procesos como objetos matemáticos?* *¿Cómo podría aprovecharse la visualización para promover la abstracción y generalización matemática?* ¿Cómo podrían aprovechar los profesores el afecto generado por las imágenes personales para incrementar el disfrute de aprender y hacer Matemáticas? ¿Cómo pueden los aspectos visuales de los ordenadores cambiar las dinámicas del aprendizaje de las Matemáticas? *¿Cuál es la estructura y cuáles son las componentes de una solidificación teórica de la visualización para la EM?*

Figura 3. 11: Panorámica de las investigaciones en EM sobre visualización (Presmeg, 2006a; Rivera, 2011)

Los temas y enfoques que abordan el fenómeno de la visualización son complejos. Deborah Torres (2009) distingue tres grandes perspectivas que han conformado la variedad de enfoques teóricos que se puede encontrar: cognitiva, tecnológica y comunicativa (Figura 3. 12). Estas distintas perspectivas no son una clasificación exhaustiva en categorías excluyentes sino un reflejo de la riqueza y la complejidad de la noción de visualización.

PERSPECTIVA	DESCRIPCIÓN DE LA IDEA DE VISUALIZACIÓN	EN EM
Cognitiva:	*Crear representaciones visuales para apoyar distintas actividades es un acto que se emprende con frecuencia, con la finalidad de comprender las relaciones que se dan en un contexto particular, y ayuda a la comprensión del mundo externo a partir del pensamiento y el razonamiento. Esta noción se conoce como "cognición externa", donde la cognición es entendida como la adquisición y uso del conocimiento. Entre las ayudas externas para la cognición se hallan las representaciones visuales de un problema y la posibilidad de manipularlas interactivamente* (p.163).	Visualizar es entrever a través de los diagramas Visualizar es aprehender y conectar representaciones Visualizar es imaginar, ver con el ojo de la mente
Tecnológica	*Diversos estudios sobre las interacciones que ocurren entre los humanos y las computadoras describen cómo las visualizaciones externas pueden amplificar, reforzar o aumentar la cognición, y dan lugar a una nueva noción de visualización a finales del siglo XX, relacionada con aquellas herramientas o métodos para interpretar datos de imágenes introducidos en una computadora, y para la generación de imágenes a partir de conjuntos de datos multidimensionales. Al respecto, suele definirse la visualización en función del "uso de representaciones visuales, interactivas, y soportadas por computadora, de los datos para ampliar la cognición* (p.163-4).	Visualizar es traducir, interpretar geométricamente
Comunicativa	*La visualización se considera una tarea del proceso comunicativo, por medio del cual se transforman los datos abstractos y los fenómenos complejos de la realidad en mensajes visibles, y que lleva a un proceso de descubrimiento del conocimiento. Esto les permite a los individuos percibir ciertos datos y fenómenos que no pueden recuperar directamente de un cuerpo oculto de conocimiento* (p.164).	Visualizar es visibilizar, hacer visible lo invisible, intuir lo abstracto

Figura 3. 12: Diversidad de perspectivas en la investigación sobre visualización, tanto a nivel general (Torres Ponjuán, 2009) como dentro de la EM. La diversidad de enfoques con el que se estudia la visualización es un reflejo de la complejidad de esta noción.

Dice Nietzsche, en *El nacimiento de la tragedia y la genealogía de la moral,* que "*sólo lo que no tiene historia puede ser definido*". Dar una definición concreta del término tiene la ventaja de facilitar la distinción de fenómenos de visualización sin ambigüedad. Sin embargo, este proceder no resulta adecuado para esta investigación. Cada vez que se fija una definición, ésta excluye algún enfoque interesante que tener en cuenta. La definición del término[43] en el diccionario de la Real Academia (Figura 3. 13) tampoco resulta de gran ayuda, pues las acepciones que se dan son muy variadas (y de hecho guardan relación con las categorías de la visualización de la tabla de la Figura 3. 12).

Conjugar **visualizar.**

1. tr. visibilizar.

2. tr. Representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter; p. ej., el curso de la fiebre o los cambios de condiciones meteorológicas mediante gráficas, los cambios de corriente eléctrica o las oscilaciones sonoras con el oscilógrafo, etc.

3. tr. Formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto.

4. tr. Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista.

5. tr. *Inform.* Hacer visible una imagen en un monitor. U. t. c. prnl.

Real Academia Española © Todos los derechos reservados

Figura 3. 13: Definición de la Real Academia Española del término 'visualizar'[44].

Por tanto, para mantener la riqueza y complejidad del término no partimos de una definición concreta sino de las distintas perspectivas resaltadas en la tabla (Figura 3. 12). A continuación explicamos brevemente en qué consiste cada perspectiva, definimos e ilustramos con ejemplos algunas de sus nociones teóricas fundamentales y resumimos algunos de los resultados de investigaciones realizadas bajo ese enfoque, en particular en torno a dificultades de los estudiantes y posibles implicaciones didácticas. Por último, revisamos y sintetizamos los aspectos más relevantes de la visualización para facilitar el manejo de esta noción durante la investigación.

3.2.3.2 Visualizar es Explorar a través de los Diagramas, Entrever en los Símbolos

Desde el punto de vista del pensamiento diagramático, las Matemáticas se conciben no tanto como el manejo de ideas abstractas en la mente, si no como la observación de los efectos de la manipulación de diagramas (ver apartado Pensamiento Diagramático, sección 3.2.2.2)

> *La verdad, sin embargo, parece ser que todo razonamiento deductivo, aun un simple silogismo, contiene un elemento de observación; a saber, la deducción consiste en la construcción de un icono o diagrama tales que las relaciones de sus partes deben presentar una analogía completa con las relaciones entre las partes del objeto de razonamiento, de experimentar sobre esta imagen en la imaginación y de observar el resultado para descubrir relaciones no percibidas y ocultas entre las partes (Dörfler, 2003b, p. 1).*

---

[43] Se ha buscado el verbo en lugar del nombre pero se puede considerar que ambos van incluidos dentro de la palabra visualización: "*Thus, one way of characterizing visualization and its importance, both as a 'noun' – the product, the visual image – and as a 'verb' – the process, the activity* – (Bishop, 1989, p. 7 citado en Arcavi, 2003, p. 216)"

[44] http://lema.rae.es/drae/?val=visualizaci%C3%B3n

Por tanto, hay una estrecha relación entre la manipulación de diagramas y la visualización, entendiendo ésta como la habilidad de percibir las propiedades gráficas y visuales de cualquier expresión, incluyendo las algebraicas (Dörfler, 2004, p. 1). Sin embargo, en los trabajos sobre pensamiento diagramático es habitual distinguir los diagramas de "*otros tipos de representaciones, visualizaciones*, *dibujos, gráficos, esquemas e ilustraciones*" (Dörfler, 2005, p. 58). Dörfler (2005) señala que este tipo de medios visuales, que Kadunz y Sträber (2004) denominan *imágenes*, podrían ser útiles para sugerir o evocar ciertas propiedades de un concepto matemático, pero no son diagramas porque carecen de operaciones y reglas asociadas. Es decir, hay una interpretación metafórica[45] de las imágenes que se da en el caso de los diagramas (Dörfler, 2005, p. 58). Esta aparente oposición entre visualización y diagramas, se debe a que hay dos concepciones de la visualización: en el primer caso se presenta como un *proceso* relacionado con la observación de patrones, la deducción y, como se verá más adelante, la dotación de significado; en el segundo caso, la visualización aparece como *producto*. En esta sección interesa la primera concepción, que tiene que ver con la *conducta de abducción*. Para entender mejor en qué consiste la relación entre visualización y el manejo de diagramas consideramos el siguiente ejemplo (Figura 3. 14):

Se pide calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Método 1

$$det\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \ -8 - 6 + 0 + 4 + 10 = 0$$

Método 2

$c_3 = c_2 - c_1 \rightarrow det\ A = 0$

Figura 3. 14: Ejemplo de argumentos visuales con diagramas. Si se conoce la regla de Sarrus, ésta se puede aplicar y, mediante una serie de operaciones, se obtiene el valor del determinante (método 1). Hay una alternativa a este proceso: pararse unos segundos, observar la matriz, darse cuenta de que la tercera columna es la segunda menos la primera y concluir, basándose en la dependencia lineal de las columnas, que el determinante debe ser nulo (método 2). Hay dos diferencias fundamentales entre ambos métodos. La primera tiene que ver con el manejo que se hace de los símbolos: el primero es más mecánico y únicamente requiere observar que la matriz es de orden 3 y memoria para recordar una regla; el segundo es más elegante, requiere aplicar conocimientos de forma más profunda (saber que el determinante refleja la dependencia de filas o columnas de la matriz) y una observación más detallada del diagrama que supone elegir unidades de observación (columnas), comparar unas respecto a otras y encontrar una relación entre ellas. Por tanto, en el segundo método es necesario tomar en consideración la estructura espacial de los diagramas. Es más difícil, pero proporciona una mayor comprensión. La segunda diferencia es en torno a la creación de significado: en el primer caso sólo se produce un número que podría ser 0 o cualquier otro (en caso de cometer algún error en los cálculos); en el segundo caso, hay una comprensión del significado de la matriz y del determinante que impide aceptar como válido cualquier otro resultado distinto de cero.

Como muestra este ejemplo (Figura 3. 14), los diagramas poseen unas relaciones espaciales que se pueden explorar, a través de la visualización, para tomar decisiones sobre cómo operar con ellos y anticipar resultados. Es decir, la visualización está relacionada con lo que Pierce denominó la *conducta de abducción*, que consiste en delimitar de entrada la clase

[45] Ver en la sección 3.2.3.6 el apartado "Visualizar es transportar conocimiento a través de metáforas".

de hipótesis o de alternativas que han de considerarse (Duval, 1999b, p. 152). Para Pierce, la *conducta de abducción* es el método que permite la creación de nuevas ideas y la forma que mejor posibilita la adquisición del pensamiento creativo y vital propio de las ciencias, necesario para el PMA (Ramírez & Yaneth, 2009, p. 4). Como muestra el ejemplo (Figura 3. 14), la conducta de abducción se da no sólo con imágenes sino también con diagramas más algebraicos. Un estudio sobre la sintaxis del Álgebra (Kirshner, 1989) pone de manifiesto que algunos estudiantes toman decisiones efectivas en la manipulación de expresiones basándose en aspectos visuales de la notación algebraica estándar. Aunque, este apoyo visual también puede ser un obstáculo para los estudiantes que permanecen anclados a él. Este autor reclama una atención mayor a las reglas proposicionales en el currículo. Considera que en caso contrario, se está confiando implícitamente en el poder visual de los sistemas de notación y sus resultados muestran que éste no siempre es tan inmediato como se podría pensar inicialmente. Desde nuestro punto de vista, lo interesante de esta investigación es la importancia adscrita a la percepción visual de los símbolos, su influencia en el pensamiento matemático de los estudiantes y las terribles consecuencias de una falta de articulación explícita con otros modos de pensamiento, como es en este caso el proposicional.

El ejemplo anterior (Figura 3. 14) también muestra que la visualización tiene un importante papel en la creación de significado de los símbolos, permitiendo ver a través de ellos. Arcavi (1994, 2005) engloba este tipo de conductas dentro de lo que él denomina "*sentido del símbolo*" (*symbol sense).* En la Figura 3. 15 se enumeran algunas de sus principales componentes.

1. Amistad con los símbolos: entender el poder de los símbolos, por ejemplo para decidir si estos cuadrados mágicos tienen solución

	3	
2		1

Suma 9

	4	
2		2

Suma10

2. Capacidad de diseño de expresiones simbólicas, por ejemplo para encontrar una expresión algebraica cuya gráfica pase por el mayor número de los puntos dados

3. Elección de representaciones simbólicas apropiadas, por ejemplo el siguiente problema resulta mucho más fácil si se resuelve geométricamente.

PBMA: ¿CUÁNTAS SOLUCIONES?

¿Para qué valores de *a* tiene el sistema

$x^2 - y^2 = 0$

$(x - a)^2 + y^2 = 1$

0,1,2,3,4,5 soluciones reales distintas?

MIGUEL DE GUZMÁN, (2001) , *"Para pensar mejor"*, Pirámide.

4. Habilidad para "leer a través" de los símbolos, Por ejemplo, esta ecuación no puede tener solución porque el numerador es la mitad del denominador y no el doble.

PBMA: Resolver $\frac{2x+3}{4x+6} = 2$

5. Capacidad manipulativa y de comprobación de significados que surgen: $(2n-1)^2-1$ (par) → $4n^2-4n$ (múltiplo de 4) → $4n(n-1)$ (4 por el producto de dos nº's consecutivos) → $8\frac{n(n-1)}{2}$ (8 por un nº triangular)

6. Equivalencia de expresiones ≠ Equivalencia de significados

$$\frac{a+b}{2} \rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

7. Conciencia de que un símbolo puede desempeñar diversas funciones e intuición para discernir en cada caso, por ejemplo una letra puede simbolizar tanto una variable como un parámetro.

Figura 3. 15: Componentes del sentido del símbolo (Arcavi, 1994, 2005).

Así, el *sentido del símbolo* es un constructo teórico que se refiere a ideas, estrategias de resolución y formas de "leer" y de crear representaciones simbólicas que vayan más allá de la habilidad procedimental y que por tanto son recomendables para evitar errores derivados de un aprendizaje mecánico. Estas conductas son deseables no sólo para el aprendizaje del Álgebra sino, en general, en el manejo de los símbolos y diagramas (que desde la perspectiva del pensamiento diagramático es fundamental para el desarrollo de la actividad matemática). Por tanto, la enseñanza debe cuidar el desarrollo del sentido del símbolo y en concreto de la *visualización*, entendida como la habilidad de saber observar y explotar la estructura y las relaciones espaciales que poseen los diagramas para desarrollar la conducta de abducción (esto es, para experimentar, anticiparse y decidir de forma eficaz qué operaciones y transformaciones realizar con ellos) y para atribuir un significado que permita ver más allá de ellos.

3.2.3.3 Visualizar es Aprehender[46] y Conectar Representaciones

Desde las Teorías de Registros de Representación:

> *We argue that mathematics visualisation and the construction of concepts require the coordination of different representations that belong to different semiotic systems of representations. Unsuitable construction of a concept will impede the acquisition of more abstract conceptualisation. [...]Mathematics visualisation in this context deals with an holistic vision that articulates several representations in a problem solving situation (Hitt, 1998, p. 23).*

La visualización está relacionada con la conexión de representaciones. Dörfler afirma que el término "*representación*" en Matemáticas engloba todas las formas de inscripciones y notaciones y por tanto tiene un significado más amplio que "*visualización*" (Dörfler, 2004, p. 1). Este hecho no está tan claro en la teoría de Duval, donde ambos términos aparecen estrechamente relacionados:

> *[V]isualization, which performs only the synoptic function, is not intuition but representation. In that sense, there are several possible geometrical registers for visualization. Visualization·in Mathematics is needed because it displays organization of relations, but it is not primitive, because it is not mere visual perception (Duval, 1999a, pp. 14–15).*

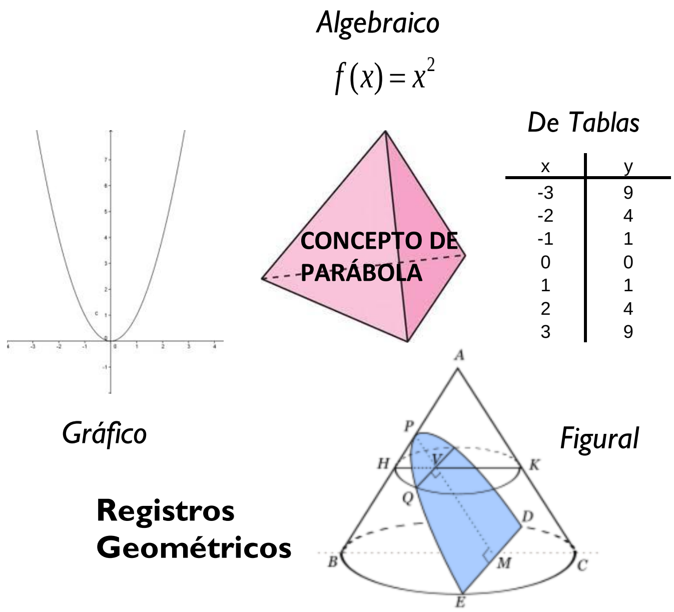


Figura 3. 16: Construcción del concepto de parábola (representado por la pirámide en el centro) a través de la coordinación de representaciones en diversos registros (situados en los vértices de la pirámide), incluyendo las visuales en los registros geométricos (gráfico y figural). "N*o hay comprensión sin visualización*" (Duval, 1999a, p. 13).

[46] "*Aprehender*" entendido como síntesis de adquirir y aprender nuevas representaciones

Así, la visualización aparece ligada a la percepción visual y por tanto a la visión, no restringida a ningún registro en particular. De hecho, cuando las representaciones semióticas se producen gráficamente, están sujetas a la percepción visual. Sin embargo, al hablar de "*registros geométricos*" (y no de registros de representación en general) la visualización tiene un significado menos amplio que *representación*. En este sentido, el término *representación visual* nos servirá para acotar toda aquella representación que se produzca en los registros geométricos, que en este estudio los identificamos con el *gráfico* y el *figural* (de las figuras geométricas). En cualquier caso, la visualización es un concepto fundamental en este contexto. Puesto que la coordinación de los registros (incluyendo los geométricos) es necesaria para la comprensión de los conceptos (Figura 3. 16), Duval afirma que: "*no hay comprensión sin visualización*" (Duval, 1999a, p. 13).

Esta afirmación se explica del siguiente modo. La visualización permite una aprehensión completa de cualquier organización de relaciones entre unidades de representación y, por tanto, facilita la coordinación de registros, que es una condición necesaria (aunque no suficiente) para la comprensión. Por ejemplo, en un texto las unidades serían las palabras. La comprensión del texto no se adquiere entendiendo cada palabra por separado, sino que es necesario atender a la estructura global. Lo mismo ocurre en Matemáticas cuando tratamos de comprender un gráfico cartesiano (las unidades serían los pares *{punto, coordenadas}*) o una configuración geométrica (las unidades serían formas de una o dos dimensiones). Sólo cuando las representaciones se aprehenden globalmente, a través de la visualización, éstas son susceptibles de coordinarse con otras y servir así para la comprensión. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no son capaces de ir más allá de una aprehensión local (Duval, 1999a, p. 14). ¿Cómo lograr que los estudiantes desarrollen esta aprehensión global característica de la visualización y necesaria para comprensión?

Existen tantos tipos de visualización como tipo de unidades y para cada registro de visualización hay ciertas reglas o ciertas restricciones intrínsecas para producir unidades y para formar sus relaciones (Duval, 1999a, p. 15). Por ejemplo, para el registro figural se distinguen las unidades y tratamientos de la Figura 3. 17, permitiendo precisar mejor la visualización en este registro. Para desarrollar la conducta de abducción con las figuras geométricas, es decir, para que éstas se conviertan en el punto de partida para investigar otras posibles configuraciones, son necesarios dos niveles de aprehensión: un primer nivel *perceptivo*, que involucra el reconocimiento de las diferentes unidades discernibles en una figura dada (fila 1); y un segundo nivel *operativo* en el que se efectúan las modificaciones posibles de una figura (fila 2). Los estudiantes tienen dificultades con ambos tipos de aprehensiones, pero sobre todo con el operativo, lo que lleva a preguntarse por qué la aprehensión perceptiva no conduce siempre a la aprehensión operativa. En este sentido, la noción de visualización es cercana a la anterior (pues también atiende a las operaciones posibles de un diagrama). En general, la teoría de Duval (ver sección 3.2.2.3) proporciona un modelo teórico que permite profundizar más en las operaciones cognitivas que subyacen en cualquier proceso matemático y, en particular, en la visualización. A continuación se precisan las razones que nos llevan a hacer esta afirmación.

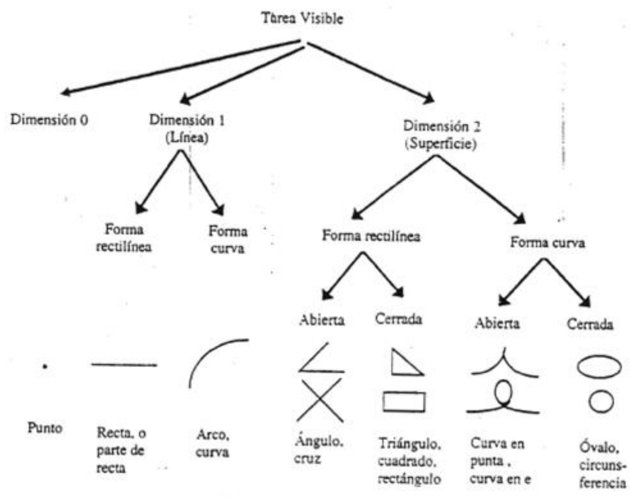
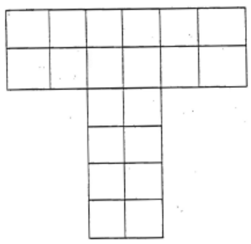
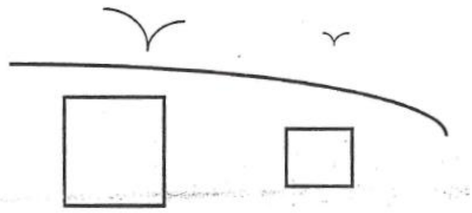
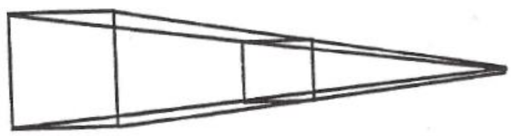
Unidades de una figura geométrica	Variaciones visuales posibles - Variaciones ligadas al número de dimensiones: 0 (un punto), 1 (una línea) o 2 (un área) - Variaciones cualitativas: variaciones de forma, tamaño, de orientación, de granulación, de color, etc. Las combinaciones de estas variaciones permiten definir las unidades figurales elementales	
Tratamientos del registro figural	- Reconocimiento de las unidades figurales y su articulación en figuras - Modificaciones posibles de una figura o Reconfiguración  Esta figura está formada por cinco cuadrados. ¿Se la puede descomponer en cuatro pedazos susceptibles de ser superpuestos?	o Puesta en perspectiva  Figura 6. Puesta en perspectiva de dos unidades figurales por contextualización.  Figura 7. Puesta en perspectiva de dos unidades figurales por unión de los puntos homólogos.

Figura 3. 17: Unidades y tratamientos del registro figural (Duval, 1999b, pp. 150, 157, 158).

Primero, tal y como acabamos de explicar, estas teorías justifican la importancia de la visualización en la comprensión de los conceptos matemáticos. Segundo, estas teorías permiten precisar mejor los procesos relacionados con el manejo de los registros gráfico y figural, que a menudo se identifican con la visualización. Ya hemos visto cómo el análisis detallado de los posibles tratamientos del registro figural facilitan la caracterización de las condiciones necesarias para la visualización en dicho registro (ver Figura 3. 17). Algo similar se puede hacer para el registro gráfico. A través de las nociones de tratamiento y conversión se puede establecer una diferencia clara entre el manejo de ambos registros. En los razonamientos que involucran representaciones gráficas y escritura algebraica de relaciones, el tratamiento se produce en uno de los registros (el más económico) y luego se convierte al de partida. En los razonamientos geométricos, no bastan los tratamientos en el registro figural y la lengua natural por separado. Es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectúen simultáneamente y de manera interactiva. Esta característica, junto a la falsa proximidad entre los tratamientos matemáticos pertinentes y los espontáneamente naturales hacen el aprendizaje de la Geometría especialmente difícil (Duval, 1999b, p. 147).

Tercero, la aprehensión global, descrita anteriormente, permite diferenciar los procesos de *visión* y de *visualización*. Esta diferencia se hace patente en el hecho de que a veces se habla de la *visualización de los ciegos* (Arcavi, 2003; Figueiras & Arcavi, 2012). La *visión* es la percepción directa de un objeto espacial. Al contrario que la visualización, la visión necesita exploración mediante movimientos físicos, del sujeto que ve, o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto. Los modos de ver proporcionados por una y otra son diferentes –siendo el de la visualización el único relevante para el aprendizaje de las Matemáticas– lo que lleva a Duval, por un lado, a afirmar que "*la visualización hace visible todo lo que no es accesible a la visión* (Duval, 1999a, p. 13)"[47]; y de otro lado, a separar las representaciones icónicas de la visualización.

Según Duval hay representaciones semióticas, como el dibujo de un árbol o una casa, que son directamente reconocibles en un golpe de vista gracias una percepción previa del objeto representado, sin necesidad de más información. Estas *ilustraciones*, representaciones icónicas (imágenes figurativas en el apartado anterior), en Matemáticas no funcionan con la visualización (Duval, 1999a, p. 14). Por el contrario, para que haya visualización, la representación debe desempeñar una función *heurística*, que significa que es la conducta de abducción la que guía la deducción (Duval, 1999b, p. 153). Esto sólo es posible si hay una aprehensión operativa de la representación. Esta distinción llevó a diferenciar, en el estudio exploratorio previo (Souto-Rubio, 2009), dos funciones de las imágenes que finalmente dependen del sujeto y la intención con que las use: *ilustrativa* (no hay aprehensión operativa, sólo percepción) y *heurísitica* (hay aprehensión operativa). El análisis de datos de este estudio mostró que esta distinción es relevante para el estudio de la visualización[48].

Desde un *punto de vista didáctico*, hay varias características de la visualización que suponen un gran desafío. Para Duval (1999a, 1999b, 2006) estas dificultades pueden superarse a través de un entrenamiento especial, específico para cada registro, que no debe limitarse a la construcción de representaciones visuales. La construcción pone atención en enfocar sucesivamente algunas unidades y propiedades, mientras que la visualización consiste en comprender directamente la configuración total de las relaciones y en determinar qué es relevante en ella, facilitando una posible anticipación de la construcción (Duval, 1999a). Para que los estudiantes logren adquirir este tipo de conducta, es importante haber realizado previamente un análisis cognitivo preciso del tipo de variables visuales y de actividades que esas tareas puedan involucrar (Duval, 1999b, p. 174). Sin embargo, las prácticas en la enseñanza en torno a la visualización son diversas, y a menudo contradictorias, debido a la existencia de paradojas en torno al uso de los registros visuales: a veces se usan para "dar sentido" a procesos matemáticos más mecánicos que se realizan en otros registros, mientras que otras se evitan por evitar más dificultades a los estudiantes (Duval, 2006, p. 127).

---

[47] Esta idea la trataremos más adelante, cuando hablemos de la *visualización* como *intuición de lo abstracto* (ver sección 3.2.3.6.)

[48] Entre las respuestas de los estudiantes, abundaban más las imágenes como acompañamiento de un razonamiento analítico (a veces combinados de forma no coherente, ver Figura 3. 19) que como un método de resolución en sí mismo, es decir, el uso ilustrativo de las imágenes predominaba sobre el heurístico. Este hecho, acompañado de una preponderancia del registro analítico y la falta de coordinación entre el registro gráfico y analítico, explicaban gran parte de las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas no rutinarios.

3.2.3.4 Visualizar es Imaginar, Ver con el Ojo de la Mente

Para Presmeg (2006a), cuando la persona realiza una representación espacial de objetos físicos lo hace guiada por una imagen visual mental y es a esto lo que denomina visualización:

> *Thus visualization is taken to include processes of constructing and transforming both visual mental imagery and all of the inscriptions of a spatial nature that may be implicated in doing mathematics (Presmeg, 2006a, p. 206).*

Sobre el manejo de las inscripciones de naturaleza espacial ya hemos hablado en las dos perspectivas anteriores. Lo novedoso de esta definición es la "*imaginería mental*" (*mental imagery*) o "*imágenes mentales*", expresión que -junto a otras como "ver con el ojo de la mente", "dibujo en la mente", "esquemas-imagen", o la ya definida "concepto imagen" (Tall & Vinner, 1981)– pertenecen al contexto psicológico y obviamente no se pueden percibir directamente con la vista. Por el contrario, son representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones y conceptos (Gutiérrez, 1992, p. 44) y no necesariamente como consecuencia de un estímulo externo. A veces son recuerdos de experiencias perceptivas del pasado, otras veces son anticipaciones de posibles experiencias futuras[49]. En cualquier caso, los psicólogos consideran importantes en los razonamientos visuo-espaciales y el pensamiento creativo estas imágenes, tanto en lo que concierne a su influencia en la memoria como en la motivación (Thomas, 2011).

Tipo de imágenes	Descripción
Concretas Pictóricas	Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos. Dibujo en la mente.
Cinéticas	Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza...
Dinámicas	Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.
De fórmulas en la memoria	Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera en que aparecerían, por ejemplo, en el Libro de Texto.
De patrones	Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado. Relaciones puras, sin detalles.

Figura 3. 18: *Tipos de imágenes según Presmeg (1985, 2006) citadas por A. Gutiérrez (1992).* Según Presmeg (2006) las más empleadas por los estudiantes son las concretas seguidas por las imágenes de fórmulas en la memoria, las de patrones y las kinestésicas.

En principio, las *imágenes mentales* pueden ser de diversas modalidades sensoriales (visual, auditivas, gustativas, olfativas, táctiles y kinestésicas) pero las *visuales* son las más predominantes en la actividad matemática (Presmeg, 1985) y en la cognición humana. Se estima que el 50% de las células de nuestro cerebro están asociadas a la visión (Zimmermann & Cunningham, 1991, p. 4). Las *imágenes mentales visuales* son constructos en la mente que exhiben gráficamente o en forma de dibujo (*depict*) información visual o espacial (Presmeg, 2006a, p. 207). Esta definición incluye los diagramas (y por tanto

[49] Esto se conoce como Visualización Creativa y la emplean los psicólogos con deportistas, por ejemplo, como técnica para crear una realidad subjetiva en la que se cumplen los objetivos que se desea lograr. En matemáticas podría tener que ver con la conducta de abducción que, como ya se ha discutido, está asociada a la visualización.

también los símbolos y expresiones algebraicas), pues éstos poseen estructura espacial. Además, no excluye los gestos, los movimientos, o los eventos[50], y por tanto las imágenes kinestésicas y dinámicas, que hasta ahora no habían estado incluidas dentro del término imagen (referido sólo a inscripciones). Este hecho tiene importantes consecuencias para la investigación en EM y ha dado lugar a un campo emergente de investigación sobre gestos, a menudo apoyado en marcos relacionados en la *embodied cognition*, cuyo interés aumenta en las últimas décadas (de Freitas & Sinclair, 2012; Presmeg, 2006a). En la tabla (Figura 3. 18) recogemos la clasificación de tipos de imágenes visuales de Presmeg (1985, 2006).

Otro tipo de investigaciones realizadas desde esta perspectiva se centran en las *diferencias individuales en la preferencia por visualizar* (Presmeg & Bergsten, 1995; Presmeg, 1985, 1986, 1991, 1994, 2006a). Para ello, se diferencia entre método visual y no visual y entre individuos visualizadores y no visualizadores. Un *método visual* de solución es uno que involucra *imágenes visuales*, con o sin un diagrama, como una parte esencial del método de resolución, incluso en caso de que también se empleen razonamientos o métodos algebraicos. Un *método no visual* de resolución es aquel que no involucra imágenes visuales como parte esencial. En consecuencia, los *visualizadores* son individuos que prefieren utilizar métodos visuales cuando se enfrentan a problemas matemáticos que admiten tanto métodos visuales como no visuales de resolución. Los *no visualizadores* son individuos que prefieren no utilizar métodos visuales ante problemas que admiten ambos métodos de resolución.

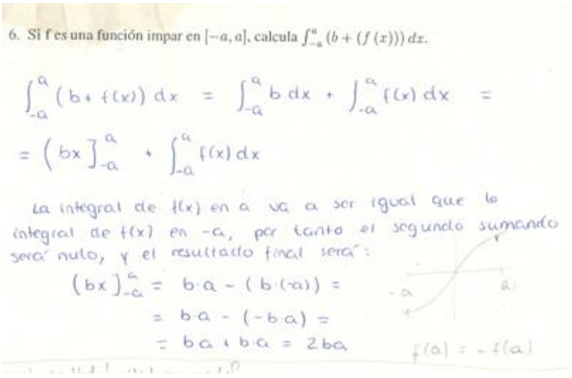
Hacemos notar un posible riesgo que puede surgir al combinar las terminologías de Presmeg y Duval. No conviene hacer las siguientes identificaciones: método visual- uso el registro gráfico y/o figural; y método no visual – no uso del registro gráfico o figural. Esto se debe a dos razones. Primero, a la distancia insalvable entre representaciones semióticas e imágenes mentales. Duval (1999b) afirma que:

> *Visualization refers to a cognitive activity that is intrinsically semiotic, that is, neither mental nor physical. Also such expressions as "mental image", "mental representation", "'mental imagery", are equivocal. They can only be the extension of visual perception (p.13).*

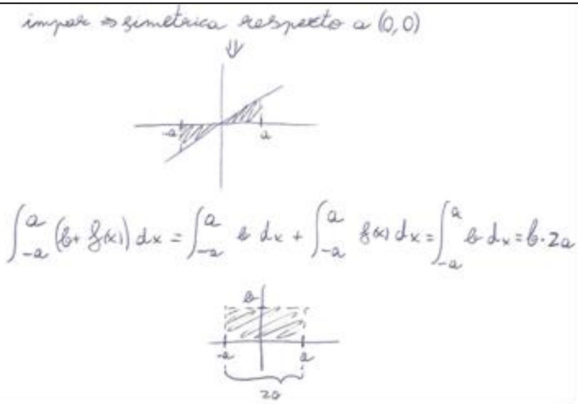
Segundo, el uso del registro gráfico o figural no implica la existencia de visualización. Como explicamos en el apartado anterior, debe haber aprehensión global y una función heurística de las figuras. Además, la visualización implica la coordinación de registros. Si esto no ocurre, tampoco se puede hablar de visualización o método visual (ver Figura 3. 19). Este tipo de consideraciones llevaron en otros estudios (ver Souto & Gómez-Chacón, 2011a) a establecer un tipo más de métodos de resolución de problemas, el *método mixto*, para referir aquellos en los que hubiera uso heurístico del registro gráfico, pero éste no fuera esencial en la respuesta, como sucede en los métodos visuales. En la Figura 3. 19 se muestran ejemplos de cada uno de los tres tipos. Clasificar a los individuos en términos absolutos es una tarea no exenta de dificultades. Por ello, para discutir sobre pensamiento visual o analítico, Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) prefieren hablar de estrategias, aproximaciones o experiencias en lugar de diferencias individuales o categorías de aprendizaje (p.438). Este es el enfoque escogido para esta investigación, más centrada en los contenidos matemáticos que en los individuos.

---

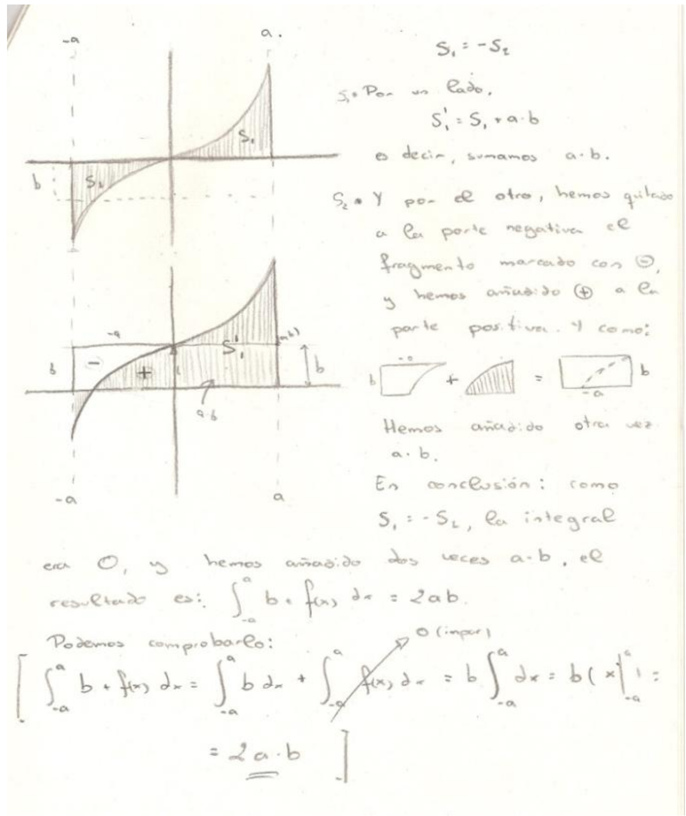
[50] Entendidos como en Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996)



Método no visual



Método mixto



Método visual

Figura 3. 19: Ejemplos de cada tipo de métodos (visual, mixto y no visual) en respuestas dadas por estudiantes en el estudio previo de Análisis (Souto & Gómez-Chacón, 2011a; Souto-Rubio, 2009).

En una línea muy diferente están las investigaciones sobre *visión o razonamiento espacial* relacionadas con el pensamiento geométrico (Pittalis & Christou, 2010). El *razonamiento espacia*l consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales (Clements & Battista, 1992, p. 420). Visualización y visión espacial son dos palabras que a menudo aparecen juntas. Por ejemplo, para Gutiérrez (1996) la visualización es "*el tipo de actividad de razonamiento que se basa en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos* (p. 9)". Este autor sintetiza las habilidades necesarias para este tipo de procesamiento mental de imágenes (ver Figura 3. 20). Una de las principales dificultades del razonamiento espacial es que a menudo, las únicas representaciones disponibles en lápiz y papel como apoyo son las planas (proyecciones). Hasta hace relativamente poco tiempo, la única alternativa que los profesores tenían era emplear modelos tridimensionales de diversos materiales (madera, cartulina, etc.). Actualmente los modelos tridimensionales con el ordenador han modificado esta situación ofreciendo otras posibilidades para la enseñanza mediante animaciones y applets interactivos en 3D (Gutiérrez, 1996; M. Sinclair, Mamolo, & Whiteley, 2011).

Desde el *punto de vista didáctico*, en las investigaciones se indica que la enseñanza debe proporcionar herramientas para enriquecer las imágenes mentales de los estudiantes, haciendo especial énfasis en las imágenes visuales. Esto incluye por un lado, exponer a los estudiantes a imágenes visuales, ya sea a través de inscripciones, de gestos o de descripciones, y de otro lado, apelar a sus imágenes visuales. Esto puede hacerse a través de tareas del tipo "*Imagina…*". En relación a las diferencias individuales, se han encontrado relaciones entre el estilo de enseñanza del profesor y el aprendizaje de los estudiantes. Paradójicamente, los estudiantes visualizadores aprenden de forma más efectiva con profesores mixtos que visualizadores, ya que los primeros combinaban el uso de imágenes y métodos visuales con un énfasis en la generalización y la abstracción (Presmeg, 1985, 1997, 2006a). Por tanto, esta conducta parece adecuada para una enseñanza sensible con los diferentes perfiles de estudiantes. También se recomienda mostrar y aceptar métodos alternativos, incluyendo los más intuitivos, emplear métodos de búsqueda de patrones, retrasar el uso del simbolismo y utilizar deliberadamente conflictos cognitivos (Presmeg, 1999).

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN ESPACIAL	HABILIDADES DE ORIENTACIÓN ESPACIAL
1) Habilidad para imaginar la rotación de un objeto representado, el (des)doblamiento de un sólido y los cambios relativos de posición de los objetos en el espacio. 2) Habilidad para visualizar una configuración en la cual hay movimiento de sus partes. 3) Habilidad para comprehender movimientos imaginarios en tres dimensiones, y para manipular objetos en la imaginación. 4) Habilidad para manipular o transformar la imagen de un patrón especial en otra disposición.	1) Habilidad para determinar las relaciones entre diferentes objetos espaciales. 2) Habilidad para reconocer la identidad de un objeto cuando se mira desde diferentes ángulos o cuando se mueve. 3) Habilidad para considerar relaciones espaciales donde la orientación del cuerpo del observador es esencial. 4) Habilidad para percibir patrones espaciales y para compararlos entre sí. 5) Habilidad para no confundir las diversas orientaciones en las que puede presentarse un objeto especial. 6) Habilidad para percibir patrones espaciales o para mantener la orientación respecto a objetos en el espacio.
MODELO PROPUESTO POR GUTIÉRREZ (1996)	
1) Coordinación motriz de los ojos. Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz. 2) Identificación visual. Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varías partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas. 3) Conservación de la percepción. Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado. 4) Reconocimiento de posiciones en el espacio. Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia. 5) Reconocimiento de las relaciones espaciales. Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc. 6) Discriminación visual. Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales. Un ejemplo es el clásico juego, que aparece en los periódicos, de las 7 diferencias. 7) Memoria visual. Es la habilidad para recordar las características visuales Y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.	

Figura 3. 20: *Habilidades necesarias para el razonamiento espacial*. En la fila superior se distingue entre habilidades de visualización espacial y de orientación espacial, mientras que en la fila de abajo se presenta el modelo unificado de Gutiérrez (1996).

3.2.3.5 Visualizar es Traducir, Interpretar, Pensar Geométricamente

Las siguientes palabras de Galileo se citan con frecuencia:

> *El libro de la Naturaleza está escrito en el lenguaje de las Matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra suya; sin ellos uno está vagando a través de un oscuro laberinto*[51].

[51] *El ensayador*. Galileo Galilei. Editorial Aguilar. Buenos Aires, 1981, pág. 63.

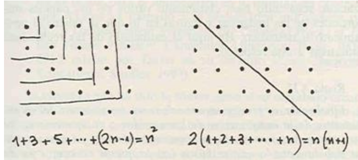
La definición de la visualización como proceso clave para la comprensión ha sido señalada por Zimmermann y Cunningham (1991):

> *We take the term visualization to describe the process of producing or using geometrical or graphical representations of mathematical concepts, principles or problems, whether hand drawn or computer generated. [...] If mathematics is the science of patterns, it is natural to try to find the most effective ways to visualize these patterns and to learn to use visualization creatively as a tool for understanding. This is the essence of mathematical visualization (pp. 2-3).*

Esta definición recoge bien la esencia de lo que muchos matemáticos consideran como visualización: involucra representaciones geométricas (algunos tienen una perspectiva más amplia e incluyen diagramas, grafos, etc.) y, lo que es más importante, pone el énfasis en que estas representaciones se deben percibir con los ojos, es decir, deben ser externas. Por tanto, esta postura se aleja radicalmente de la anterior centrada más en el proceso psicológico:

> *Our use of the term differs somewhat from common usage in everyday speech and in psychology, where the meaning of visualization is closer to Its fundamental meaning, "to form a mental image." For example, there are psychological studies which focus on the subject's ability to form and manipulate mental images. In these studies, there is no question of using pencil and paper, much less a computer, to answer the questions. From the perspective of mathematical visualization, the constraint that images must be manipulated mentally, without the aid of pencil and paper, seems artificial (Zimmermann & Cunningham, 1991, p. 3).*

Desde esta perspectiva, hay varios investigadores de EM que han estudiado la visualización desde un punto de vista epistemológico. Por un lado, desde el punto de vista histórico (Bråting & Pejlare, 2008; Davis, 1993; Giaquinto, 1994, 2007; Guzmán, 1996; Mancosu, Jørgensen, & Pedersen, 2005) proporciona un análisis como el que se muestra a continuación y ejemplos paradigmáticos como los de la Figura 3. 22. En estos estudios una pregunta central es cómo y hasta qué punto se deben utilizar las representaciones visuales, además de como evidencia y medio de descubrimiento de un enunciado matemático, como parte de su justificación (Biza, Nardi, & Zachariades, 2009). Por otro lado, desde un punto de vista de las prácticas y percepciones de los matemáticos expertos se han puesto de manifiesto las formas en que los matemáticos valoran y utilizan la visualización cuando investigan o resuelven problemas, tanto para desarrollar nuevas ideas como para comunicarlas (Burton, 2004; Nardi, 2008). Cuando esto ocurre, lo hacen de un modo flexible y bien articulado (Stylianou & Silver, 2004; Stylianou, 2002). Sin embargo, el uso de esta herramienta aparece escasamente en sus publicaciones científicas y en sus clases (Davis, 1993; Dreyfus, 1991). Aunque se han encontrado algunos casos opuestos de profesores que emplean métodos visuales en sus clases pero no en la resolución de problemas (English, 1997, p. 309). Estos comportamientos diferentes se estudian analizando el *status de la visualización* y tratando de responder a la cuestión ¿qué ocurrió desde los tiempos de Galileo a nuestros días para que se produjera esta devaluación del status de la visualización? (Dreyfus, 1991; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Stylianou, 2002).

La visualización en los orígenes	- Griegos (“*zeorema*”, lo que se contempla):
	   o La visualización era connatural a las Matemáticas.
	   o Pitagóricos antiguos: números y sus relaciones estudiados con piedras.
	
	
	- Platón: imagen-idea; sombra-realidad.
	- Los Elementos anteriores a Euclides y los del propio Euclides: continuas referencias a imágenes.
	- “*Aperías*” de Euclides: ejemplos de imágenes falaces en Geometría. Libro de texto.
	- Arquímedes: método analógico para sus descubrimientos matemáticos.

Los clásicos modernos	- Descartes, *“Reglas para la dirección del espíritu”*: hay varias reglas que hacen hincapié en el papel importante de las imágenes y figuras en lo que se refiere al pensamiento matemático. - Nacimiento de la Geometría analítica como intento de fusión de la imagen, de la Geometría sintética de los antiguos, con el Álgebra de su tiempo. - Cálculo del XVII: surge con un componente muy visual.
El decline de la visualización y el formalismo en el s. XX	- Cálculo: desde el s. XVII oscuridad que empeora con el descubrimiento de algunos ‘monstruos’, luz en el XIX con aritmetización de Weiestrass→ desconfiar de la intuición. $f(x) = \sum b^n \cos(a^n x)\pi,$  - Geometrías no euclídeas → independencia del espacio físico. - Teoría de conjuntos de Cantor → énfasis en lo formal (más seguro). - Resultados falsamente o incompletamente demostrados (Teorema de los cuatro colores, Teorema curva de Jordan)→ escudriñar con recelo los argumentos puramente intuitivos.

Figura 3. 21: Evolución histórica del papel de la visualización en el desarrollo de las Matemáticas (Davis, 1993; Guzmán, 1996).

Una revisión histórica muestra que, a pesar de que la visualización jugó un papel muy importante hasta el s. XIX, las tendencias formalistas que empezaron a dominar a partir del siglo XX la relegaron a segundo término (Guzmán, 1996, p. 30). Davis (1993) se refiere a este movimiento como el *“decline de la imagen”*, que para este autor comenzó con el desarrollo de la Geometría analítica en el s. XVII. Posteriormente, la aparición de la Geometría Proyectiva a inicios del s. XIX introdujo dos ideas que no tenían un correlato visual: objetos en el infinito y las geometrías complejas. A finales del s. XIX surgieron las Geometría no Euclídeas. Todo esto derivó en la independencia de la Geometría respecto del espacio, convirtiéndose en el estudio de sistemas abstractos de axiomas. Así, la Geometría sólo se diferenciaba de otras ramas de las Matemáticas en que en ocasiones modelaba algún aspecto particular del espacio físico de los humanos. El golpe final lo dio el descubrimiento de algunos “*monstruos analíticos*” –como las curvas continuas no diferenciables– que atentaban contra la intuición visual llevando a la aritmetización del Análisis y posteriormente a la revisión de los fundamentos de las Matemáticas. En la Figura 3. 21 se recogen los principales acontecimientos en relación a esta evolución del papel de la visualización a lo largo de la historia.

Ejemplos como los de la Figura 3. 22 hicieron dudar a la comunidad matemática de la validez y fiabilidad de los argumentos y demostraciones visuales, provocando desconfianza hacia lo visual. Este descenso del status de la visualización tuvo fuertes consecuencias tanto a nivel de investigación como de enseñanza, llevando a veces a propugnar que se prescindiera de ella completamente. El modelo formalista se instauró primero en la Universidad, fuertemente impulsado por los bourbakistas, pero caló rápidamente a Secundaria. Esta tendencia dominó durante mucho tiempo pero, a finales del s. XX, comienza haber indicios de cambio hacia un resurgir de la visualización en la actividad matemática. Distintos matemáticos reclamaron una reconsideración del significado de la demostración que diera mayor reconocimiento de la intuición y los teoremas visuales[52] (Davis, 1993; Guzmán, 1996). Desde la comunidad educativa, el interés también aumentó y se reflejó en un número creciente de investigaciones que, como señalamos al inicio de esta sección, se comenzaron a desarrollar a partir de los años 80.

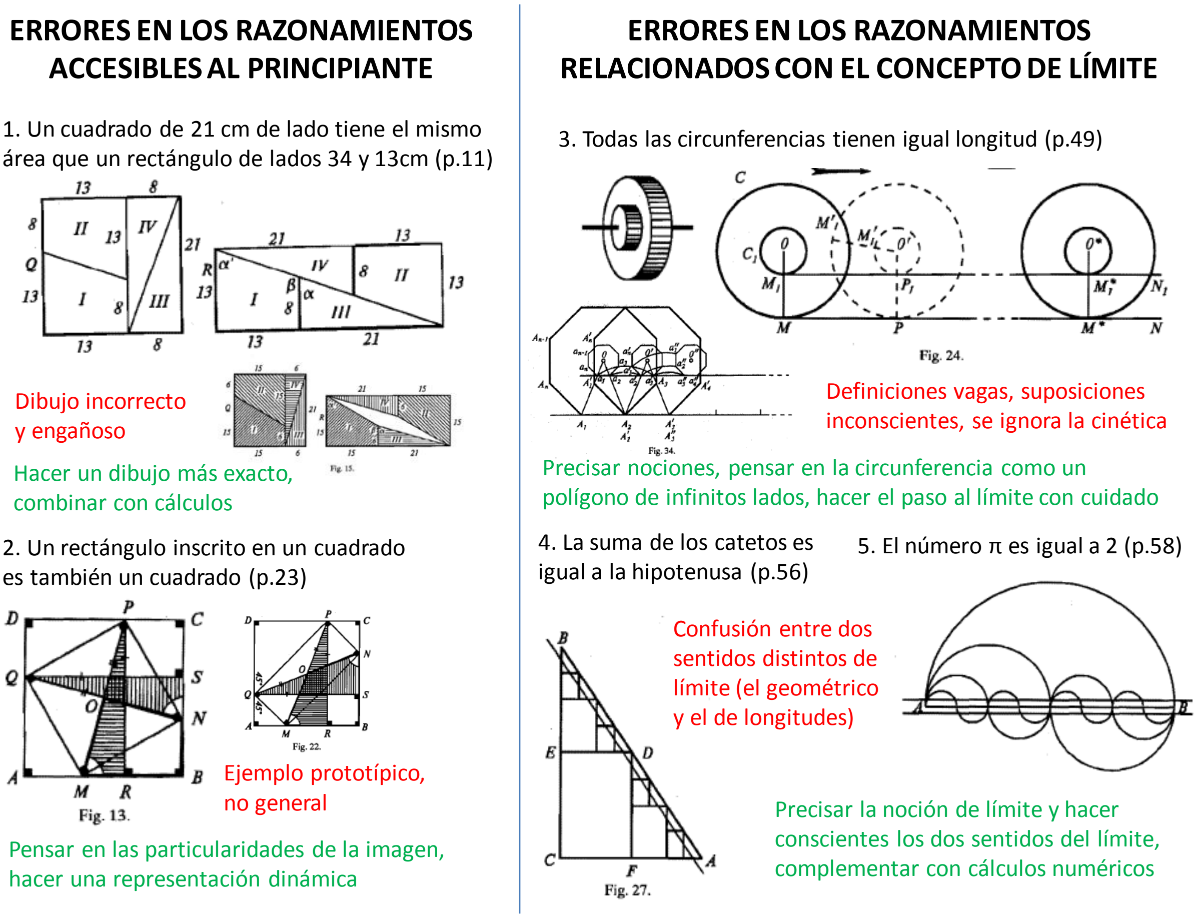


Figura 3. 22: *Ejemplos en los que la visualización puede llevar a engaños* (Dubnov, 1994). Dubnov (1994) distingue dos grandes clases de errores: los accesibles al principiante (columna izquierda, tienen que ver con demostraciones basadas en el uso de figuras geométricas, hay muchos relacionados con el axioma de las paralelas); y los relacionados con el concepto de límite (columna derecha, en este caso a veces intervienen otros factores como aspectos físicos, pero sobre todo se deben a una confusión en la idea de límite). En rojo se han indicado causas de los errores y en verde algunos mecanismos de control que pueden emplearse para evitarlos.

Gran parte de la responsabilidad de este cambio viene marcada por la influencia de las nuevas tecnologías, en la actualidad es una rama productiva de investigación (Presmeg, 2006a; Rivera, 2011). Un objetivo principal en estas investigaciones consiste en caracterizar y especificar la naturaleza exacta de la visualización en el trabajo matemático con el ordenador. Por ejemplo, algunos trabajos (Gómez-Chacón & Escribano, 2012; Gómez-Chacón & Kuzniak, 2011, 2013) han evaluado el efecto de un entorno dinámico en

[52] "*Un teorema visual es una salida gráfica o visual de un ordenador, que el ojo organiza en un todo coherente e identificable, y que puede inspirar preguntas matemáticas de naturaleza tradicional o que contribuye de algún modo en nuestra comprensión o en el enriquecimiento de alguna situación matemática o del mundo real*" (Davis, 1993, p. 333).

las relaciones en torno a los procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica y sus génesis: figural, instrumental (relativa a la construcción según las herramientas y sus configuraciones asociadas) y discursiva (relacionado con la argumentación y la demostración). En particular, en la formación de los estudiantes se debe tener en cuenta la construcción de una génesis discursiva vinculada con elementos de la génesis figural. La influencia de los ordenadores es tan importante que a menudo se identifica la visualización con ella. Sin embargo, coincido con Zimmermann y Cunningham (1991) en que es un error limitarse a este tipo de visualización en Matemáticas. En este estudio, la visualización con ordenador tiene un papel secundario.

Por otro lado, desde el *punto de vista didáctico*, Stylianou (2001, citado en Presmeg, 2006a) afirma que en la Universidad existe una aceptación y reconocimiento de los métodos visuales, aunque su tratamiento es aún muy superficial. Las razones de este tratamiento son variadas. Unas están referidas al currículo, sobre todo el que compete a la transición de la Secundaria a la Universidad, y otras están referidas a aspectos de naturaleza no sólo cognitiva. Por ejemplo, en relación a la enseñanza, hay quienes estudian las creencias del profesorado y la importancia del contrato didáctico (Biza et al., 2009) o la influencia del afecto en los procesos de visualización (Gómez-Chacón, 2012a, 2012b, 2013), con objeto de motivar un cambio en el currículo a favor de la visualización. Además se replantean criterios para el diseño de actividades de formación de profesorado (Blanco, 2010; Figueiras & Deulofeu, 2005; Gómez-Chacón, 2012a, 2012b, 2013).

Desde un orden práctico diferente, se encuentran ejemplos como los de la Figura 3. 22 en materiales didácticos que ayudan a poner en juego mecanismos de control, experiencia y familiaridad en el manejo de las figuras (aspectos resaltados como fundamentales en el uso efectivo de la visualización) y las discusiones en el aula. Ahora bien el uso de estos ejemplos debe realizarse con cuidado para evitar mensajes ambiguos sobre la visualización (Davis, 1993, pp. 334–335). Una buena muestra de cómo desarrollar este tipo de experiencias es el que se cuenta en el siguiente apartado sobre la cuerda que rodea la tierra (ver Figura 3. 23).

3.2.3.6 Visualizar es Visibilizar, Hacer Visible lo Invisible

Dieudonné acompaña el título de su libro Fundamentos de Análisis Moderno con la siguiente frase: "*Obra que procura auxiliar al estudiante a lograr la intuición de lo abstracto, tan esencial en la mente de un matemático moderno* (Castañeda, 2004, p. 113)". Según diversos autores la visualización está estrechamente relacionada con la adquisición de esta intuición de lo abstracto. Por ejemplo, Arcavi (2003) utiliza esa idea como *leitmotiv* de un artículo clave sobre visualización, titulado *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics*, y Miguel de Guzmán afirma que:

> *Y aun en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos que les acompañan en su trabajo haciéndoles adquirir lo que se podría llamar una intuición de lo abstracto, un conjunto de reflejos, una especie de familiaridad con el objeto que les facilita extraordinariamente algo así como una visión unitaria y descansada de las relaciones entre*

> *objetos, un apercibimiento directo de la situación relativa de las partes de su objeto de estudio (Guzmán, 1996, p. 17).*

¿Pero a través de qué mecanismos puede la visualización favorecer esa intuición de lo abstracto? Además de los ya vistos –el uso de diagramas, la coordinación de registros, el desarrollo de imágenes visuales y del pensamiento geométrico– se explican a continuación otros mecanismos como son la intuición, el uso de metáforas y ejemplos, y finalmente la conversión de información variada en imágenes (a veces denominado como visualización de datos).

Visualizar es intuir ("¡si no lo veo, no lo creo!")

Según Hilbert (1990), dos tendencias de pensamiento matemático conviven actualmente:

> *On the one hand, the tendency toward abstraction seeks to crystallize the logical relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward intuitive understanding fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live rapport with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations (p. iii).*

De estas dos tendencias, la segunda –la intuitiva– está estrechamente relacionada con la visualización, tanto que a menudo se identifican (Fischbein, 1987, p. 103). Como se vio en la concepción anterior, la visualización guiada por la intuición puede llevar a engaño. Pero el siguiente ejemplo (ver Figura 3. 23) de Papert narrado por Arcavi (2003) muestra cómo también puede ocurrir lo contrario, que una visualización sirva para reajustar una intuición errónea.

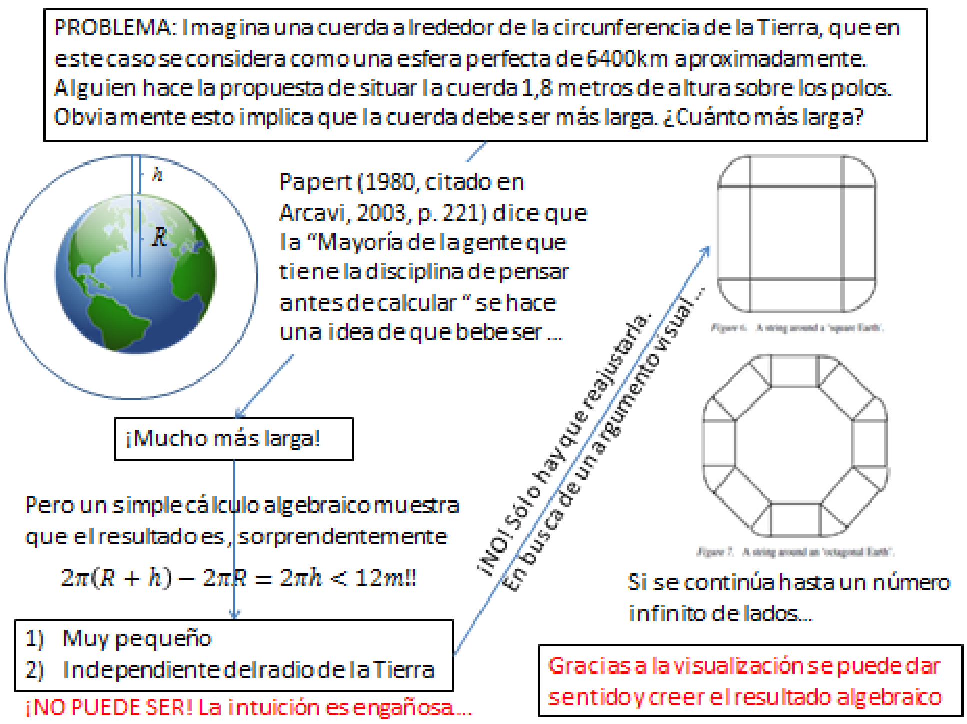


Figura 3. 23: Ejemplo de Papert sobre rodear la Tierra con una cuerda.

Fischbein establece que “*todo ser humano necesita actuar de acuerdo a una realidad creíble. Incluso dentro de una estructura conceptual, todo intento de razonamiento necesita una forma de certeza. El papel de la intuición es proveer ese tipo de certeza* (Gueudet-Chartier, 2002)”. Como ocurre en este ejemplo, la visualización tiene mucho que ver con ello: “*Si no lo veo no lo creo*”. Pero ¿qué se entiende por intuición? Según Piaget “*no hay nada más difícil de comprender para un psicólogo que eso que los matemáticos llaman intuición* (Duval, 1999a, p. 3)”. El trabajo de Fischbein es una de las pocas aportaciones al respecto. Según Fischbein (1987) la intuición es un tipo de conocimiento, un método particular de captar la verdad, la esencia de la realidad, y se caracteriza por las propiedades recogidas en la tabla de la Figura 3. 24.

La autoevidencia y la inmediatez	Una cognición intuitiva parece de manera subjetiva al individuo como directamente aceptable, sin necesidad de una justificación intrínseca [...]
La certeza intrínseca	Aun cuando la autoevidencia y la certidumbre están altamente relacionados no son reducibles una a la otra. [...] La alta intuitividad implica la combinación de un fuerte sentimiento de evidencia con un elevado nivel de confianza.
La perseverancia	Las intuiciones son adquisiciones estables, resistentes a interpretaciones alternativas.
La coercitividad/Carácter coercitivo	Las intuiciones ejercen un efecto coercitivo sobre las estrategias de razonamiento del individuo y sobre su selección de hipótesis y soluciones. [...] Las actitudes erróneas cognitivas inmaduras pueden sobrevivir en el individuo aun después de que él haya sido abastecido de representaciones y soluciones adecuadas.
El status de la teoría	Una intuición es una teoría, nunca una mera habilidad o percepción. Expresa una propiedad general percibida a través de una experiencia particular.
La extrapolaridad/Carácter extrapolable	Es a través de la intuición que extrapolamos de manera indirecta, a partir de una cantidad limitada de información, a datos que están más allá de nuestra percepción directa (por ejemplo, de lo finito a lo infinito). [...]
La globalidad	Una intuición es una cognición estructurada que ofrece una visión unitaria, global, en contraste con el pensamiento lógico el cual es explícito, analítico y discursivo. [..]
La implicitez/ Carácter implícito	Aun cuando aparentemente autoevidentes, las intuiciones están basadas en complejos mecanismos de selección, globalización e inferencia. [...]
La función conductual cognitiva de las intuiciones	La intuición es análoga de la percepción en el papel simbólico. [..]

Figura 3. 24: Características de la intuición según Fischbein (2004, citado en Cantoral, 2002).

En la teoría de Fischbein los modelos son una herramienta esencial que permite dar forma a las cogniciones intuitivamente aceptables:

> *A system B represents a model of system A if, on the basis of a certain isomorphism, a description or a solution produced in terms of A may be reflected consistently in terms of B and vice versa (Fischbein 1987 p.121).*

Se distinguen diversos tipos de modelos, de entre los cuales destacan los *modelos intuitivos* en oposición a los *modelos teóricos* (es decir, a la modelización matemática de una realidad). Un modelo intuitivo se puede percibir como una realidad concreta y puede ser producto de una teoría matemática si ésta permanece conectada a una realidad particular. Entre los modelos intuitivos se distinguen diversos tipos: analógicos y paradigmáticos. El estudiante o científico que se enfrenta a nuevos conceptos, a menudo intenta asociar y comparar el nuevo conocimiento con el ya existente. Así, la intuición puede conducir a la búsqueda de *analogías* o *modelos analógicos*, si el modelo es independiente del original, o a modelos paradigmáticos, si es una subclase de objetos (este tipo se tratará cuando se hable de ejemplos). Un modelo analógico implica una similitud de estructura entre ambos sistemas (Fischbein, 1987, p. 127) y su esencia es la transferencia de conocimiento de uno a otro. Esto puede producirse de diversas formas: *intramatemática* (entre sistemas que usan simbolismo numérico-algebraico o entre un sistema más intuitivo, como una representación geométrica, y otro simbólico); *extramatemáticas*. Éstos últimos involucran pensamiento matemático en torno a modelos que pueden ser representaciones materiales. En ese caso se habla de *modelos figurales*, que son útiles para definir la intuición geométrica (Gueudet-Chartier, 2002).

En estos modelos es fundamental la noción de *concepto figural* (Fischbein, 1993), que hace referencia a la doble naturaleza de las figuras geométricas: por un lado conceptual y por otro figural. Por ejemplo, una esfera geométrica es una idea abstracta (el lugar de los puntos del espacio que equidistan de un punto) que a su vez posee una forma determinada. Aunque pueden encontrarse en la realidad objetos que se asemejan a sus propiedades figurales, éstos nunca poseerán la perfección absoluta del concepto de esfera. Por tanto, a través de término de concepto figural se separa la representación visual de la estructura conceptual que interviene y controla la interpretación de dicha representación visual, es decir, la '*estructura conceptual interviniente*'[53]. Sin la posesión de esta estructura conceptual es difícil interpretar las figuras de forma adecuada, por ejemplo dejándose llevar de forma incontrolada por elementos irrelevantes. Esto es lo que les ocurre a muchos estudiantes (Arcavi, 2003, p. 232).

Además, la teoría sobre modelos intuitivos (Fischbein, 1987, p. 142) permite explicar otros "riesgos" de la intuición debidos a la existencia de una incompatibilidad entre una propiedad formal del sistema que está siendo modelizado y una propiedad intuitiva que, consciente o tácitamente, guía los procesos cognitivos. Fischbein señala la experiencia como una forma de combatir estas dificultades. Para ello distingue tres niveles de experiencia: (1) los elementos comunes a toda la experiencia humana; (2) las experiencias vinculadas a la cultura y el ambiente geográfico en el que vive cada individuo (intuiciones básicas); (3) las experiencias particulares propias de la vida de cada individuo (intuiciones individuales) (p.85). A través de la enseñanza se puede incidir en estas últimas, para que a lo largo del tiempo se produzca un sistema más estable de representaciones dando lugar a programas estructurados de acción y de espera.

Se hace notar que el enfoque de Miguel de Guzmán (1996) sobre la visualización es coherente con la noción de modelo de Fischbein, aunque este marco no se utilice en su trabajo. De hecho, uno de los cuatro tipos de visualización que Guzmán (1996) distingue es precisamente el analógico (ver Figura 3. 25).

[53] Se hace notar que esta visión es coherente con la noción de *concepto imagen evocado* (Tall & Vinner, 1981).

Tipos	Descripción
Isomórfica	"Los objetos tienen un correlato "exacto" en nuestra representación en cuanto a las relaciones que nos interesa estudiar,[…] de forma que nuestras posibles manipulaciones con los objetos de nuestra representación visual, podrían ser traducidos en las relaciones matemáticas abstractas que representan"
Homeomórfica	"En nuestra representación algunos de los elementos importantes tienen relaciones entre sí que imitan suficientemente para nuestros propósitos las relaciones entre los objetos que representan ofreciéndonos una ayuda poderosa para nuestros procesos mentales de búsqueda, demostración…"
Analógica	"En nuestra representación algunos de los elementos importantes tienen relaciones entre sí que imitan suficientemente para nuestros propósitos las relaciones entre los objetos que representan ofreciéndonos una ayuda poderosa para nuestros procesos mentales de búsqueda, demostración…"
Diagramática	"Nuestros objetos mentales y sus relaciones, en los aspectos que nos interesan, son meramente simbolizados de manera que los diagramas así obtenidos nos ayuden en nuestros procesos de pensamiento alrededor de ellos"

Figura 3. 25: Tipos de visualización según Miguel de Guzmán (1996, pp. 18–27).

Visualizar es transportar conocimiento a través de metáforas ("A es B")

Las metáforas logran proporcionar nuevo conocimiento, a veces muy abstracto, a través de la comparación mental de dos significados no necesariamente muy similares. Además, están estrechamente relacionadas con la visualización:

> *Visualization in mathematics are no pictures, no illustrations nor visual exemplifications. They act as metaphors. A metaphor must be spontaneous acceptable and intuitively evident; ... the probably oldest and most widely spread metaphor in mathematics [is]: "The equation is a balance" (Steinbring, 2005, p. 91).*

Presmeg (1998) considera la metáfora como una forma implícita de analogía (p.27). Una definición clásica de metáfora se debe a Du Marsais, en sus textos sobre patrones lingüísticos: "*la metáfora es un patrón, que transporta el significado de una palabra en un significado que sólo es válido en términos de comparación mental*" (Kadunz & Sträber, 2004, p. 243). De hecho, la idea de transporte está implícita en el término 'metáfora', que denota una traslación, llevar algo de un lugar a otro. Las metáforas comparan, de forma implícita, dos dominios de experiencia dando significado a uno (dominio diana (*target*) o tenor) a través de una referencia a las similitudes estructurales o prácticas del otro (dominio fuente (*source*) o vehículo). Así, hay una dirección en las metáforas, no es una relación simétrica: la metáfora permite mirar el tenor a través de las propiedades del vehículo. Sin embargo, también se produce cierto intercambio en sentido contrario (Kadunz & Sträber, 2004, p. 243). Como se muestra en la Figura 3. 26, en estos intercambios hay elementos comunes (la *base*) pero también diferentes (la *tensión*). Es precisamente esta confrontación de significados similares y diferentes, incluso no compatibles, la que empuja a buscar una interpretación y la que estructura una nueva experiencia en términos de las viejas estableciendo similitudes que antes de la metáfora no existían. De este modo, se produce innovación semántica y por tanto, nuevo conocimiento (Kadunz & Sträber, 2004).

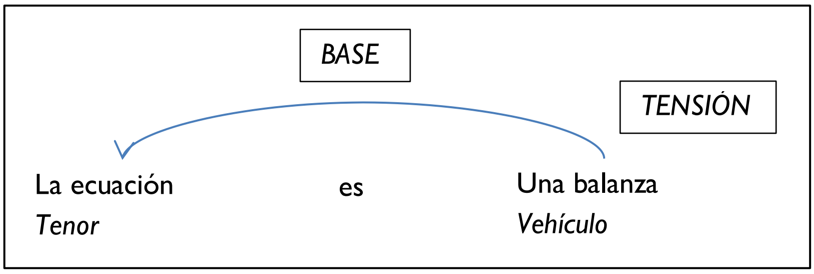
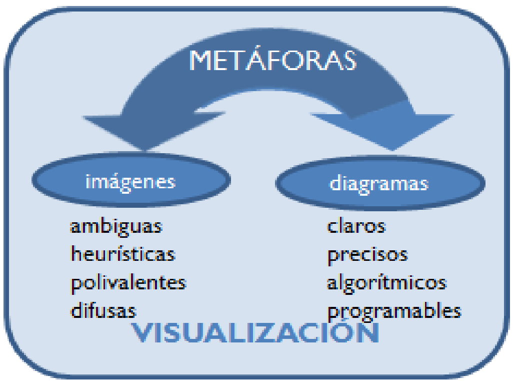


Figura 3. 26: Elementos y relaciones que intervienen en una metáfora (Presmeg, 2008, p. 5)

El estudio del papel de las metáforas en el pensamiento matemático es relativamente reciente dentro de la EM. Aparece de la mano de autores como Lakoff, Johnson y Núñez, estrechamente relacionado con las ideas de la embodied cognition, a finales de los años 90. Dos importantes obras para este campo son: *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and images* (English, 1997) y *Where Mathematics Comes From* (Lakoff & Nuñez, 2001). En un trabajo más reciente, especialmente interesante desde el punto de vista de la visualización, Kadunz y Sträber (2004) estudian el aprendizaje de las Matemáticas en términos de metáforas, diagramas e imágenes. Las imágenes se asocian con adjetivos como ambiguas, heurísticas, polivalentes, o difusas. Por el contrario, los diagramas son claros, precisos, algorítmicos e incluso programables por un ordenador. La bisagra que permite pasar de unas a otros son las metáforas. Éstas emergen de la ambigüedad de las imágenes, que encierra una gran riqueza de relaciones. Al mismo tiempo, esta ambigüedad puede ser causa de dificultades para los estudiantes. De hecho, dar una descripción metafórica de un problema no garantiza progreso hacia la solución. Para que esto ocurra, el manejo de metáforas se debe controlar a través del uso de diagramas. A todo este proceso, en el que es preciso un manejo flexible de las inscripciones (según el momento interesará verlo como imagen o como diagrama), lo denominan *visualización* y para ellos es esencial para el aprendizaje (ver resumen en la Figura 3. 27).



Kadunz y Sträber (2004) defienden que el aprendizaje de las Matemáticas se puede describir como un juego continuo entre imágenes y diagramas que ocurre del siguiente modo: "*de inscripciones empleadas como imágenes se construyen metáforas, las cuales se controlan a través de diagramas que siguen las reglas de las Matemáticas.* […] *La visualización se entiende como la conexión de imágenes y diagramas con la ayuda de las metáforas* (Kadunz & Sträber, 2004, pp. 245, 247)."

Figura 3. 27: Papel de la visualización en el aprendizaje de las Matemáticas según Kadunz & Sträber (2004).

Además de las metáforas, otras figuras retóricas se han aplicado al estudio los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, como la metonimia. Finalmente, en relación al significado, conceptos como la monosemia, polisemia (un mismo signo denota diferentes objetos relacionados entre sí) u homonimia (un mismo signo denota diferentes objetos no relacionados entre sí) también son útiles para describir fenómenos que ocurren en torno a las representaciones. Los profesores deben estar atentos a ellos, pues tratar un signo que pueda poseer diversos significados como monosémico, puede provocar dificultades en los estudiantes (Presmeg, 2008).

Visualizar es concretar a través de ejemplos (“¿qué hay de concreto en el ejemplo?”)

La metonimia, como la metáfora, también establece una relación entre dos dominios de experiencia de modo que uno se utiliza en lugar del otro. Sólo que en este caso (ver Figura 3. 28), se usa un elemento o un atributo que sobresale de una clase para utilizarlo en lugar de otro elemento o incluso de la clase completa (Presmeg, 1998, p. 26). La metonimia está relacionada con los modelos paradigmáticos de Fischbein (1987): ambos son tipos de ejemplos (*referencial* y *modelo* o ejemplos genéricos, respectivamente). Hay ejemplos de *puesta en marcha/lanzamiento* (*start-up*, que ayudan a motivar definiciones y resultados o a dotar de intuiciones una materia nueva), los *contraejemplos* (que muestran la falsedad de una conjetura y la necesidad de las hipótesis de un problema) y los *no-ejemplos* (que sirven para aclarar los límites de un concepto o procedimiento) (Bills et al., 2006).

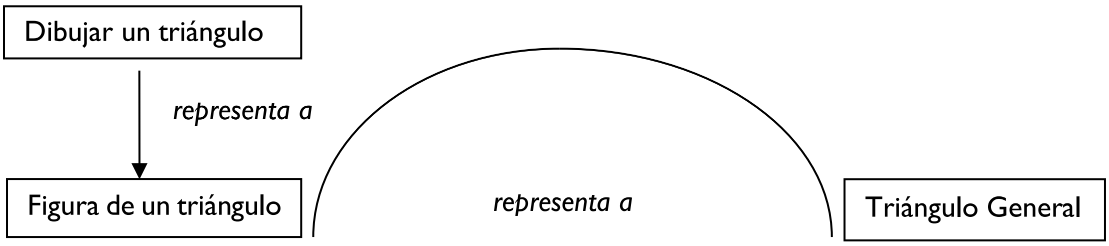


Figura 3. 28: Relaciones de abstracción/concreción que se producen en un ejemplo: el caso de dibujar un triángulo (Presmeg, 2008, p. 6)

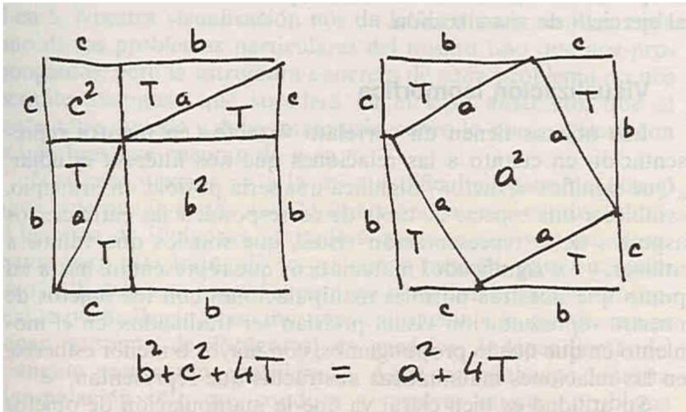
La importancia de los ejemplos y la ejemplificación en el pensamiento matemático está ampliamente reconocida por matemáticos, epistemólogos y educadores matemáticos (Antonini, Presmeg, Mariotti, & Zaslavsky, 2011, p. 191). A veces ocurre que razonar de forma general puede ser difícil y en ese caso un ejemplo puede dar comprensión:

> *I can’t understand anything in general unless I’m carrying along in my mind a specific example and watching it go (Feynman 1985, p. 244 citado en Bills et al., 2006, p. 130).*

Pero también es necesario ser capaz de hacer el proceso contrario:

> *[In doing mathematics]... we need to adopt the inductive attitude [which] requires a ready ascent from observations to generalizations, and a ready descent from the highest generalizations to the most concrete observations (Pólya 1945, p. 7 citado en Bills et al., 2006, p. 129).*

Los ejemplos son una síntesis única entre lo concreto y lo abstracto. En este sentido, la imaginería o los diagramas pueden considerarse como cierto tipo de ejemplos, ya que por su naturaleza son casos concretos, aunque a menudo se utilizan como medios de abstracción y generalización. Hay dos modos en los que los estudiantes suelen utilizar las imágenes para pensar con generalidad: (1) a través de imágenes concretas portadoras de información abstracta, como ocurre con las metáforas o las metonimias; (2) a través de los que Presmeg denomina como “*patrones de imágenes*” (ver Figura 3. 18) (Presmeg, 1997, p. 308). Pero el manejo de las imágenes y diagramas con generalidad presenta muchas dificultades para los estudiantes (ver Figura 3. 29), especialmente a los visualizadores. Por ejemplo, ocurre que toman dos líneas como paralelas sin más justificación que su apariencia en el diagrama. También sucede que los estudiantes permanecen atados a imágenes incontrolables[54] (denominadas así tanto por aparecer de forma espontánea en la mente del individuo como por su persistencia incluso ante evidencias contrarias) o a imágenes prototípicas (Presmeg, 1997, p. 306). Éstas les impiden reconocer figuras representadas de forma diferente a la que tienen en mente. Por ejemplo, si se posee la imagen prototípica de un triángulo rectángulo con el ángulo recto en la base, no se reconocerá cuando éste aparezca con la hipotenusa hacia abajo.



"Nos encontramos ante la misma dificultad genuina que al novicio le puede surgir ante la disección que nos condujo antes al teorema de Pitágoras. ¿Sucederá que esto que veo tan claramente para este triángulo va a ocurrir también para cualquier otro? Allí, tras una pequeña, pero no trivial, elaboración conceptual se puede llegar a percibir que la situación a la que queremos llegar (teorema de Pitágoras) es genérica, independiente del triángulo rectángulo considerado. Aquí sin embargo nuestra manipulación sólo nos conduce a resolver nuestro problema particular. No es poco, ciertamente, y además suele con frecuencias suceder que de tales manipulaciones iniciales concretas surjan luces que nos lleven a la solución del problema en su estructura abstracta (Guzmán, 1996, p. 21)".

Figura 3. 29: Dificultades de los estudiantes con los razonamiento generales a través de imágenes concretas (Guzmán, 1996, pp. 18–21)

Las líneas que marcan Bill y otros (2006), en el documento derivado del Research Forum sobre Ejemplificación que tuvo lugar en el PME30, dan una idea de los aspectos que se deben tener en cuenta en clase para evitar ese tipo de dificultades:

- *The sequencing and timing of a succession of examples, and both the dimensions of possible variation and their associated ranges of permissible change to which learners are afforded access.*
- *Ways of directing learner attention so as to perceive exemplariness.*
- *Ways of drawing teachers' attention to the importance of the choices of examples they make when working with learners.*
- *The role of worked-out examples in concept formation.*
- *Ways of directing learner attention so that sets of exercises are pedagogically effective* (Bills et al., 2006, p. 148).

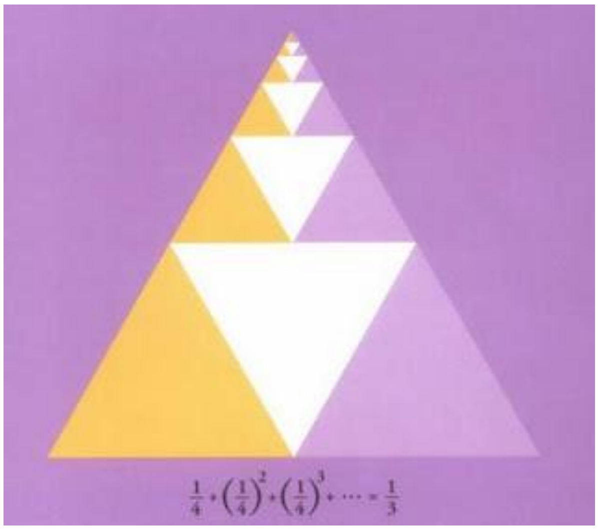
Visualizar es comunicar y vislumbrar nuevos caminos de comprensión. ("Una imagen vale más que mil palabras...")

"*... Es verdad, pero a condición de que la imagen llegue a ser entendida adecuadamente, pues de otra forma no valdrá nada*", como muchos autores han añadido (Arcavi, 2003; Guzmán, 1996, p. 22). En la sociedad actual cada vez circula una mayor cantidad de información. La

[54] Éstas no ocurren únicamente en contextos geométricos, hay estudios sobre este tipo de imágenes incontrolables en el contexto del Análisis Matemático, en particular sobre el concepto de derivada (Aspinwall, Shaw, & Presmeg, 1997).

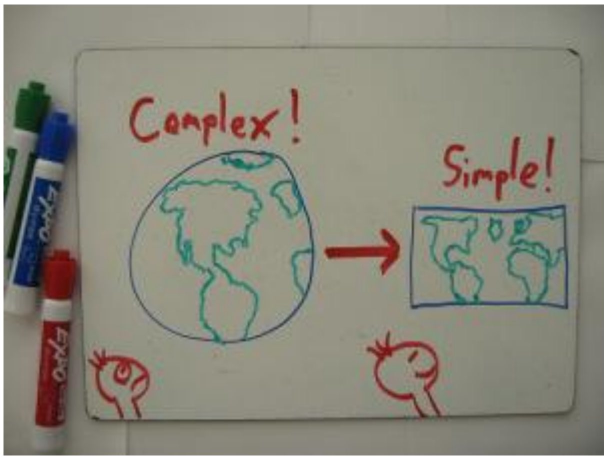
visualización de datos es una disciplina emergente que investiga nuevas formas de transmitir esa información a través de la visión. Para ello, ésta se centra en medios visuales por su gran poder de comunicación y porque dicen que ayuda a pensar (Card, Mackinlay, & Shneiderman, 1999).

a) El verdadero tamaño de África



b) Demostraciones sin palabras (Nelsen, 2000)

c) Nombres de los colores según géneros[55]



d) Matemáticas con dibujos malos, ¿Son los gráficos estúpidos?[56]

Figura 3. 30: Ejemplos en los que la visualización tiene un fuerte poder de comunicación. En los pies de cada imagen se explica brevemente qué trata de comunicar

Imágenes como las que se muestran en la Figura 3. 30 tienen el poder de transmitir una gran cantidad de información en un solo golpe de vista, en comparación con una explicación escrita que llevaría más tiempo descifrar. Según Arcavi (2003) esto es gracias a dos características de las imágenes y los diagramas: a) su organización bidimensional y no lineal opuesta a la organización secuencial y exposición lógica que seguiría una explicación en palabra escrita; b) su capacidad para agrupar grupos de información de tal

[55] http://flowingdata.com/2012/09/20/color-names-plotted-against-gender/

[56] "*A graph is not an end product. It's more like a map – a simplified picture of something big and complex, a schematic diagram that shows important features and omits distracting details*." (http://mathwithbaddrawings.com/page/2/)

modo que se pueden percibir en una ojeada, de forma similar a cómo vemos en nuestra vida diaria, ayudando así a "*reducir la búsqueda de conocimiento*" y a hacer los datos más "*fácilmente perceptibles*" (Arcavi, 2003, p. 218). Estas características, junto a la carga afectiva o cómica que puede tener una imagen (Figura 3. 30), favorecen que la información obtenida de este modo sea más fácilmente recordable y perdure más en la memoria.

Por otro lado, la representación de información en imágenes a menudo deja ver propiedades, relaciones y patrones que de otro modo quedan escondidos, facilitando la comprensión. Esto resulta muy útil en Matemáticas y ocurre, por ejemplo, al representar gráficamente una función. La representación gráfica exhibe propiedades difícilmente observables en su expresión algebraica o su tabla de valores asociadas: intervalos de crecimiento o decrecimiento, máximos y mínimos, diferenciabilidad, raíces, etcétera. Algo similar sucede con las 'demostraciones sin palabras' (Alsina Catalá, 2006; Nelsen, 1993, 2000). Éstas presentan los resultados de teoremas en un modo tan evidente y directo que apenas necesitan explicación para que el observador diga: "*¡Ajá, ya lo veo!*" (Gardner, 1978). Sin embargo, al mismo tiempo, Miguel de Guzmán (1996) advierte sobre esta aparente inmediatez en relación a una demostración de este tipo del teorema de Pitágoras (ver Figura 3. 29):

> *La pretendida absoluta inmediatez ante la anterior disección [Figura 3. 29] o alguna de las otras disecciones clásicas que tratan de poner de manifiesto el teorema de Pitágoras no deja de ser hasta cierto punto engañosa, pues todas ellas necesitan una labor de descodificación en la que es necesario introducir al no iniciado (Guzmán, 1996, p. 19).*

En una línea similar, Glaserfeld (1987) afirma: "*Una representación no representa por sí misma- necesita interpretación y ser interpretada, necesita un intérprete*[57]" (p.1). El papel del intérprete es fundamental y de hecho dos personas distintas pueden ver una misma imagen de modos completamente diferentes. Hay estudios que prueban que los científico leen los gráficos de forma diferente que los matemáticos (Whiteley, 2004, p. 2). También se produce esta diferencia con los estudiantes, que no ven las imágenes del mismo modo que sus profesores (Arcavi, 2003, pp. 232–233). La percepción de cada uno depende de lo que sabe, y por tanto de su *concepto-imagen* y, como se señaló con anterioridad, de la "estructura conceptual interviniente". Por este motivo, enseñar a visualizar no es una tarea fácil y requiere una conciencia muy clara, por parte del profesor, de que lo que él percibe como transparente (gracias a la familiaridad adquirida con la práctica a lo largo del tiempo) puede no aparecer como tal al estudiante que se está iniciando en este tipo de procesos (Guzmán, 1996, pp. 34–35). Guzmán (1996), basándose en experiencias de éxito que ha observado, recomienda hacer un esfuerzo en transmitir y hacer partícipes a los demás no sólo de los resultados a los que se llega, sino también de los procesos a través de los cuales se ha podido llegar a ellos, lo que incluye hablar sobre las visualizaciones empleadas. Por otra parte, se ha investigado cuándo las imágenes resultan más persuasivas y tienen un mayor poder demostrativo: esto ocurre cuando van acompañadas de texto (Inglis & Mejía-Ramos, 2008).

[57] "A representation does not represent by itself — it needs interpreting and, to be interpreted, it needs an interpreter. (von Glasersfeld, 1987, p. 1)"

Para explicar las visualizaciones se debe tener en cuenta, por un lado, que hay imágenes comúnmente aceptadas sujetas a convenciones que se deben explicitar, y por otro, que las imágenes producidas a nivel individual, por su naturaleza personal y subjetiva, pueden resultar difíciles de explicar. La explicación de una imagen es el proceso contrario al que se detalló al inicio del apartado –es transmitir información visual en palabras– de modo que las dos características que explicaban su poder de comunicación frente a la palabra, se vuelven ahora en contra: a) convertir la información no lineal en algo secuencial y lógico es difícil, b) decodificar los grupos de información, que en la imagen se percibían en un solo golpe de vista, lleva tiempo (Arcavi, 2005, p. 218). Estas observaciones se deben tener en cuenta cuando se utilice la visualización en clase.

3.2.3.7 Resumen. La Visualización en Esta Investigación.

Este largo recorrido por las diversas perspectivas sobre la visualización (resumido en la Figura 3. 31) establece el punto de vista amplio con el que partimos en esta investigación.

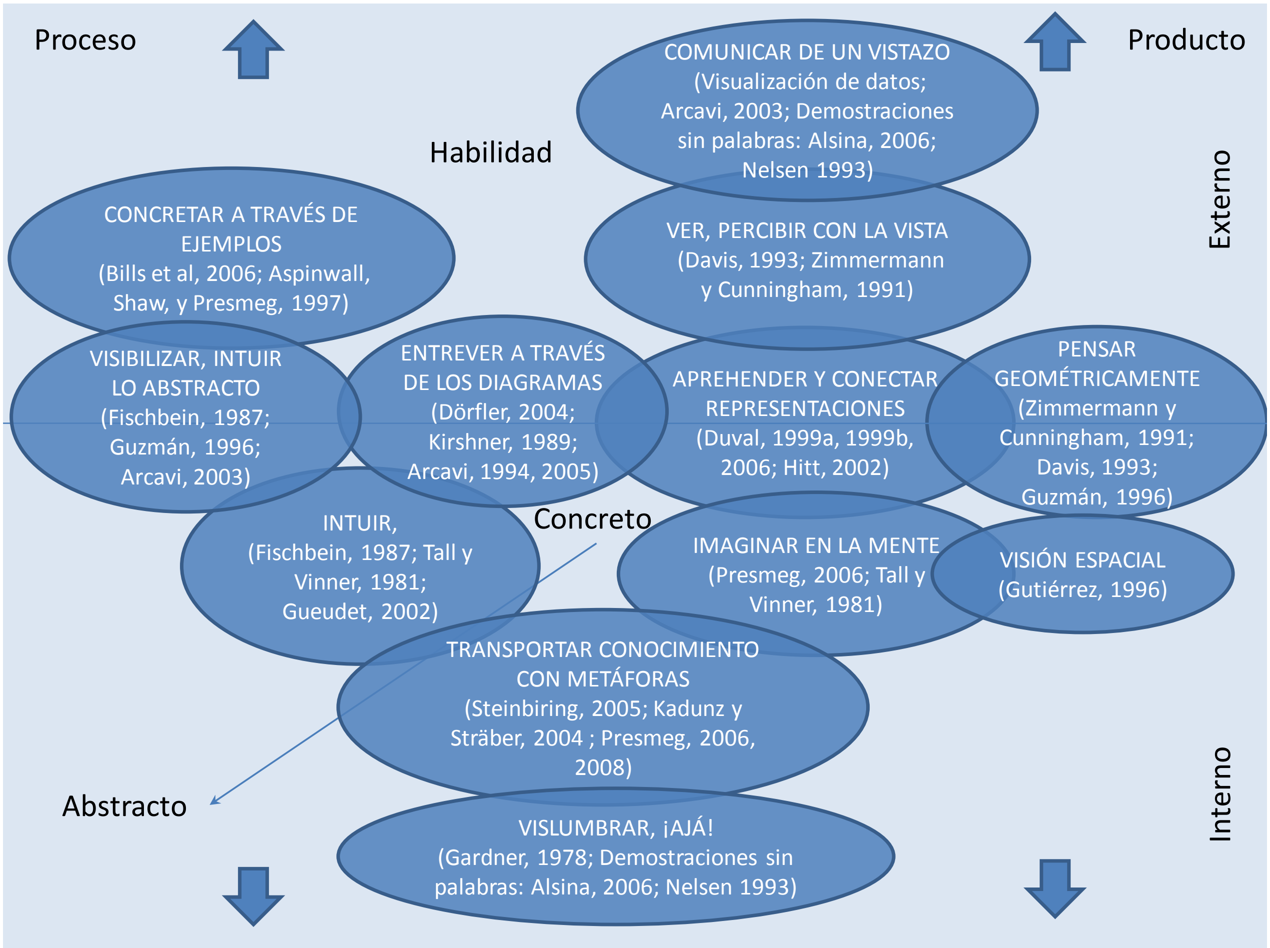


Figura 3. 31: Panorámica de las diferentes perspectivas sobre visualización. En la parte superior se han situado las perspectivas en las que la visualización aparece como algo más externo al individuo, mientras que la inferior, se han situado las que tienen que ver con procesos más internos. Sin embargo, ambas se conectan pues hay que imaginar el diagrama como si se tratara de un cilindro que se construye pegando los lados de arriba y abajo del rectángulo tal y como marcan las flechas. En el centro se sitúan perspectivas en las que la visualización trata con objetos de forma más concreta (diagramas, representaciones, metáforas) y éstos se van haciendo más abstractos a medida que se alejan (intuición, comunicación).

La conceptualización amplia planteada podría expresarse mediante las siguientes definiciones:

> *Con la visualización en Matemáticas se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las Matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. ... Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en Matemáticas (Guzmán, 1996, p. 16).*

> *Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings (Arcavi, 2003, p. 217).*

Esta segunda definición recoge tres dimensiones de la visualización que han aparecido en la revisión anterior y que se tienen en cuenta: visualización como *producto*, visualización como *proceso* y visualización como *habilidad*. Ambas hacen referencia a los *propósitos* para los que se puede utilizar. Todos estos elementos aparecen reflejados en la tabla de la Figura 3. 32.

<table>
<tr><th>PRODUCTO</th><th>PROCESO</th><th>HABILIDAD</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Términos empleados
- diagramas,
- imágenes (visuales),
- gráficos,
- dibujos,
- ilustraciones,
- esquemas,
- inscripciones (visuales),
- representaciones (icónicas y visuales),
- imaginería o imágenes mentales,
- gestos,
- movimientos,
- figuras (geométricas),
- configuraciones espaciales,
- animaciones,
- applets interactivos
Variables que los distinguen
- Externa/ interna/ no relevante
- Ambigua/ Clara
- Informal/ Formal
- Reconocible/ Convencional
- 2D/ 3D
- Estático/ Dinámico
- Pasivo/ Interactivo</td>
<td>Individuales
- Interpretar
- Representar
- Transformar y traducir
- Encapsular o reificar
- Generalizar y abstraer
- Reflexionar</td>
<td rowspan="2">Poder utilizar las inscripciones de forma flexible tanto como imagen como diagrama a través del uso de metáforas.
Saber identificar elementos matemáticamente relevantes: unidades de representación, relaciones entre ellas o con elementos externos, etc.
Poseer la capacidad de aprehender globalmente y de utilizar de forma heurística una imagen.
Ser capaz de conectar adecuadamente dos o más representaciones, concepciones, puntos de vista de un objeto.
Crear un esquema conceptual asociado a un objeto matemático y lograr articularlo de forma flexible.
Conocer y recordar diversidad de representaciones asociadas a un concepto para así ser capaz de elegir un registro de representación adecuado a la situación que se plantea.
Saber las reglas y las posibles manipulaciones que admite cierto diagrama.
Poder reconocer las variaciones de una visualización a otra y por tanto ser capaz de compararlas.
Ser capaz de imaginar mentalmente y anticipar los efectos de una determinada manipulación.
Ser consciente de los posibles equívocos a los que puede llevar el manejo de imágenes y desarrollar mecanismos de control sobre ellas.
Apreciar lo que hay de concreto y de abstracto una visualización particular.
Saber utilizar el lenguaje escrito u oral para explicar visualizaciones.
Ser capaz de invocar o utilizar la visualización cuando convenga.</td>
</tr>
<tr><td>Colectivos
- Comunicar a través de la visualización
- Discutir sobre visualización</td></tr>
</table>

PROPÓSITOS
- Para investigar y decidir: guiar la conducta de abducción, esto es, tomar decisiones basándose en una exploración y anticipación de los resultados. - Para complementar: apoyar o ilustrar el proceso que estás siguiendo formalmente. - Para comprender: dar nuevos sentidos o dotar de significado (a menudo a través de conexiones con conocimiento previo) mejorando la comprensión de un concepto, situación o problema que se plantea. - Para experimentar: tener una visión nueva de lo que está ocurriendo (más global, en un contexto diferente) que ayude en la creación de ideas y formulación de hipótesis. - Para descubrir: mostrar propiedades de los objetos que de otro modo pueden quedar ocultas, facilitando la búsqueda de relaciones y patrones. - Para convencerse de la falsedad o certeza de un resultado: probar la falsedad de un resultado mediante contraejemplos o para resolver el conflicto entre soluciones formales correctas e intuiciones incorrectas, ayudando a hacer resultados más creíbles y conectando con la intuición. - Para demostrar (según la concepción que se posea de las Matemáticas). - Para comunicar: en un solo golpe de vista una gran cantidad de información. - Para salir de un bloqueo.

Figura 3. 32: Dimensiones y propósitos de la visualización como producto, propósito y habilidad.

En relación a la visualización como *producto* han aparecido diversidad de términos (ver Figura 3. 32). Para referirme a todos ellos de manera general utilizaré los términos *visualizaciones* o *imágenes visuales*. Cuando se utilicen de forma aislada, se deberán tener en cuenta las variables en las que difieren unos de otros para interpretarlos correctamente (ver Figura 3. 32). Además, se han visto algunas tipologías de productos de la visualización según diferentes criterios. Se han mostrado las de Presmeg (Figura 3. 18) y Guzmán (Figura 3. 25) y ahora se añade una nueva debida a Dörfler (1991 citado en Presmeg, 2006a, p. 208). Salvando las diferentes perspectivas de la visualización que hay tras cada una, se pueden establecer algunas relaciones tal y como se muestra a continuación (Figura 3. 33).

GUZMAN(1996)	**PRESMEG (1986)**	**DÖRFLER (1991)**
Isomórfica	Concretas Pictóricas	Figurativa
Homeomórfica	Cinéticas	Operativa
Analógica	Dinámicas	De relacionar
Diagramática	De fórmulas en la memoria	Esquemas mentales simbólico
	De patrones	

Figura 3. 33: *Relaciones entre las diversas tipologías de productos de visualización presentadas*. Las relaciones entre la tipología de Guzmán y Presmeg se explica en el estudio previo (Souto-Rubio, 2009). Por otro lado, Presmeg (2006) establece una comparativa entre su clasificación y la de Dörfler (1991, citado en Presmeg, 2006a).

A menudo en Matemáticas, para marcar los límites de un concepto que se está definiendo, se ponen ejemplos de objetos o propiedades que no son ese objeto (serían lo que se han llamado no-ejemplos). Hemos mencionado que lo *visual* no es meramente *percepción visual*, no es *algorítmico* o *verbal*, *algebraico* o *analítico*, va más allá de lo *simbólico*, no es *lineal* ni *discursivo* y no se suele considerar como *formal*. El enfoque matemático aplicado a la noción de visualización también conduce a buscar regularidades, patrones que se repiten dentro de las distintas perspectivas. Algo común es la idea de *conexión*, de *relación* (a veces con una cierta dirección, otras en plena correspondencia) entre diversos tipos de elementos: representaciones, concepciones, significados, ámbitos de experiencia, intuiciones, etcétera.

DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS	RECOMENDACIONES DIDÁCTICAS
Dificultades de los estudiantes Quedan ligados a las propiedades visuales de los símbolos, lo que les limita para pensar de modo proposicional. Muestran una falta de coordinación de registros, lo que conlleva a una escasa comprensión de los conceptos. Se limitan a aprehender localmente las imágenes; la mayoría no es capaz de lograr una aprehensión global. Tienen dificultades con la aprehensión operativa de figuras y con los tratamientos en Geometría. Manejan las imágenes de forma limitada: predominando un uso ilustrativo sobre el heurístico y exhibiendo escasa variedad de tipos de imágenes. Cometen errores en los diversos procesos asociados a los registros de representación: desde la identificación de unidades de representación, a la construcción y conversión de representaciones. Tratan de que las imágenes respondan a lo que esperan ver (imágenes prototípicas), en general, uso incontrolado de imágenes (imágenes incontrolables) de modo que la imagen les induce a hacer suposiciones que formalmente no son tan obvias. No recogen todos los elementos que intervienen en la respuesta correcta o no ponen la atención en las relaciones o elementos relevantes. Se confunden con la ambigüedad de las imágenes y las metáforas o con la naturaleza polisémica u homónima de algunas representaciones. Tienen dificultades con la generalización y abstracción a través de la visualización. Carecen de los conocimientos necesarios y/o la experiencia para interpretar correctamente las imágenes. **Obstáculos y paradojas en la enseñanza:** - Relacionadas con la comprensión: se usa porque ayuda a la comprensión, pero a la vez se usa poco porque su manejo es difícil. - Relacionadas con el status de la visualización: se debe usar porque tiene un papel importante en el desarrollo de las ideas matemáticas pero no se usa demasiado porque puede llevar a engaños. - Relacionadas con la comunicación: tienen un gran poder comunicativo, pero para eso hay que entenderlas y son difíciles de explicar.	Combinarla con otros modos de pensamiento. Entrenar los distintos procesos asociados a ella por separado: es difícil desde un punto de vista cognitivo y no basta con enseñar a construir imágenes Utilizar deliberadamente conflictos cognitivos., especialmente en relación a visualizaciones engañosas, para desarrollar una actitud de alerta en los estudiantes y mecanismos de control sobre ellas. No confiar ciegamente/ de forma no controlada en su poder como profesores, hace falta atención explícita. Exponer en clase imágenes visuales que enriquezcan las imágenes mentales de los estudiantes y apelar a éstas en clase. Tener en cuenta la diversidad de perfiles de estudiantes y la preferencia por lo visual del profesor: los profesores más visuales no son necesariamente los más adecuados para los alumnos visualizadores. Enfatizar y explicitar aspectos relacionados con la generalización y la abstracción. Aceptar diversidad de soluciones, incluyendo las más intuitivas, y reflexionar sobre ellas en el aula. Transmitir no sólo los resultados sino también los procesos a través de los cuales se ha podido llegar a ellos, lo que incluye hablar sobre las visualizaciones empleadas. Considerar la experiencia y familiaridad con los procesos de visualización de quien enseña y quien está siendo enseñado, ya que es un factor muy importante a la hora de manejar la visualización. Revalorizar en clase el status de la visualización; para ello es necesario hay que cambiar las creencias de los profesores sobre la naturaleza de las Matemáticas, en la estructura y en la organización de la enseñanza: el tipo de tareas, las prácticas de la clase.

Figura 3. 34: Resultados de investigaciones sobre visualización. Dificultades de los estudiantes, obstáculos en la enseñanza de la visualización y recomendaciones didácticas.

Desde el punto de vista didáctico, se han recogido algunas recomendaciones didácticas (que se podrán tener en cuenta en los principios de diseño) en relación a dificultades que los estudiantes presentan (ver Figura 3.34). También se han señalado algunos *obstáculos y paradojas* en torno al uso de la visualización en clase que, siguiendo a Eisenberg y Dreyfus (1991) y después a Arcavi (2003), se pueden agrupan en tres categorías atendiendo a su origen: "*las cognitivas (visualizar es más difícil), las sociológicas (visualizar es más complicado de enseñar) y las relacionadas con las creencias en torno a la naturaleza de las Matemáticas (lo visual no es matemático)*" (Eisenberg & Dreyfus, 1991, p. 30). A estas últimas Arcavi (2003) las llama *culturales* (p.235). En el estudio previo (Souto-Rubio, 2009) se profundizó en las causas que influencian la existencia de diversos perfiles de estudiantes y se encontró una cuarta categoría de razones que afectan al uso de la visualización: las *afectivas*. De acuerdo con otras investigaciones (Gómez-Chacón, 2012b, 2013), los datos obtenidos en ese estudio mostraron que los contextos, la motivación, las creencias de autoeficacia o las metas del estudiante son elementos influyentes a la hora de elegir el modo de pensamiento o el tipo de representación para resolver un problema.

3.3 TEORÍAS LOCALES

Las Teorías Globales explicadas anteriormente se concretan en Teorías Locales según el contexto específico en que se realiza la investigación (en este caso, un curso de AL). Las Teorías Locales, que se exponen a continuación, son las que se desarrollan a través de un proceso de "*aproximaciones sucesivas*" y del aprendizaje del investigador. Éstas, en la práctica, van a guiar el diseño del experimento. Este capítulo se organiza en las siguientes secciones, siguiendo la estructura marcada por las Teorías Globales y teniendo en cuenta las características de la investigación desarrollada en AL:

- Panorámica general de investigaciones en AL, con especial énfasis en los resultados sobre dificultades de los estudiantes, sobre experiencias de enseñanza e innovación y sobre conceptos concretos.
- Representaciones y visualización en AL, donde algunas de las nociones teóricas vistas se particularizarán al contexto del AL y donde se resumirán algunas consideraciones a tener en cuenta en relación al uso de la visualización en procesos de enseñanza-aprendizaje del AL.

3.3.1 Antecedentes en AL

En las tres últimas décadas, la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del AL se ha convertido en un área muy activa en diversos países (ver Figura 3. 35). Una fuente bibliográfica clave para esta área es el libro editado por Dorier (2000), en el que los investigadores más relevantes del momento exponen sus resultados en torno a diversos aspectos, de los que se destacan: el obstáculo del formalismo y el meta-level (Dorier, Robert, Robinet and Rogalski), principio de enseñanza y aprendizaje del AL (Harel), modos de descripción y el problema de representación (Hillel), aspectos del pensamiento de los estudiantes en AL (Sierpinska) y otros trabajos de investigación como los que indagan en el uso de la Geometría para enseñar y aprender AL (Gueudet-Chartier). Además se han publicado documentos más breves que también revisan el estado del arte de esta área de investigación en diversos momentos (Aydin, 2009; Carlson, 2004; Dorier & Harel, 1997; Dorier & Sierpinska, 2001; Dorier, 2002).

En estas discusiones en torno a la cuestión de la enseñanza y el aprendizaje del AL a menudo se afirma que los cursos de AL están mal diseñados y que, independientemente de cómo se enseñen, resultan difíciles para los estudiantes, tanto cognitiva como conceptualmente (Dorier & Sierpinska, 2001). En palabras de Dorier (2002):

> *[T]he teaching of linear algebra is universally recognised as difficult. Students usually feel that they land on another planet, they are overwhelmed by the number of new definitions and the lack of connection with previous knowledge. On the other hand, teachers often feel frustrated and disarmed when faced with the inability of their students to cope with ideas that they consider to be so simple. Usually, they incriminate the lack of practice in basic logic and set theory or the impossibility for the students to use geometrical intuition. These complaints have a certain validity, but the few attempts at remedying this state of affairs - with the teaching of Cartesian geometry or/and logic and set theory prior to the linear algebra course - did not seem to improve the situation substantially (pp. 875-876).*

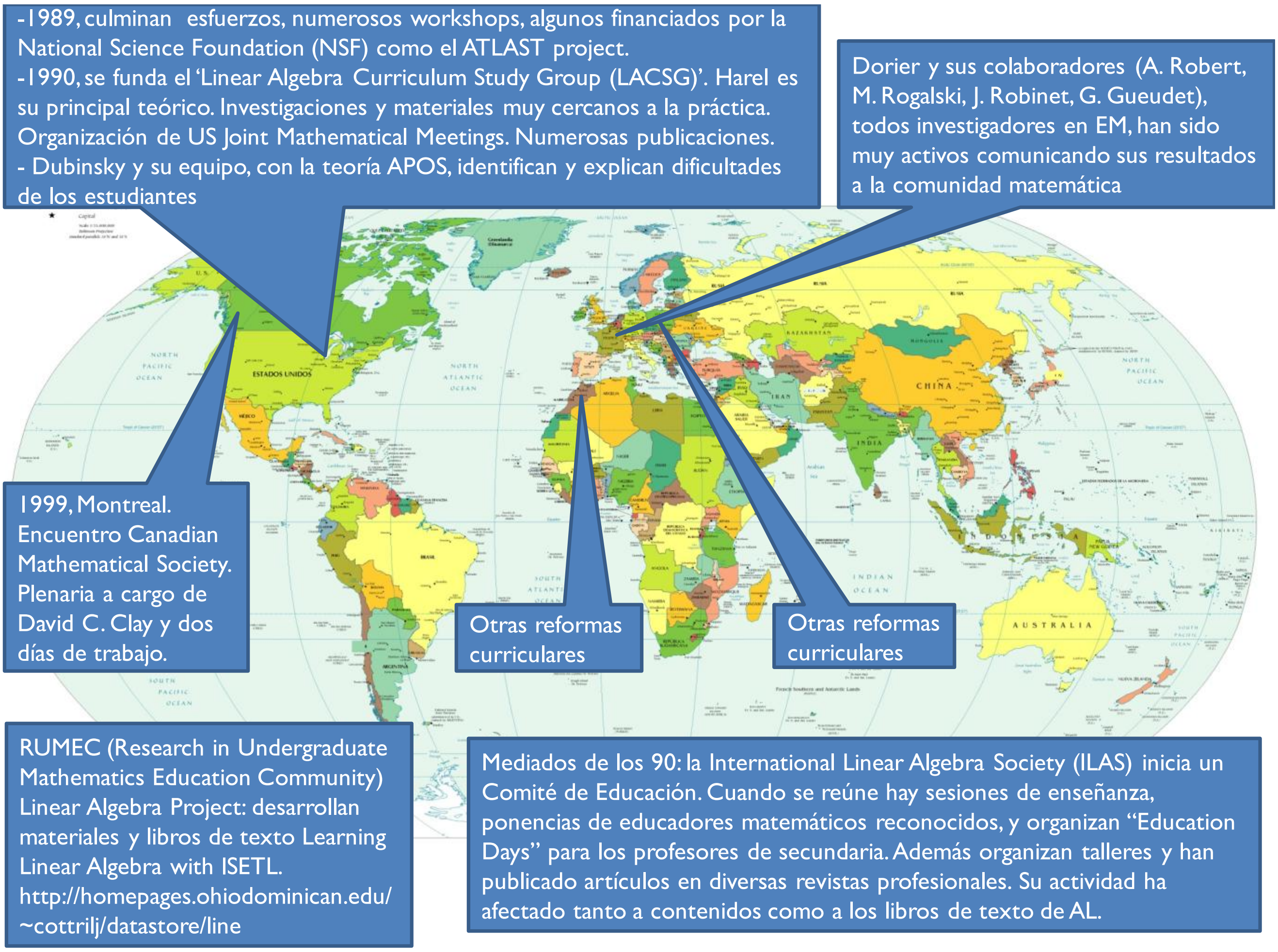


Figura 3. 35: Comienzos de la investigación en AL, tanto desde la comunidad matemática como de la de EM (Carlson, 2004; Dorier & Sierpinska, 2001).

La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del AL ha preocupado tanto a matemáticos como a educadores matemáticos (Figura 3. 35). En particular, Dorier y Sierpinska (2001) en su capítulo del ICMI Study sobre nivel universitario (Holton et al., 2001) titulado *Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra*, hacen una revisión de las investigaciones desarrolladas señalando tres direcciones: (a) acciones de reforma curriculares; (b) análisis de las causas y la naturales de las dificultades de los estudiantes; (c) experimentos de enseñanza controlados y basados en investigación (Dorier & Sierpinska, 2001). Entre las acciones de reforma curricular destacan las realizadas en USA, siguiendo las recomendaciones del LACSG. También se han realizado en otros países como Francia, Polonia o Marruecos (Figura 3. 35). Estas reformas curriculares han dado lugar a algunos libros de texto que: tienen un enfoque curricular diferente (Lay, 1994; Uhlig, 2002); ponen énfasis en el uso de la Geometría y de la visualización (Banchoff & Wermer, 1992; Farin & Hansford, 2005) o incorporan el uso de las TICs (Weller et al., 2002). Algunos de estos libros se analizan dentro del Estudio Inicial (ver sección 4.1.2.3). A continuación presentamos las otras dos líneas de investigación: dificultades de los estudiantes y experiencias de enseñanza. Terminamos revisando estudios sobre conceptos concretos que tienen alguna relevancia en esta investigación, como Aplicación Lineal o Espacio Cociente.

3.3.1.1 Dificultades en el Aprendizaje y la Comprensión del AL

Dorier y Sierpinska (2001) distinguen dos causas de dificultades para los estudiantes: la naturaleza del AL (dificultades *conceptuales*); y el tipo de pensamiento necesario para comprender el AL (dificultades *cognitivas*). Al mismo tiempo, señalan que para comprender realmente los procesos de comprensión y aprendizaje no se pueden separar unas de las otras (p.256). Carlson (2004) plantea una clasificación diferente en su capítulo sobre Álgebra a nivel terciario en el estudio del ICMI sobre pensamiento algebraico. Este autor distingue entre dificultades conceptuales y *motivacionales*, incorporando de este modo factores más afectivos y socioculturales. Entre las *dificultades conceptuales* se distinguen las siguientes:

- relacionadas con la lógica simbólica: el manejo no efectivo de cuantificadores puede producir fuertes dificultades a los estudiantes, incluso a aquellos que hayan podido estudiar lógica simbólica como tema específico dentro de algún curso de Matemática Discreta (p.294);
- relacionadas con las definiciones: en el contexto de AL, los estudiantes tienen dificultades en distinguir entre frases que son definiciones y frases que son implicaciones (p.295);
- relacionadas con la demostración: los estudiantes a menudo no son conscientes de su utilidad para probar la veracidad de un resultado y suelen confiar más en otro tipo de argumentos como pruebas empíricas o la autoridad del profesor (p.296);
- relacionadas con la abstracción: el carácter abstracto del AL provoca dificultades a los estudiantes que a menudo tratan de reducir ese nivel de abstracción a través de ejemplos prototípicos en lugar de usar definiciones (p.296).

Todas estas dificultades están relacionadas con el carácter formal del AL y lo que en la literatura se conoce como el *obstáculo del formalismo*. Un análisis epistemológico del desarrollo del AL (ver sección 4.1.1) muestra que la teoría axiomática de los espacios vectoriales surgió muy tarde, a finales del s. XIX, y sin embargo suele ser lo primero que se enseña. Esta teoría resultó interesante por su poder de unificación y generalización, marcando un nuevo nivel de abstracción (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 257). Así, los estudiantes se encuentran con que son capaces de resolver la mayoría de problemas que se les proponen en un primer curso sin hacer ninguna referencia a la teoría axiomática, la cual encuentran superflua y carente de sentido (p.270). Esta falta de relevancia en el curso y de conexión con el conocimiento previo, junto a las dificultades descritas, hace que los estudiantes sientan una falta de motivación para aprender una asignatura presentada de manera tan formal. Una solución a este problema sería dejar de enseñar la teoría axiomática de espacios vectoriales en estos niveles (Hillel, 2000). En la postura contraria están quienes creen importante introducir cuanto antes el lenguaje formal y la idea de estructura algebraica axiomáticas (como ocurre en el curso observado en esta investigación). Para ello, consideramos que el AL ofrece una buena oportunidad, siempre y cuando la cuestión del formalismo se maneje adecuadamente. En esta línea, Dorier y su equipo introducen lo que denominan "*actividades de metanivel*" (*meta level activities*). A través de ellas los estudiantes tratan y debaten de forma explícita 'meta problemas' (relacionados con la relevancia de los conceptos que se les enseñan, con el carácter general y unificador en relación a la teoría general, etc.) Éstos deben surgir en torno a problemas planteados en contextos matemáticos específicos y después serán evaluados (Dorier, Robert, Robinet, & Rogalski, 2000a; Dorier & Sierpinska, 2001, p. 258).

Además del exceso de formalismo, hay otros factores que afectan a la motivación de los estudiantes en el estudio del AL y que, por tanto, influyen en su rendimiento en esta asignatura. A grandes rasgos Dubinsky (citado en Carlson, 2004) señala que es importante que los estudiantes se den cuenta de que: (1) son capaces de tratar con un tema matemático (lo más importante); (2) necesitan tratarlo (se relaciona con el Principio de Necesidad de Harel, ver Figura 3. 36); (3) no hay una alternativa fácil a tratar ese tema (p.297). A un nivel más particular, la sensación de belleza, poder y utilidad de las Matemáticas que se pueden experimentar durante el estudio del AL son factores que pueden aumentar la motivación. Sin embargo, no siempre se explotan estas cualidades de la asignatura. Otros factores que se deben tener en cuenta y que modelan la motivación de los estudiantes son los factores individuales (su curiosidad intelectual, las experiencias previas, su respuesta positiva ante un reto y su deseo de obtener buenas calificaciones), las metodologías de clase empleadas (el uso de tecnología, el trabajo colaborativo, métodos de descubrimiento) y las variables sociales (como el género, el status socioeconómico, la edad o la trayectoria lingüística) (p.298).

Por último, el AL requiere un manejo flexible de una gran diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento, resultando difícil desde un punto de vista cognitivo. Esta capacidad necesaria para comprender y pensar en AL se conoce en la literatura como *flexibilidad cognitiva*, noción que ya introdujimos en relación a la *transición* (ver sección 3.2.1.2). Por su estrecha relación con la visualización, le dedicaremos la siguiente sección. Ahora, siguiendo a Dorier y Sierpinska (2001), ofrecemos la siguiente cita a modo de resumen:

1. *Linear algebra is an "explosive compound" of languages and systems of representation. [...] Teachers and texts constantly move between these languages, registers and modes of representation without allowing for the time necessary to make the conversions and discuss their validity.*
2. *Linear algebra is highly demanding from the cognitive point of view. On the most general level, an understanding of linear algebra requires a fair amount of 'cognitive flexibility' in moving between the various, viewpoints and semiotic registers. [...] Moreover, understanding of linear algebra requires the ability to resort to 'theoretical thinking'. Indeed, it is indispensable to have a means of control over context dependent way of thinking, like 'intuitions' and mental imagery, characteristic of 'practical thinking' (p.270).*

3.3.1.2 Experiencias e Innovación en la Enseñanza del AL

Según Dorier (2002) se pueden distinguir dos tradiciones en la enseñanza del AL: una que se centra en el estudio formal de los espacios vectoriales y otra que sigue un enfoque más analítico basado en el estudio de IR^n y el cálculo matricial (p.875). Independientemente del enfoque escogido, Harel (2000) inspirado por la "*abstracción reflexiva*" de Piaget postula tres principios que se deberían dar en la enseñanza del AL y que suelen transgredirse en la práctica (Figura 3. 36).

PRINCIPIOS	DESCRIPCIÓN	TRANSGRESIÓN EN LA PRÁCTICA
Principio de Concreción	Los estudiantes construyen su comprensión de un concepto en contextos que les resulten concretos. Para lograr la abstracción de una estructura matemática a partir de un modelo dado, los elementos de ese modelo deben ser entidades conceptuales a los ojos de los estudiantes quienes, sólo en este caso, pueden tomar dichos objetos como inputs en los procesos mentales que poseen.	Cuando se enseña el concepto general de Espacio Vectorial como generalización de estructuras (como IR^n, espacios de polinomios de grado limitado, espacios de matrices, de funciones continuas, etc.) a estudiantes que aún conciben sus elementos como entidades mentales.
Principio de Necesidad	Los estudiantes aprenden si ven en ello una necesidad (intelectual, en oposición a social o económica). El conocimiento se desarrolla como una solución a un problema y el aprendizaje se concibe más como el intento de dar sentido a una situación en un contexto en vez de como el resultado de una transmisión de información del profesor.	Cuando se pide a los estudiantes reproducir soluciones (pues éstos estarán aprendiendo más un comportamiento social que nuevo conocimiento matemático) o cuando se les pide probar propiedades generales de los espacios vectoriales en IR^n donde éstas les resultan evidentes($(-1)v = -v, \forall v \in \mathbb{R}^n$).
Principio de Generalidad	Se refiere más a las decisiones didácticas que tienen que ver con la elección de los materiales de enseñanza que con el proceso de aprendizaje en sí mismo: las actividades de enseñanza que involucran un modelo "concreto" (que cumpla el Principio de Concreción) deben permitir y fomentar la generalización de los conceptos.	Cuando los modelos que usan son demasiado concretos. Esto ocurre, por ejemplo, con la introducción geométrica de la dependencia lineal (como vectores colineales o coplanarios) que es difícilmente generalizable a espacios vectoriales abstractos.

Figura 3. 36: Principios de enseñanza de Harel y su transgresión en la práctica (Dorier & Sierpinska, 2001; Dorier, 2002; Harel, 2000).

También se han realizado y diseñado experiencias en busca de alternativas para la enseñanza del AL. Day y Kalman (1999) refieren algunas de ellas: (1) variaciones de clases magistrales enriquecidas a través del método de discusión intensiva y el uso de MATLAB generando ejemplos a los que contribuyen los estudiantes; (2) variaciones de las clases magistrales derivadas de la combinación con un método de aprendizaje colaborativo donde el profesor, tras haber explicado un tema nuevo, debate con los estudiantes o les presenta un test de opción múltiple con el objetivo de averiguar lo que han entendido de la clase y establecer una discusión con la que se corrigen posibles errores; (3) en otras ocasiones no se dan clases magistrales y éstas se sustituyen por sesiones de trabajo autónomo (individual o en grupos) en la sala de ordenadores utilizando manuales escritos con Maple y Mathematica (Day & Kalman, 1999, p. 11).

El uso de las nuevas tecnologías ha dado lugar a numerosas investigaciones en la enseñanza del AL (Aydin, 2009, p. 96). El software empleado es diverso: general de Matemáticas como MATLAB, Maple o Mathematica; más específico de programación como el ISETL (Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics, & Oktaç, 1997; Weller et al., 2002); de Geometría Dinámica, como Cabri-Geometry II (Dreyfus, Hillel, & Sierpinska, 1999); software libre, como el GeoGebra o SAGE en materiales para smartphones (Lee, 2012); tecnologías empleadas en la educación a distancia u online –como cursos virtuales, foros o páginas web– que permiten otras formas de interacción (Carlson, 2004, p. 302). Los beneficios de la enseñanza con ordenadores tienen que ver con las oportunidades de experimentación y descubrimiento (al ahorrar difíciles cálculos o a través de la visualización) facilitando una mejor comprensión y un aprendizaje más conceptual de la asignatura, desarrollando la intuición y la curiosidad (Hillel, 2001). Pero aún es necesario realizar más investigaciones que ayude a tomar decisiones sobre qué cantidad y tipos de tecnologías son más recomendables y sobre qué didáctica debe acompañar a su uso (Aydin, 2009, p. 96; Carlson, 2004, p. 302). Este tipo de conocimiento específico relativo al uso de ordenadores en la enseñanza universitaria no es fácil de adoptar por las instituciones educativas, tradicionalmente desarrolladas en entornos de lápiz y papel (Artigue, 2001, p. 217). Por eso en este estudio hemos decidido no prestar especial atención al uso de ordenadores: el estudio de la visualización es suficientemente complejo como para añadir la variable tecnología.

Por último, más en consonancia con el espíritu de esta investigación, se han desarrollado experimentos longitudinales de enseñanza, es decir, estrategias de larga duración que no se pueden dividir en módulos independientes (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 267). El aspecto longitudinal es importante si se tiene en cuenta que la formación matemática y los cambios en el "contrato didáctico" requieren un tiempo suficientemente largo (que incluya fases de evaluación) para hacerse efectivos. Además, esta perspectiva es sensible con el carácter no lineal de la enseñanza, donde un mismo tema puede aparecer estudiado desde varios puntos de vista en diferentes momentos del curso. Entre este tipo de estudios cabe destacar el trabajo de Behaj (Dorier & Sierpinska, 2001; ver Dorier, 2000, pp. 259–262) en torno lo que él llama la "*estructuración del saber*" y el análisis de Sierpinska (1997, citado en Dorier & Sierpinska, 2001) sobre la relación entre la interacción tutor-estudiante-libros de texto (descrito como '*formatting*') y el tipo de conocimiento que se aprende. Pero uno de los ejemplos más destacados de experimento longitudinal es el curso experimental diseñado por Rogalski y su equipo en Francia ((Dorier, Robert, Robinet, & Rogalski, 2000b)). Este curso se construye en torno a diferentes estrategias de larga duración estrechamente conectadas que incluyen actividades metanivel (*metalevel activities*), cambios de registros, puntos de vista y marcos. Las principales características del diseño de enseñanza de este curso son:

- *In order to take into account the specific epistemological nature of the concepts, some activities are introduced, at a favourable and precise time of the teaching, in order to induce a reflection on a 'meta' level.*
- *A fairly long preliminary phase precedes the actual teaching of elementary concepts of LA. It prepares the students to understand, through 'meta' activities, the unifying role of these concepts.*
- *As much as possible, changes of settings and points of view are used explicitly and are discussed.*
- *Finally, the concept of rank is given a central position in this teaching* (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 268).

Este tipo de experiencias sirven de inspiración para el desarrollo de experimentos de enseñanza y principios de diseño en este estudio (ver secciones 3.4.2 y 5.3).

3.3.1.3 Investigaciones sobre Conceptos Concretos

Por último, es pertinente reseñar investigaciones realizadas en torno a los conceptos de *Aplicación Lineal*, *Proyección* y, principalmente *Cociente*, que abordamos en el presente estudio.

Respecto a las *Aplicaciones Lineales* se han realizado numerosas investigaciones, especialmente sobre: descomposiciones genéticas del concepto (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010); las posibilidades de visualización del concepto desde un punto de vista matemático (Hern & Long, 1991); los modelos intuitivos de las transformaciones lineales en contexto geométrico que utilizan profesores o estudiantes (Gueudet-Chartier, 2002; Molina & Oktaç, 2007); diseños de enseñanza específicos (a menudo con software de Geometría Dinámica) que sirven tanto para explorar como desarrollar las concepciones de los estudiantes sobre las Aplicaciones Lineales (Dreyfus et al., 1999; Karrer & Jahn, 2008; Klasa, 2010). Estas investigaciones a veces se ejemplifican con el concepto de *proyección* (Dreyfus et al., 1999), y especialmente con el caso de *proyección ortogonal* (Gueudet-Chartier, 2002, 2004), en cuestionarios y actividades.

Como una contribución original al campo de la didáctica en AL, en este estudio el concepto de *Espacio Vectorial Cociente* ocupa un lugar destacado. Las investigaciones encontradas sobre este concepto normalmente se desarrollan en torno a revisiones históricas o descomposiciones genéticas dentro del contexto del Álgebra Abstracta, ya sea dentro de Teoría de Grupos (Asiala et al., 1997; Dubinsky, Dautermann, Leron, & Zazkis, 1994; Nardi, 2000; Nicholson, 1993) o, más en general, dentro de la Teoría de Conjuntos (Chin y Tall, 2001; Hamdan, 2006). Se ha tratado de contribuir al estudio epistemológico de este concepto (ver sección 4.3.1) identificando literatura relativa a niveles educativos inferiores, sobre las nociones de ratio y fracción (Adjiage & Pluvinage, 2007; Charles & Nason, 2000; Confrey & Carrejo, 2005). En estas investigaciones se menciona la dificultad que los estudiantes encuentran con la noción de relación de equivalencia (Chin & Tall, 2001, p. 1) –afectando a otras nociones relacionadas como Clases de Equivalencia, Particiones y Conjuntos Cociente– y con los Grupos Cociente (Asiala et al., 1997, p. 302) así como la pobreza de las construcciones mentales de los estudiantes en torno a estos conceptos, demostrando una gran compartimentación y una escasa comprensión de los mismos (Hamdan, 2006). Los resultados de Asiala et al. (1997) sugieren que una posible respuesta a estas dificultades podría ser una aproximación constructivista para la enseñanza de los Grupos Cociente (p.302). En AL, donde el concepto de Cociente se basa en estas nociones previas y aparece junto a una estructura algebraica más compleja –la de Espacio Vectorial– es de esperar que estas dificultades aparezcan de forma aún más aguda. Por tanto, la investigación de este tema está completamente justificada. Sin embargo, no existe ningún estudio al respecto. Con este trabajo se pretende contribuir a este campo sin explorar del AL.

3.3.2 Representaciones y visualización en AL

Como hemos señalado anteriormente una de las principales dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del AL está relacionada con la variedad de diagramas, registros de representación, lenguajes, modos de pensamiento y puntos de vista que conviven en esta disciplina. El manejo de todos ellos y su correcta articulación requieren múltiples habilidades que se han referido, de forma general, como "*flexibilidad cognitiva*". Ésta involucra las capacidades de: manipular y observar diagramas, de distinguir unas representaciones de otras y de los objetos que se representan, de traducir de un lenguaje a otro, de cambiar el punto de vista con el que se mira cierto objeto matemático, etcétera. Muchas de estas habilidades se estudiaron en relación a la visualización y por ello afirmamos que existe una estrecha relación entre ambas. Por otro lado, también en relación con la visualización, se han desarrollado investigaciones sobre el *papel de la Geometría* en la enseñanza del AL y sobre cómo ésta puede servir para facilitar (o bloquear) el camino hacia el formalismo y la abstracción propios de esta disciplina.

Figura 3. 37: *Esquema de las investigaciones en AL sobre visualización a través de su relación con el estudio de la flexibilidad cognitiva y el uso de la Geometría como posible vía de intuición de lo abstracto y lo formal de esta disciplina.* En el esquema se muestran las concepciones de la visualización y los diferentes marcos teóricos en los que se basan las diversas investigaciones.

A continuación profundizamos sobre la visualización en AL a través de estas relaciones con la flexibilidad cognitiva y el uso de la Geometría (cuyas ideas fundamentales, marcos teóricos y autores se resumen en la Figura 3. 37). Seguimos un orden similar al de las concepciones sobre la visualización, descritas en la sección 3.2.3, con las que se ha establecido una relación cuando ha sido posible (ver Figura 3. 37). Comenzamos con el pensamiento diagramático en AL y el trabajo de Dörfler, seguido de trabajos relacionados con el uso de diversas representaciones (que en AL se generaliza a marcos, lenguajes y puntos de vista). Continuamos revisando trabajos en torno a la creación de imágenes mentales ricas (que se basan en diversos marcos teóricos relacionados con el PMA) y finalizamos con los trabajos relacionados con el uso de la Geometría (que en AL aparece estrechamente ligado a la intuición de lo abstracto). Las últimas categorías sobre visualizar como acción de ver lo invisible apenas están presentes en la literatura de AL: uso de analogías y metáforas (en un contexto más amplio que el geométrico), papel en los ejemplos, herramienta para la comunicación y la resolución de problemas. En esta investigación mantendremos una visión amplia sobre la visualización en AL con la que se espera lograr identificar aspectos en relación a estas últimas categorías.

3.3.2.1 Pensamiento Diagramático en AL

Dreyfus, Hillel y Sierpinska (1999) han detectado que la dificultad derivada de razonar a niveles muy abstractos conduce a los estudiantes a desarrollar un estilo de aprendizaje memorístico ("*rote learning*") que se traduce en "mecanismos de defensa" consistentes en producir discursos escritos en un modo formal, similar al que encuentran en los libros de texto o en las clases magistrales, pero sin llegar a comprender el significado de los símbolos o la terminología (Aydin, 2009, p. 95; Dorier & Sierpinska, 2001, p. 262). Para estos autores éste es uno de los principales problemas en el aprendizaje del AL. Para erradicarlo diseñan una entrada en el AL que busca el aprendizaje "con significado" –a través de construcciones en un entorno de Geometría Dinámica– donde es mucho menos probable que aparezca este tipo de comportamiento. A pesar de algunas evidencias de éxito (se reduce el número de apariciones de discursos formales sin sentido) algunas dificultades persisten y el tipo de comprensión que se obtiene no siempre corresponde con el que se pretende en la teoría del curso (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 262).

Desde la perspectiva del pensamiento diagramático, planteamos otra opción para combatir este problema. Desde este enfoque se defiende que los diagramas no son sólo mediadores hacia entes mentales sino que son objetos de exploración y aprendizaje en sí mismos. Cuanta más experiencia se tiene en la observación, manipulación y reflexión de diagramas menos se producirán conductas como las descritas. Así, un modo de evitarlas sería proponer actividades y experiencias explícitas en relación al manejo de diagramas, como las que Dörfler (2007) describe sobre matrices: saber qué es una matriz y cuáles son sus entradas, ser capaz de mirarlas de distintos modos (por filas o por columnas, distinguir la diagonal o submatrices), tratar con casos extremos (como matrices filas o columna); crear nuevos diagramas a partir de los dados (como la trasposición) o transformarlos de modo que resulten visualmente más claros (como una nueva notación para las columnas); estudiar operaciones (como la multiplicación) y observar sus efectos en busca de patrones que conducen a deducir reglas y teoremas de validez más general; comunicar y hablar sobre este tipo de experiencias con los demás. De este modo, los estudiantes pueden desarrollar el sentido del símbolo y llegar a obtener intuiciones adecuadas sobre las relaciones que cierto diagrama implica, evitando discursos formales sin sentido.

3.3.2.2 Registros de Representación Semiótica y Puntos de Vista en AL

Kallia Pavlopoulou, en su tesis, utiliza la teoría de los registros de representación de Duval en el contexto del AL (Dorier, 2000, pp. 247–252). Toma como punto de interés principal el concepto de vector, definiendo tres tipos de registros, cada uno con sus propias reglas y códigos de funcionamiento (Figura 3. 38): el registro *gráfico* (flechas), el registro de *tablas* (columnas o filas de coordenadas) y el registro *simbólico* (teoría axiomática de espacios vectoriales, con letras minúsculas –a veces con una flecha encima– o combinaciones de ellas).

REGISTROS EN AL (Pavlopoulou)	**REGISTROS EN AL (Alves Dias)**
Gráfico	*Gráfico*
Tablas	*Representación paramétrica intrínseca-explícita,* como: A= L[a,b] = {v/ v=α a+β b, con α , β ∈ IR} *Representación implícita-paramétrica*, como: A= L[(1 ,-2,1 ,0),(1 ,-3,3,1)] *Representación paramétrica explícita-de tablas,* como: A= L[(1,0,0),(0,1,0)]= {α (1,0,0)+β (0,1,0), con α, β ∈ IR} *Representación paramétrica implícita-de tablas*, como: A={(α,β ,0), con α, β∈IR} *Representación cartesiana intrínseca,* como: A={v/ T(v) =0}, siendo T un operador lineal *Representación explícita cartesiana,* como: A={(x,y,z) ∈ IR^3 / z=0 y 2x+y=0}
Simbólico	*Representaciones simbólicas intrínsecas*: $U, V, U \cap V, U \subset V$
Lenguaje natural	*Lenguaje natural*

Figura 3. 38: *Tabla resumen de los tipos de registros de representación semiótica definidos por Pavlopoulou* (Dorier, 2000, pp. 247–252, columna de la izquierda) *para vectores y el refinamiento de Alves Dias* (Dorier, 2000, pp. 252–256, columna de la derecha) al pensar en subespacios y en los puntos de vista cartesiano y paramétrico. Alves Dias distingue entre las representaciones intrínsecas y no intrínsecas, dependiendo de la base considerada para su expresión semiótica (Alves-Dias, 2007).

Este enfoque resulta útil para interpretar algunas dificultades de los estudiantes, como las derivadas de la conversión o las producidas por la confusión de un objeto con su representación (en especial con un vector y su representación geométrica). Los análisis sobre la conversión de un registro a otro en AL ponen de manifiesto que las conversiones que involucran el registro simbólico son más difíciles para los estudiantes, y que la dirección es importante (es más difícil convertir *al* registro simbólico que *del* registro simbólico). La propuesta de enseñanza de Pavlopoulou presta atención especial a la cuestión de los registros y, en particular a la conversión, con claros resultados en la mejora de los alumnos. Sin embargo, sus experimentos han recibido críticas al ser del tipo experimental clásico: grupo experimental y de control, pre-test y post-test en la que la equivalencia de grupos es difícil de lograr. Por tanto, sus resultados deberían ser contrastados con más investigaciones que cuestionen la relevancia de los aspectos semióticos en los procesos de enseñanza-aprendizaje del AL con actividades más difíciles y variadas (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 261).

Alves Dias amplía el estudio de Pavlopoulou con la investigación realizada en su tesis doctoral (Alves-Dias, 2007; Dorier, 2000, pp. 252–256) contribuyendo con una clasificación más fina de los *registros de representación* (ver Figura 3. 38) e incluyendo otro tipo de articulaciones entre diferentes contextos matemáticos: *marcos o concepciones*[58] y *puntos de vista*. Para esta autora la idea de *flexibilidad cognitiva* se traduce en que el estudiante debe poder moverse sin dificultad entre todos ellos.

Alves Dias (2007) define la noción de *punto de vista* inspirada por los trabajos de Robert, Tenaud y, en particular, de Rogalski (1995, citado en Alves-Dias, 2007):

> *Dos puntos de vista diferentes sobre un mismo objeto matemático son dos maneras diferentes de captarlos, de hacerlos funcionar y, eventualmente, de definirlos. En este sentido, captar un objeto en diferentes dominios es tener diferentes puntos de vista. Pero se pueden tener varios puntos de vista en un mismo dominio (p.109).*

Esta definición le conduce a considerar dos puntos de vista en su estudio sobre el aprendizaje y la enseñanza de los subespacios vectoriales: el *punto de vista cartesiano o implícito* (cuando se concibe un subespacio vectorial como los vectores del conjunto solución una ecuación o un sistema de ecuaciones lineales) y el *paramétrico* (cuando se concibe un subespacio vectorial como un subespacio generado por un conjunto de vectores minimal o no). Estos puntos de vista se pueden expresar en varios registros (simbólico, de tablas) e incluso en el lenguaje natural (Alves-Dias, 2007, p. 109) y su articulación va más allá de una mera conversión, ya que involucra procesos cognitivos más complejos y otros conceptos como rango y dualidad (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 261). Al igual que Pavlopoulou, esta autora considera que la flexibilidad cognitiva en los libros de texto y en las clases es escasamente contemplada. Por tanto, diseña actividades que obliguen a los estudiantes (de Francia y Brasil) a movilizar cambios de marcos, registros y puntos de vista. Sus resultados indican que los estudiantes a menudo identifican una representación únicamente a través de sus características semióticas (por ejemplo, si hay x's e y's directamente asocian la representación con el punto de vista cartesiano) y que éstos raramente logran desarrollar mecanismos de control sobre la validez de los enunciados o para la anticipación de resultados (por ejemplo, son capaces de utilizar correctamente la fórmula de la dimensión –$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$– pero no de invocarla en medio de un problema) (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 262). Esta investigación muestra la complejidad del desarrollo de la flexibilidad cognitiva (que no se puede reducir a la de los registros de representación semiótica) y la necesidad de ayudar a los estudiantes a desarrollarla. Para ello, los profesores deben estar atentos a su elección de las tareas pues, a veces, un pequeño cambio en la formulación de un problema puede tener importantes implicaciones en términos de la flexibilidad cognitiva de los procesos involucrados en su solución (Dorier, 2000, pp. 255–256).

[58] En el sentido de Douady (1986, citado en Balacheff, 2005): "*Un marco se constituye de objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre esos objetos, de las formulaciones eventualmente diferentes y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Esas imágenes juegan un rol esencial en el funcionamiento como herramientas de los objetos del marco. Dos marcos pueden contener los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada*" (Douady, 1986, p. 11 citado en Balacheff, 2005, p. 187). De acuerdo con Balacheff (2005) este significado de 'marcos' se puede identificar con la noción de 'concepción', tal y como se ha definido en este estudio, pues también se refiere a una posibilidad de modelización de los conocimientos aceptada dentro de las matemáticas.

3.3.2.3 Lenguajes y Modos de Pensamiento

Otros autores que también se han interesado por el estudio de la *flexibilidad cognitiva* más allá de la cuestión de los registros de representación semiótica se refieren a *lenguajes* y *modos de pensamiento*. Hillel (2000) distingue tres modos de descripción, cada uno con un tipo de *lenguaje* asociado distinto (Figura 3. 39).

MODO	**DESCRIPCIÓN**	**EJEMPLOS (vector)**
Geométrico	Se refiere al uso del lenguaje y los conceptos relacionados con el espacio de 2 y 3 dimensiones, lo que incluye referencias a puntos, rectas, planos, transformaciones geométricas como rotaciones, simetrías, aplicaciones lineales que preservan los paralelogramos, etc. Dentro de este modo se incluyen tanto las descripciones libres de coordenadas (Geometría Sintética) como las dependientes de coordenadas (Geometría Analítica), aunque en este último tipo de descripción conviven juntos aspectos del modo geométrico y del algebraico.	*Representación*: flechas (libres de coordenadas o con coordenadas) o puntos del espacio. *Operaciones (suma)*: ley del paralelogramo *Transformaciones*: caracterizadas por descripciones geométricas globales (traslación, rotación, simetría, proyección, etc.) que pueden especificarse más en el caso con coordenadas (giro de 45°, proyección en el eje X)
Algebraico	Se refiere al uso del lenguaje y los conceptos que tienen lugar cuando nos referimos a la teoría más específica de los espacios de tipo finito y en concreto de IR^n, lo que incluye referencias a *n*-tuplas, matrices, rango, soluciones de un sistema de ecuaciones, espacio de filas, etc.	*Representación*: n-tuplas de números reales *Operaciones (suma)*: componente a componente *Transformaciones*: vienen dadas por matrices *mxn*.
Abstracto	Se refiere al uso del lenguaje y los conceptos relacionados con la teoría formal general del AL, lo que incluye referencias a espacios vectoriales, subespacios, dimensión, operadores, núcleos, etc.	*Representación*: letras a veces con flechas encima (u o $\vec{u}$) *Operaciones (suma)*: operación binaria que satisface ciertos axiomas *Transformaciones*: operadores lineales que preservan las combinaciones lineales.

Figura 3. 39: Modos de descripción y lenguajes de Hillel (2000).

Puede establecerse cierto paralelismo entre estos modos de pensamiento y los registros de representación en AL, referidos en el apartado anterior, aunque de nuevo la noción de lenguaje y modo de descripción es más amplia que la de registro. De hecho, dentro de cada modo aparecen conceptos similares –como Vector, Subespacio o Aplicación Lineal– pero con representaciones, notaciones y terminología particulares del modo (ver Figura 3. 39). Hillel (2000) analiza ejemplos de los comportamientos propios de cada modo, así como de los movimientos más comunes entre ellos, y observa clases magistrales en las que éstos se producen constantemente sin ningún tipo de explicación o silencio que alerten a los estudiantes de forma explícita. También explica algunas de las consiguientes dificultades, entre las que destaca: (1) las derivadas del engaño al que puede conducir el lenguaje geométrico si se toma demasiado literal (ya que normalmente se usa de modo metafórico); (2) las derivadas de la falta de atención en el paso de una representación geométrica de tipo flecha a una de tipo punto [59] o en el paso del modo abstracto al algebraico cuando el espacio vectorial es IR^n (ver Figura 3. 40).

[59] Pudiendo llevar a confundir las representaciones vectoriales con las afines, por ejemplo cuando se representan subespacios o clases de equivalencia como rectas o planos.

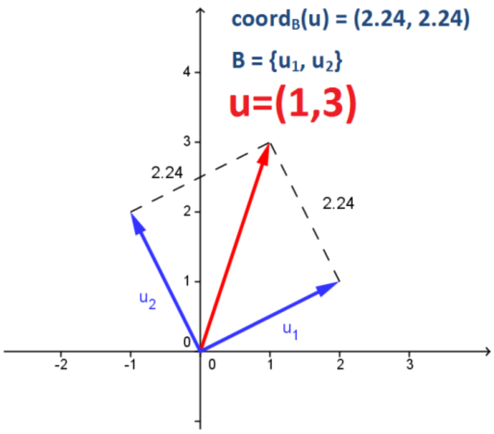


Figura 3. 40: *Ejemplo del problema de la representación respecto a una base en IR^n*. Al escribir las coordenadas de un vector o la matriz de una transformación respecto de ciertas bases en IR^n sucede que el objeto de partida (el vector, que es una n-upla, o la transformación, que es una matriz) y su representación (otra n-upla u otra matriz diferentes) tienen el mismo aspecto, provocando algunos de los errores más persistentes en los estudiantes (Hillel, 2000).

En correspondencia con los tipos de lenguaje de Hillel (2000), Sierpinska define tres modos de pensamiento necesarios en AL para llegar a desarrollar dichos lenguajes y a comprender la disciplina: *modo sintético-geométrico, modo analítico-aritmético* y *modo analítico-estructural*. En esta clasificación de modos de pensamiento hay dos distinciones que merecen comentario (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 264):

- Distinción sintética/analítica: en el modo *sintético* los objetos de pensamiento aparecen como directamente accesibles a la mente (que trata de describirlos) y por eso se relaciona con el modo geométrico. Es un modo práctico de pensamiento. En contraste, en el modo *analítico* los objetos de pensamiento se conciben o construyen en un lenguaje y en un sistema conceptual, es decir, se dan de forma indirecta, por ejemplo a través de una definición o un conjunto de propiedades. Es un modo teórico de pensamiento.
- Distinción aritmético/estructural: hace referencia a dos grandes fases que tuvieron lugar en el desarrollo histórico del AL. Por un lado, la *aritmetización del espacio*, y por otro, la *estructuración* en un sistema axiomático (ver sección 4.1.1).

Sierpinska (2000) advierte de que, a pesar de que los tres modos de pensamiento que describe aparecen en la historia secuencialmente, no deben tomarse como pasos para el desarrollo cognitivo del pensamiento algebraico. Por el contrario, cada uno es útil por separado –en su propio contexto y para distintos propósitos– resultando especialmente importante para la comprensión del AL establecer interacciones entre ellos (p.233). Desgraciadamente, en general los estudiantes no son capaces de utilizarlos de forma consciente ni flexible. Cada modo de pensamiento presenta dificultades específicas (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 264). Este marco teórico se ha utilizado recientemente para estudiar los modos de pensamiento que los estudiantes exhiben en tareas sobre independencia lineal con y sin soporte de representaciones gráficas a través de un módulo web interactivo (Dogan-Dunlap, 2010). En este estudio, donde se llegan a describir 15 categorías de pensamiento, se concluye que el uso de representaciones gráficas anima a los estudiantes a utilizar múltiples modos de pensamiento, ayudándoles a desarrollar la flexibilidad cognitiva y una comprensión más conceptual.

Estos resultados contradicen los obtenidos por Sierpinska (2000) con representaciones gráficas y dinámicas en un entorno con Cabri II: los estudiantes tienen problemas para ir más allá de la apariencia externa de dichas representaciones y su relación con ellas es más 'fenomenológica' que 'analítica'. Esta autora, inspirada por la distinción que hace Vygotsky entre conceptos científicos en oposición a los espontáneos o los cotidianos, establece una nueva *distinción entre modos de pensamiento prácticos y teóricos* (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 263). Concluye que una de las principales causas de dificultades de los estudiantes es su tendencia a pensar más de modo práctico que teórico. Este hecho se refleja en: su incapacidad de manejar largas cadenas deductivas (necesarias en AL); su falta de interés en comprobar sus asertos (incluso cuando se les ofrecen facilidades como Cabri); y en la sustitución de las definiciones formales por "*ejemplos prototípicos*" (ver sección 3.2.3.6).

3.3.2.4 Construcción de una Imagen Mental Rica y del PMA en AL

Estas últimas capacidades de las que carecen los estudiantes como consecuencia de su falta de flexibilidad cognitiva (como razonar deductivamente o manejar definiciones formales) son características del PMA. Por tanto, la flexibilidad cognitiva se presenta como una condición necesaria para el mismo, tal y como explicamos en la sección 3.2.1.1. No es extraño que algunas investigaciones sobre la flexibilidad cognitiva en AL se desarrollen con marcos teóricos propios del PMA. Los más empleados son el de Concepto Imagen/Definición (Harel, 1997; Wawro, Sweeney, & Rabin, 2011) y APOS junto a los tres mundos matemáticos –"*embodied*", simbólico y formal– de Tall (Stewart & Thomas, 2007, 2010). En el primer caso se sitúa la necesidad de flexibilidad en la construcción de un concepto imagen coherente articulado de forma adecuada con el concepto definición correspondiente y se señalan tres factores esenciales para que esto ocurra: (1) la adecuación del tiempo destinado al aprendizaje-enseñanza del AL; (2) las trayectorias de los estudiantes y su preparación con respecto a los contenidos (objetos, lenguajes e ideas que son únicas del AL); (3) las trayectorias de los estudiantes y su preparación con respecto al concepto de demostración (Harel, 1997). En el caso de la teoría APOS, la flexibilidad se identifica con la capacidad de *encapsular* en un objeto o esquema y *desencapsular* en un proceso cierto concepto, como ocurre por ejemplo con el de función: además de concebir las funciones como reglas que asocian un objeto con otro similar deben poderse contemplar como vectores, es decir, como objetos en sí mismos que pueden sumarse o multiplicarse por un escalar (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 262).

Recientemente se ha comenzado a adoptar perspectivas más globales para explicar cómo se construyen imágenes mentales ricas y debidamente articuladas incluyendo otros elementos, que aparecían en relación a la visualización: la comunicación, los gestos y las metáforas. Por ejemplo, investigaciones basadas en la *embodied cognition* (N. Sinclair & Gol Tabaghi, 2010) o en la construcción colectiva de significado (Hillel & Dreyfus, 2005). En estos estudios se señala la necesidad de realizar más investigaciones en visualización como alternativa para avanzar hacia la comprensión: "*The results suggest that an emphasis on matrix processes may not help students understand the concept, and embodied, visual ideas that could be valuable were usually lacking*" (Stewart & Thomas, 2010, p. 173).

3.3.2.5 Geometría y AL

En esta misma línea, aunque con una visión de la visualización más limitada, diversos autores apuntan al uso de la Geometría como respuesta a los problemas de abstracción y generalización características del AL. Robert, Robinet y Tenaud (1987, citado en Dorier &

Sierpinska, 2001, p. 266) diseñan una entrada geométrica al AL con la que pretenden superar el *obstáculo del formalismo* utilizando figuras geométricas como metáforas de situaciones más generales en espacios vectoriales más elaborados. En sus estudios sobre las dificultades de los estudiantes en la comprensión de los sistemas algebraicos, Harel (1989) descubre que éstas aumentan cuando no existe la posibilidad de un fácil acceso a representaciones concretas o visuales (p.140). Este hecho le lleva a diseñar un curso en el que las nociones principales se construyen desde una base visual y las abstracciones se introducen de forma gradual siguiendo tres fases: (1) visualización de los conceptos y los procesos (en IR^2 y IR^3); (2) representación y establecimiento de la dimensión de IR^n; (3) transición a espacios vectoriales abstractos. Los resultados muestran que este enfoque parece mejorar los obstáculos de aprendizaje del AL.

Sin embargo, un poco más tarde este mismo autor, aunque continúa apreciando el poder de la Geometría para solidificar conocimientos, advierte de que ésta puede ser problemática. Harel (1999) analiza las razones por las que las motivaciones geométricas son tan populares del siguiente modo:

- El profesor ve que la situación geométrica es isomorfa a la algebraica y por ello cree que el concepto geométrico puede ser un pasaje hacia el concepto algebraico abstracto. El problema con esta creencia es que el estudiante no comparte esa visión inicial.
- Los conceptos geométricos son relativamente sencillos de comprender y por eso es natural utilizarlos para motivar ideas. Los estudiantes, que entienden bien estos ejemplos, los utilizan para formar conceptos imágenes fuertes y duraderos que no siempre resultan adecuados para razonamientos generales por las limitaciones del contexto geométrico que se reduce a dos y tres dimensiones (como ocurría con el ejemplo de la dependencia lineal, ver Figura 3. 36).
- El profesor entiende que las ilustraciones geométricas son sólo ideas introductorias a los conceptos abstractos que están por venir. Él o ella sabe que la verdadera labor consiste en abstraer los conceptos de las ideas geométricas y ha desarrollado la paciencia para hacerlo. Desafortunadamente, el estudiante corriente no tiene esta comprensión básica metamatemática. (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 266; Harel, 1999, p. 613).

Por tanto, a pesar de que inicialmente Harel (1989) diseña un curso construido sobre bases visuales, finalmente concluye que no se debe introducir la Geometría demasiado pronto (Harel, 1999). Estas aparentes contradicciones reflejan las controversias que existen en torno a la cuestión, nada sencilla, de si se debe enseñar o no AL a través de la Geometría: esta puede ser un obstáculo para aprender AL o puede ser una ayuda (Gueudet-Chartier, 2004). Gueudet-Chartier (2004) estudia esta pregunta desde un punto de vista un poco diferente. Esta autora utiliza la teoría de modelos figurales de Fischbein para explorar la visualización en términos de intuición geométrica (Artigue et al., 2000; Gueudet-Chartier, 2000, 2002, 2003, 2004, 2006). En primer lugar realiza un estudio epistemológico del que extrae dos importantes conclusiones: (a) el AL no se puede construir como una mera generalización de la Geometría; (b) las conexiones entre el AL y la Geometría no son "naturales" como se podría pensar a priori y varían entre las distintas partes del AL (ver sección 4.1.1).

Los trabajos de Gueudet-Chartier (2000, 2002, 2004) muestran que la intuición geométrica se realiza de una forma muy superficial, tanto por parte de profesores como estudiantes, pese al reconocimiento de su valor (Gueudet-Chartier, 2002). Considera que el uso de la Geometría puede ser un factor positivo, siempre y cuando se controle y se emplee en un contexto donde las conexiones se hagan explícitas (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 267; Gueudet-Chartier, 2006). Por ejemplo, algunos contextos en los que los modelos figurales pueden ayudar a los estudiantes, y que necesitan de más investigación, son: el uso de representaciones de IR^2 o IR^3 para resolver problemas en IR^n, el paso de IR^2 a IR^3 para comprender el de IR^{n-1} a IR^n (Gueudet-Chartier, 2003, 2006). Finalmente, esta autora plantea la necesidad una mayor experimentación para profundizar en los modelos de enseñanza y el aprendizaje, cuestión a la que el presente estudio trata de dar respuesta:

> *Studying further the students uses of figural models in linear algebra would require the organization of a teaching experiment, allowing us to know exactly which models have been proposed, and to observe their influence on the student practices(Gueudet-Chartier, 2002, p. 8).*

3.3.3 Resumen

En este capítulo hemos concretado las Teorías Globales al ámbito de investigación (un curso de AL). En la primera sección, a partir de documentos que revisan el estado del arte de la didáctica del AL, se han detallado diferentes líneas de investigación: (1) reformas curriculares (destacando algunos libros de texto innovadores); (2) dificultades de los estudiantes, clasificadas en conceptuales, cognitivas y motivacionales (señalándose como principales causas el "*obstáculo del formalismo*" y la "*falta de flexibilidad cognitiva*"); (3) experiencias de innovación docente (enfatizando los principios de enseñanza de Harel, experiencias con estilos alternativos a las clases magistrales, el uso de los ordenadores y los estudios longitudinales); (4) investigaciones sobre conceptos concretos (en particular, la Aplicación Lineal y los Cocientes).

En la segunda sección hemos profundizado en investigaciones sobre AL más relacionadas con la visualización. Éstas se han clasificado en cinco apartados siguiendo las perspectivas sobre la visualización descritas en las Teorías Globales (sección 3.2.3): pensamiento diagramático, registros de representación semiótica y puntos de vista; lenguajes y modos de pensamiento; construcción de una imagen mental rica; Geometría y AL. Esta revisión proporciona herramientas más adaptadas al contexto, útiles para el análisis de datos (ver los códigos empleados en la sección 2.4.3.1 y los modelos encontrados en la sección 4.2.3).

3.4 IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN

Finalmente, se hace un resumen y una reflexión en torno a los principales elementos del Marco Conceptual expuesto, enfatizando preguntas que surgieron durante su elaboración que ayudaron a precisar los objetivos de investigación (ver sección 1.1.5). Con esta síntesis se busca hacer de este marco una herramienta más operativa para los procesos de planteamiento, diseño, análisis e interpretación dados durante este estudio. Al mismo tiempo, refleja parte del conocimiento adquirido tanto teórica como empíricamente pues, tanto el Marco Conceptual presentado como la síntesis que sigue, son producto de las revisiones teóricas realizadas a lo largo de las sucesivas iteraciones de la investigación.

3.4.1 Reflexión sobre la Elaboración del Marco Conceptual

Los marcos conceptuales se caracterizan por tener un formato de argumentación y justificación donde se combinan, integran y comparan diversidad de fuentes de naturaleza tanto teórica como práctica, no centrándose en ninguna corriente teórica como referente principal (Eisenhart, 1991). En nuestro Marco Conceptual domina la componente teórica, principalmente relativa a trabajos previos en EM aunque en algunos casos hay referencias a otras disciplinas (por ejemplo a las Ciencias de la Información, cuando situamos la noción de visualización en la sección 3.2.3). Ocasionalmente se han incluido puntos de vista más prácticos de docentes universitarios de Matemáticas (como en la sección 3.2.1.3 al tratar del tema de las clases magistrales). En este proceso de combinación, integración y comparación de puntos de vista hemos tenido en cuenta los paradigmas a los que se adscriben las diversas investigaciones, así como sus fronteras, pues en caso contrario podrían surgir obstáculos epistemológicos (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006; Niss, 2006; Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008).

A lo largo de todo el Marco Conceptual se ha establecido una separación entre investigaciones desarrolladas en paradigmas más cognitivos y otras con perspectivas más globales, que incluyen aspectos más socioculturales o afectivos (ver secciones 3.2.1 y 3.2.2). En el caso de las aproximaciones teóricas sobre representaciones, todas ellas son coherentes entre sí al evitar la discusión interna/externa de las representaciones, centrándose en su uso y su importante papel en la actividad matemática. En secciones donde estas delimitaciones no son tan claras (como la 3.2.3 sobre visualización), hemos explicitado las similitudes y contradicciones surgidas entre los diferentes enfoques (por ejemplo entre el enfoque de Duval y Dörfler, o de Duval y Presmeg, o la confrontación entre la noción de visualización de los psicólogos y de los matemáticos). De este modo, esperamos haber conseguido ofrecer una perspectiva suficientemente amplia, a la vez que crítica, del tema a investigar.

3.4.2 Comprensión, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas Avanzadas

En la Base Filosófica se expuso que, en este estudio, las Matemáticas se conciben fundamentalmente como una actividad humana, el *quehacer matemático*, que tiene una doble dimensión: individual y social. Desde esta perspectiva, que se podría calificar como socio-constructivista, es igual de importante construir el conocimiento individualmente, a través del enfrentamiento con problemas adecuados, como colectivamente, a través del trabajo colaborativo y discusiones que permitan contrastar el conocimiento propio con el de los demás y con el de la sociedad. En sintonía con la idea de *ecología* (ver sección 3.2.1.2), se establecen diferentes niveles de análisis de los sucesos que se observan en una clase (ver Figura 3. 41). Éstos permiten delimitar mejor los problemas didácticos y los episodios de clase a estudiar, facilitando distintos niveles en los que poner el zoom al realizar su análisis.

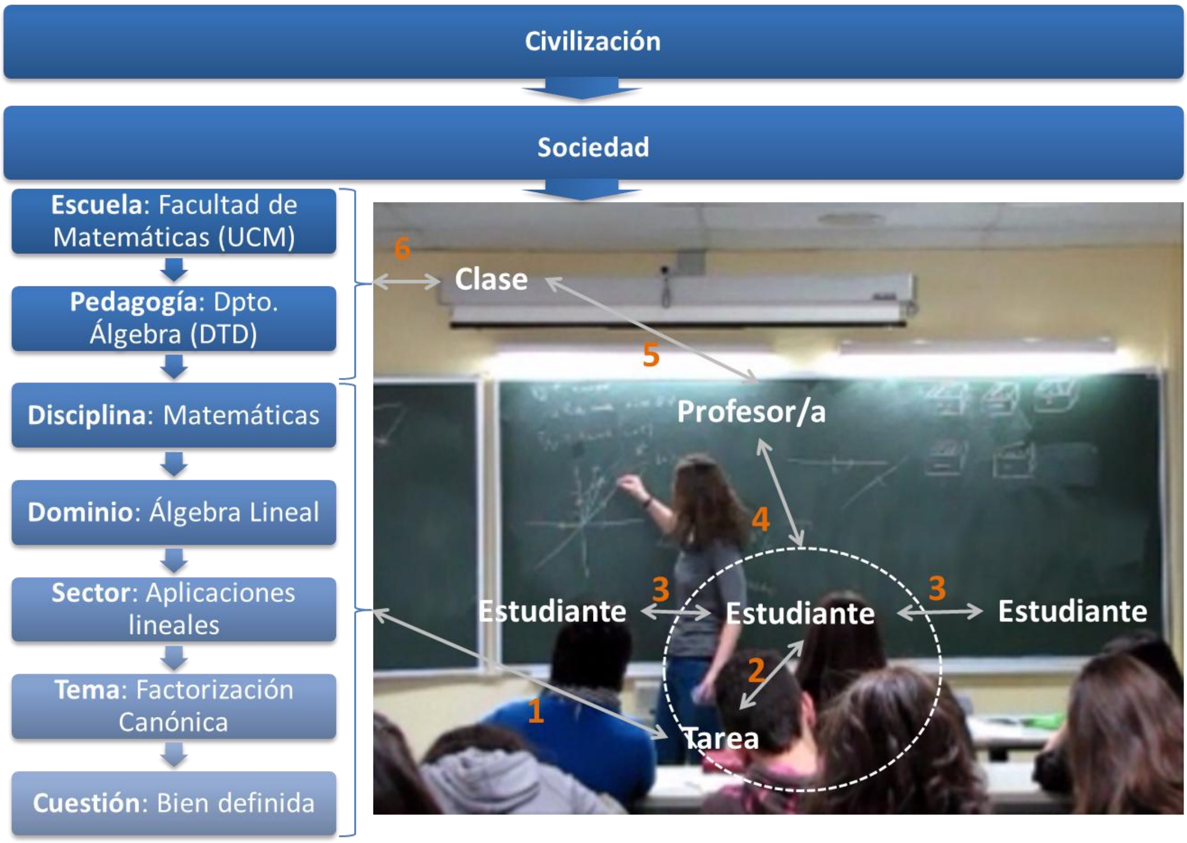


Figura 3. 41: *Esquema de las diferentes relaciones y los diferentes niveles contemplados en una clase*: (1) tarea de Matemáticas, (2) estudiante con la tarea, (3) estudiante con otros estudiantes, (4) estudiante y profesor, (5) profesor con la clase, (6) clase con la institución. Las relaciones con la sociedad y la civilización quedan fuera del alcance de esta investigación.

En esta investigación no se concibe la actividad matemática de forma independiente al uso de las representaciones, pues se consideran que éstas son la única forma de acceso a los objetos de estudio de esta disciplina. Combinando las teorías de registros semióticos de representación –en particular el trabajo de Duval (1999) – con las del PMA –especialmente la noción *esquema conceptual* (que aglutina ideas del marco de concepto imagen/ definición de Tall y Vinner (1981) y de la teoría APOS (Asiala et al., 1996), ver sección 3.2.1.1)– *comprender un concepto* implica la construcción de una red –una estructura cognitiva– en la que el concepto ocupa un nuevo nodo. Para que haya comprensión, este nuevo nodo se debe conectar de forma adecuada a otros nodos previos. Gracias al análisis realizado de diversas teorías sobre comprensión, representación y visualización de las Matemáticas Avanzadas y el AL se puede precisar qué tipo de elementos pueden ocupar dichos nodos (Figura 3. 42).

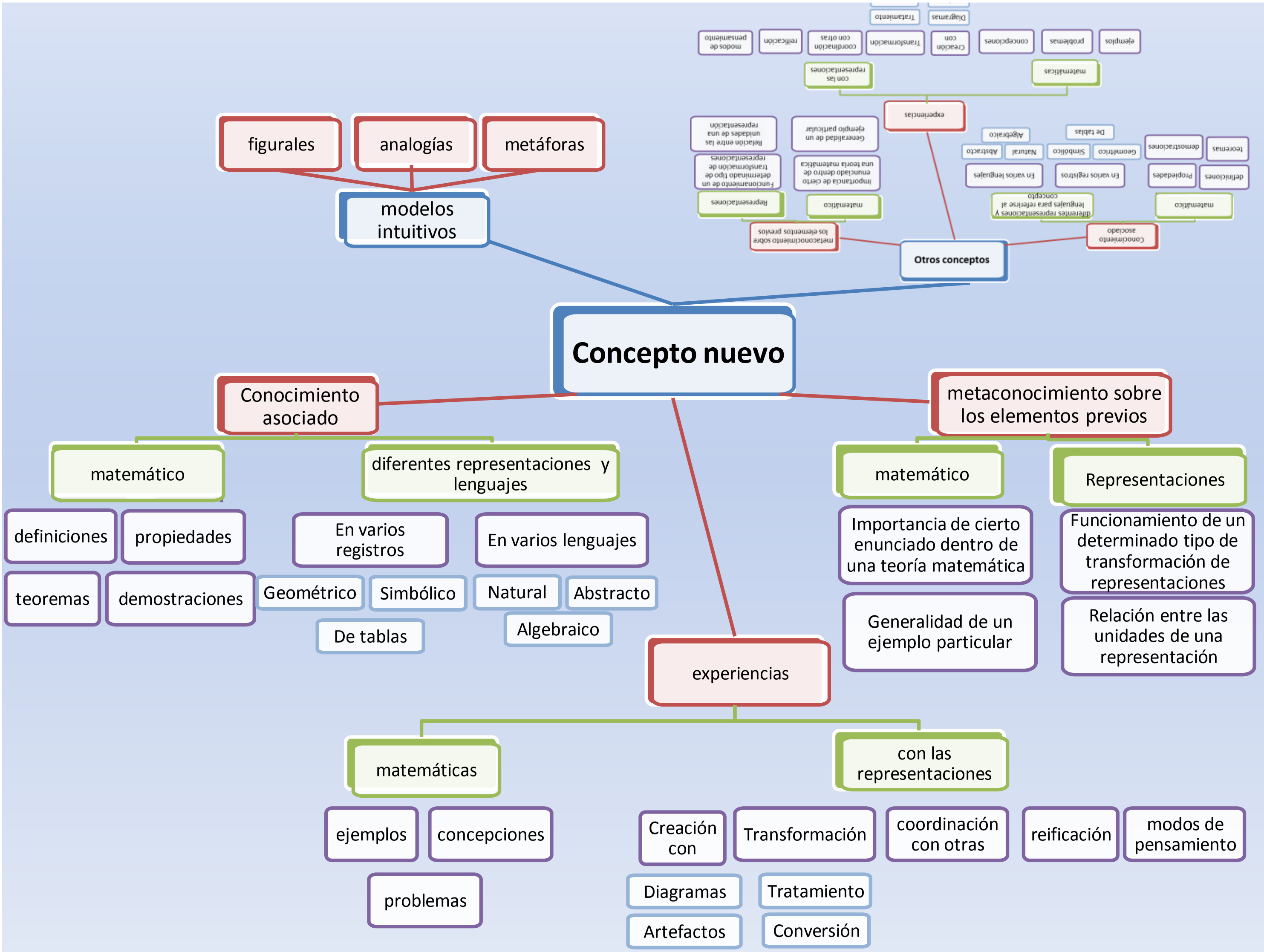


Figura 3. 42: *Esquema conceptual y los diversos elementos que pueden ocupar sus nodos*: conocimiento matemático asociado al concepto; experiencias matemáticas en torno a él; diferentes representaciones y lenguajes para referirse al concepto; experiencias con dichas representaciones y lenguajes; metaconocimiento sobre los elementos previos; modelos intuitivos (figurales, analogías, metáforas, etc.); otros conceptos previos junto a su red correspondiente; etcétera.

La comprensión del nuevo concepto que se trata de aprender se alcanza cuando la red de nodos asociados está suficientemente completa y debidamente coordinada. A este conjunto de nodos y articulaciones se le ha denominado *esquema conceptual* y forma una imagen mental rica en la mente del individuo que le permite: reconocer el concepto a través de sus diversas representaciones, dotarlo coherentemente de significado, pensar sobre él de distintos modos y mirarlo a través de diversos puntos de vista. Este esquema conceptual puede a su vez encapsularse en un nuevo nodo que servirá para comprender futuros conceptos. De este modo, la construcción de este esquema mental proporciona un nuevo punto de partida, cognitivamente superior, que hace posible el desarrollo del PMA (finalidad fundamental del *aprendizaje* de las Matemáticas Avanzadas en una Facultad de Matemáticas). Consecuentemente, la *enseñanza* debe encargarse de facilitar el estímulo y la guía necesarios para que se produzca este desarrollo. En relación a lo expuesto, nos surgieron algunas preguntas que contribuyeron a la precisión del objetivo 1.1: *¿Cómo facilitan los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Facultad de Matemáticas de la UCM la construcción de esquemas conceptuales ricos en la mente de los estudiantes? ¿A cuáles de sus elementos se presta más atención y cuáles son más descuidados? ¿Cómo se favorece la coordinación y la articulación de sus elementos?*

3.4.3 Visualización en AL

La comprensión de las Matemáticas, donde las representaciones juegan un papel tan importante, está estrechamente ligada con la visualización. La visualización, tal y como se ha caracterizado en este Marco Conceptual, es esencial para lograr la comprensión. Sin la información visual que ésta proporciona, el esquema conceptual que se pretende construir estará incompleto y articulado indebidamente, pues habrá relaciones imposibles de establecer. Por tanto, la imagen mental asociada al concepto no será tan rica como es necesario, imposibilitando la adquisición del PMA. Al mismo tiempo, se han visto ejemplos donde la visualización era causa de engaños y de bloqueos (ver sección 3.2.3.5). Este hecho nos llevó a las siguientes preguntas, que derivaron en la formulación del objetivo 2.1: *¿Cómo desarrollar la visualización de modo que sea una herramienta útil para la comprensión (en AL)? ¿A qué tipo de engaños y bloqueos puede dar lugar la visualización? ¿Qué mecanismos de control existen para dichos engaños y bloqueos?*

También se ha puesto de manifiesto la dificultad cognitiva que existe en el proceso de transición al PMA y a los primeros cursos universitarios, provocando diversidad de problemas a los estudiantes durante su aprendizaje. En particular, en el contexto del AL, estas dificultades tienen que ver con el "*obstáculo del formalismo*" y la "*flexibilidad cognitiva*" propios de esta rama de las Matemáticas. En este contexto, se propone la visualización (entendida como la capacidad de manejar de forma flexible diversidad de diagramas, representaciones, marcos, puntos de vista, lenguajes y modos de pensamiento) como herramienta necesaria para ayudar a los estudiantes a comprender y a superar dichas dificultades. Sin embargo, existe una gran controversia en torno al papel de la visualización (entendida como el uso de la Geometría y la intuición) como herramienta facilitadora en el camino hacia el formalismo y la abstracción (ver sección 3.3.2.5). Esta controversia nos condujo a preguntas que derivaron en la formulación del objetivo 1.2: *¿Qué postura toma el curso de AL observado en torno a la visualización? ¿Cuál es el status de la visualización en el curso, qué mensajes se dan: se favorece su uso o por el contrario se previene* *contra él? ¿Cómo y por qué surge la visualización en clase: qué tipo de prácticas de clase favorecen (o dificultan) la aparición de la visualización en clase?* Y en relación al objetivo 2.2: *¿Es una herramienta a disposición de los estudiantes? ¿Resulta útil para su aprendizaje? ¿Qué relación existe entre la visualización que se les enseña y las dificultades a las que se enfrentan? ¿Cuál es la percepción de los estudiantes en torno al papel de la visualización en su aprendizaje?*

Figura 3. 43: *Conceptualización propuesta para el estudio de la visualización en los procesos de enseñanza-aprendizaje del AL para "enseñar a visualizar"*, teniendo en cuenta las tres dimensiones –producto (cajas azules y verdes), proceso (cajas naranjas) y habilidad (cuadros de texto de la izquierda)– de la noción de visualización (Arcavi, 2003).

Podemos prever algunas respuestas negativas a estas preguntas, teniendo en cuenta las investigaciones sobre modelos actuales de instrucción en la Universidad (sección 3.2.1.3) y sobre enseñanza de la visualización (sección 3.2.3). A pesar de ello, estudios de casos concretos de enseñanza, como el de Weber (2004) señalan el riesgo simplificar demasiado las prácticas docentes universitarias e indican la necesidad de realizar más estudios de este tipo. En esta investigación tratamos de responder a esta necesidad tomando una perspectiva amplia de la visualización. En la Figura 3. 43 se sintetiza su conceptualización de partida, que refleja los diferentes elementos teóricos tratados en este Marco Conceptual relevantes para su estudio en AL. Esta caracterización ya ha ayudado a nivel teórico para establecer matices importantes en la revisión de investigaciones sobre visualización en AL. Esperamos que también, a nivel empírico, nos sirva para evitar "meter en el mismo saco" objetos de muy diversa naturaleza.

Como vía de mejora de las prácticas actuales de enseñanza universitaria y de la escasa investigación desarrollada sobre el tema de la visualización a ese nivel, se demanda la realización de más experimentos de enseñanza. En esta línea se plantea el objetivo 2.2. Las experimentaciones longitudinales se valoran especialmente en el contexto del AL porque, entre otras cosas, incluyen fases de evaluación. Además de cuestión en torno a la duración de la experimentación, surgieron otras preguntas que se tuvieron en cuenta en torno a este objetivo: *¿Qué queremos enseñar cuando hablamos de enseñar a visualizar?*[60] *¿Qué principios deben guiar el diseño de materiales y estrategias de enseñanza? ¿Cuáles son las limitaciones y posibilidades institucionales que se deben considerar de cara a la durabilidad de las innovaciones? ¿Qué papel debe jugar el profesor en esos procesos de enseñanza-aprendizaje? ¿Necesita el profesor algún tipo de conocimiento específico para enseñar a visualizar en AL?*

[60] Esta pregunta hace más referencia al objetivo 2.1, pero se tiene en cuenta en la experimentación.

The best way to learn is to do; the worst way to teach is to talk. About the latter: did you ever notice that some of the best teachers of the world are the worst lecturers? (I can prove that, but I'd rather not lose quite so many friends.) And, the other way around, did you ever notice that good lecturers are not necessarily good teachers. A good lecture is usually systematic, complete, precise-and dull; it is a bad teaching instrument (Halmos, Moise, & Piranian, 1975, p. 466).

4 ANÁLISIS Y RESULTADOS

Tras situar el problema de investigación (Parte 1), describir la metodología (Parte 2) y exponer el Marco Conceptual (Parte 3), alcanzamos la parte empírica de la Memoria. La preparación a la experimentación realizada en la *Fase I* (Capítulo 4.1) se describe en relación a los tres tipos de estudios que constituyen el Estudio Inicial (el Epistemológico, el Institucional y el Exploratorio) y da lugar a la formulación de tres principios de diseño. Antes de explicar y reflexionar sobre la aplicación de dichos principios de diseño en las experimentaciones, se narra y se analiza globalmente el desarrollo de la Observación Participante llevada a cabo durante la *Fase II* (Capítulo 4.2). Finalmente, para estudiar aspectos relativos a la relación entre comprensión y visualización se focaliza en la *Fase III* (Capítulo 4.3) en el concepto de Espacios Vectoriales Cociente: primero lo analizamos desde un punto de vista eminentemente matemático y segundo exploramos la comprensión de los estudiantes mediante el diseño y la aplicación de una actividad específica de visualización.

4.1 FASE I: ESTUDIO INICIAL

A continuación se describen los resultados del Estudio Inicial dividido en tres partes según su naturaleza: Epistemológico, Institucional y Exploratorio. Este estudio contribuye con los dos objetivos de investigación y sus resultados guiarán las experimentaciones de la Fase II (ver Metodología, sección 2.3.2.2).

4.1.1 Estudio Epistemológico

Partiendo de elementos históricos planteamos un Estudio Epistemológico con objeto de explorar y comprender mejor el papel de la visualización en el desarrollo de los conceptos de AL. Coincidimos con Steinbring (1998) cuando afirma que el desarrollo del conocimiento epistemológico puede promover un cambio –en las actitudes y la comprensión de las Matemáticas de los docentes– necesario para transformar las prácticas de enseñanza actuales. En esta sección trataremos de explicitar las circunstancias históricas, psicológicas y sociológicas que llevan a la obtención del conocimiento en AL y los criterios por los cuales se le justifica o invalida, así como la definición clara y precisa de los conceptos epistémicos más usuales. Para ello estudiamos (ver Metodología, sección 2.4.2.1) fuentes bibliográficas secundarias que elaboran estudios similares (Bourbaki, 1972; Dorier, 2000, Parte I; Gueudet-Chartier, 2000; Kleiner, 2007, pp. 79–89; O'Connor & Robertson, 1996; Tucker, 1993; Vitulli, 2004) dando lugar al Eje Cronológico (Figura 4. 1, Figura 4. 2) que sirve de base para la descripción que sigue. La consulta de libros de texto clásicos de AL (Dieudonné, 1964; Grassmann, 1995; Halmos, 1974) completa esta panorámica aportando evidencias más directas de las diversas posturas que los matemáticos toman en torno al uso de la visualización en el AL, tema con el que se cierra esta sección.

4.1.1.1 Evolución Histórica del Desarrollo del AL

La evolución histórica del desarrollo del AL (Dorier, 2000, Parte I) pone de manifiesto algunas justificaciones de las dificultades de los estudiantes. Por ejemplo, la Teoría Axiomática del AL, que hoy en día resulta tan elemental, natural y sencilla a los matemáticos, tardó mucho en desarrollarse y aún más en aceptarse. Desde esta perspectiva es comprensible que presente también dificultades a los estudiantes que se enfrentan a ella por primera vez (p.59). De hecho, llama la atención que el orden histórico de desarrollo de la disciplina es el opuesto al orden lógico (Kleiner, 2007, p. 79), razón que también explica la presencia de dichas dificultades. Por último, este análisis histórico del desarrollo del AL señala que la teoría axiomática tuvo su importancia por motivos que hoy en día, a menudo, quedan ocultos en las aulas: ofrecía una nueva perspectiva para estudiar problemas antiguos; lograba cohesionar y unificar en una misma estructura algebraica campos muy distantes de las Matemáticas (por ejemplo, el estudio de la clasificación de Formas Cuadráticas Bilineales con la Geometría Analítica) (Dorier, 2000, p. 4).

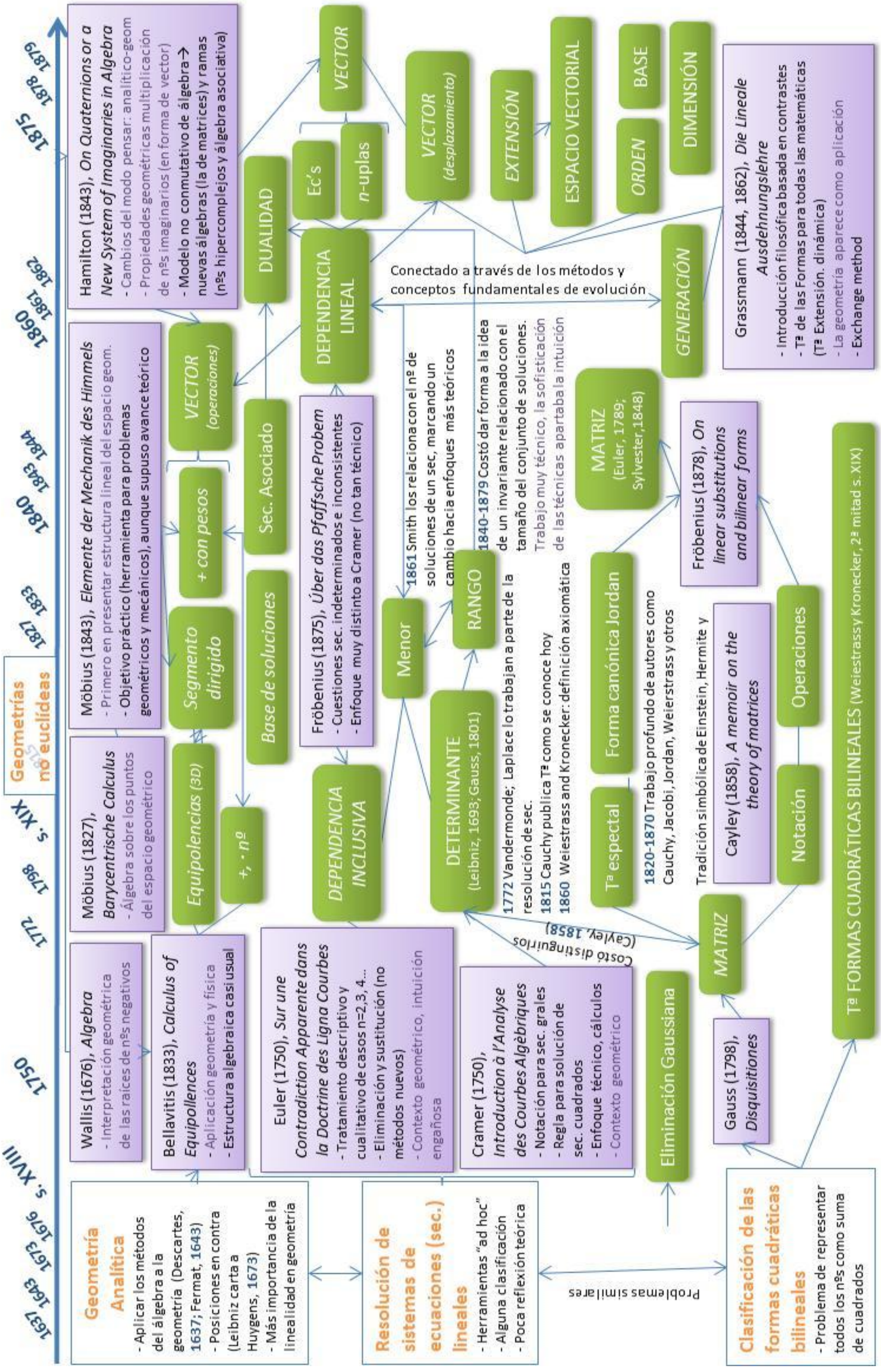


Figura 4. 1: Aparición y establecimiento de las ideas y conceptos fundamentales del AL.

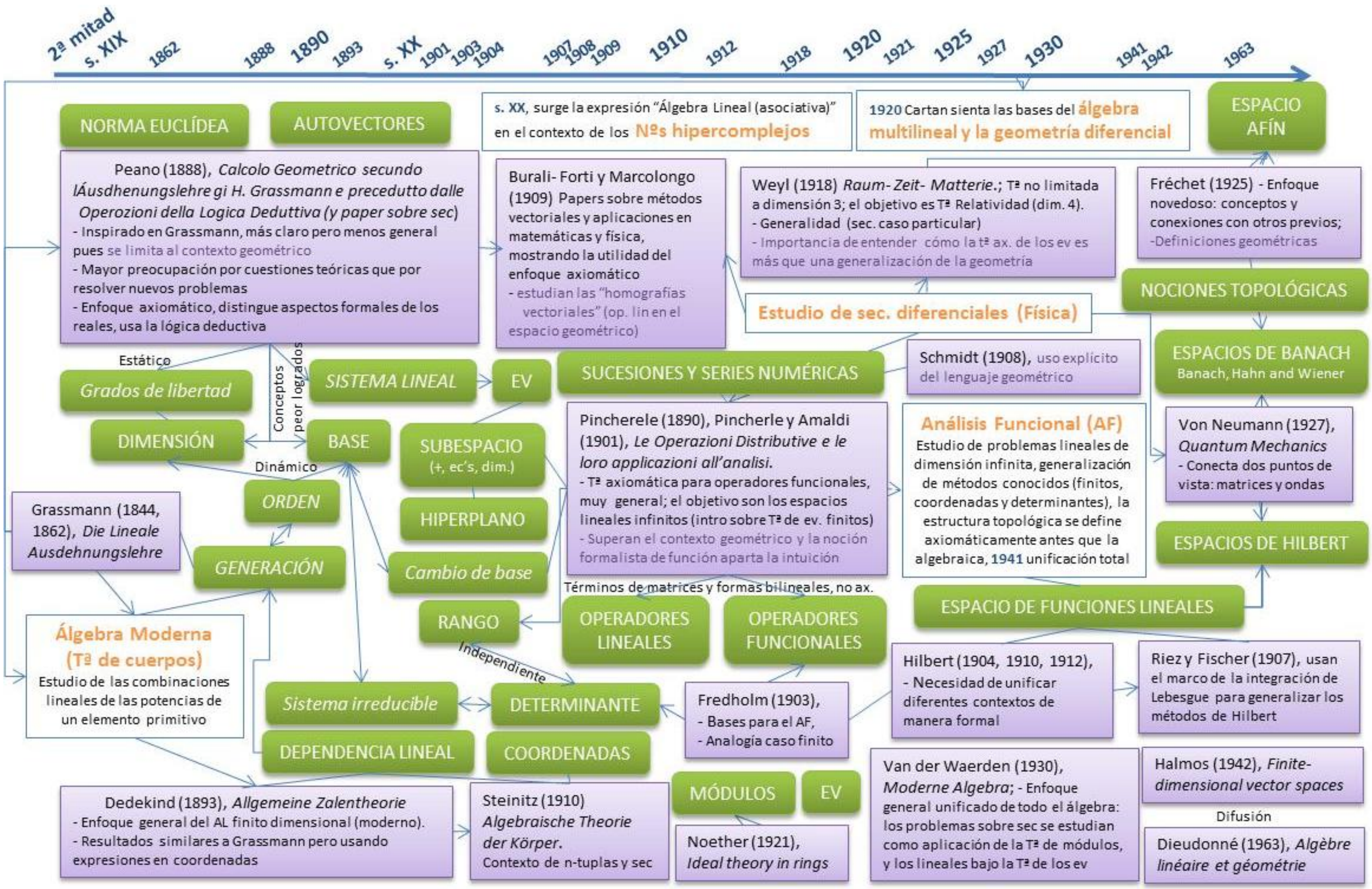


Figura 4. 2: Desarrollo, unificación y difusión de la Teoría Axiomática de los Espacios Vectoriales.

Leyenda para la interpretación del Eje Cronológico (Figura 4. 1 *y* Figura 4. 2). Siguiendo la elección de colores del subrayado de textos históricos (ver Metodología, sección 2.4.2.1) representamos: los *campos de las Matemáticas* influyentes en el desarrollo del AL en letras naranjas, las *fechas* en azul (en el eje superior se sitúan exclusivamente las fechas para las cuales se posee algún dato), los *autores* y sus *obras* en cuadros morados (pudiendo incluir una breve descripción de las características); los *conceptos* en cuadros verdes (indicando la fecha y el autor que lo introdujo por primera vez se incluye debajo del nombre del concepto; si el concepto se introduce de forma aproximada a la moderna o ya no existe se ha escrito en cursiva). Las flechas señalan relaciones conocidas tanto entre autores como entre conceptos. Finalmente, se busca que la distribución de los cuadros avance cronológicamente (no de forma proporcional) de izquierda a derecha, aunque a veces hay excepciones (bien por cuestiones de espacio o bien por mantener cerca autores o conceptos relacionados).

Etapa 1: Aparición de las ideas y conceptos fundamentales del AL (Figura 4. 1)

En la Figura 4. 1 observamos las ideas fundamentales del AL tienen un doble origen: geométrico y analítico. Dentro del origen analítico destaca el problema de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que surgía en contextos muy diferentes. La resolución de sistemas de ecuaciones no era un problema nuevo. Había preocupado a los matemáticos durante generaciones, comenzando por antiguas civilizaciones como la babilónica, la egipcia, la griega o la china (Bourbaki, 1972; Kleiner, 2007). Hasta mediados del s. XVIII esta preocupación dio lugar a diversidad de métodos de resolución 'ad hoc', esto es, diseñados para cada problema particular (Dorier, 2000, p. 6). Sin embargo, a partir de ese momento comienza a producirse un cambio de enfoque crucial para el AL: de trabajos más técnicos se pasa a estudios cualitativos y descriptivos, motivados en parte por las cuestiones de reducción de formas cuadráticas y bilineales a formas "canónicas" más simples (Kleiner, 2007, p. 80). Así se impulsaron dos corrientes de investigación –el desarrollo de la teoría espectral y otra de tradición más simbólica– que convergieron en la noción de *matriz*.

El cambio de enfoque corrió paralelo al desarrollo de la teoría de *determinantes* que, rechazada durante un siglo, acabó dando lugar a las importantes nociones de *rango* y de *dependencia lineal*[61] en la segunda parte del s. XIX, con el trabajo de Fróbenius (Dorier, 2000, p. 9). Para ello fue esencial reconocer la complementariedad existente entre el número de ecuaciones independientes del sistema y el número de incógnitas indeterminadas en sus soluciones (que se expresaban en forma de *n*-uplas) a través de la idea de *dualidad*. Este progreso llevó a poder tratar ambos objetos –ecuaciones y *n*-uplas– como si fueran el mismo acercando la idea de *vector* al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

La idea de *vector* aparece simultáneamente en un contexto muy diferente de la mano de Grassmann, considerado el padre del AL y de la Teoría Axiomática[62] moderna por su obra *Die Lineale Ausdehnungslehre* publicada en dos ediciones, una de 1844 y otra posterior de 1862 (Dorier, 2000, pp. 18–19). Con esta segunda edición, Grassmann trató de paliar las críticas recibidas en la anterior por parte de los matemáticos motivadas fundamentalmente por el tono de su obra y la dificultad de su lenguaje, muy influenciados por su condición de experto lingüista. El libro comienza con una larga y general introducción filosófica donde expone su visión de las ciencias y de las Matemáticas. Ésta

[61] Hasta la segunda mitad del s. XIX predominó sobre la noción de *dependencia lineal* la de *dependencia inclusiva*, que se utilizaba para referirse a la propiedad de que una de las ecuaciones "estuviera incluida" en otras (Dorier, 2000, p. 8).
[62] Abreviada como "Tª ax." en la Figura 4. 1 y la Figura 4. 2.

basada en los contrastes (*discreto/contínuo*, *igual/diferente*) que le sirven para definir la Teoría de las Formas en la que engloba diversas ramas de las Matemáticas: Aritmética (*discreto/igual*), Análisis combinatorio (*discreto/diferente*), Teoría de funciones (*continuo/igual*) y Teoría de la Extensión (*continuo/diferente*). Esta última fue el resultado del intento de Grassmann de crear una nueva rama de las Matemáticas que no se limitase al contexto geométrico, aunque sí estuviera en estrecha relación con él.

En su obra, Grassmann introduce el espacio *n*-dimensional bajo la idea de *evolución* como un sistema construido paso a paso a partir de un solo elemento (Dorier, 2000:20). De ahí el nombre de *extensión*, que es una noción previa de los actuales *espacios vectoriales*. En este contexto también surge la idea de *vector*, como un *desplazamiento* que *genera* espacios de mayor *orden,* que es una medida del grado de la extensión y está próxima a las nociones actuales de *dimensión* y *base*. Todas estas nociones, y en particular la *generación*, emergen de los procesos de evolución conectándolas con la idea de *dependencia lineal*. Todo este trabajo desarrollado en torno a la Teoría de la Extensión es lo que precisamente se considera el comienzo de la Teoría Axiomática del AL. De hecho en su segunda edición da una lista de axiomas similar en la forma a la versión moderna. Sin embargo, en el fondo dista mucho de ella pues, como indicamos anteriormente, las reglas que lo guían no se basan tanto en dar una lista de propiedades guiadas por la lógica deductiva como en explorar todas sus posibles combinaciones teniendo en cuenta la naturaleza de las operaciones.

Etapa 2: Desarrollo y unificación bajo una teoría general (Figura 4. 2)

Como se aprecia en el apartado anterior y en la Figura 4. 1, hacia 1880 ya se habían establecido muchos de los resultados fundamentales del AL. Sin embargo, éstos se consideraban aisladamente, sin formar parte de una teoría general. Una razón de ello es que aún no se había formulado la noción de *Espacio Vectorial* en un sentido suficientemente amplio como para servir de paraguas de dicha teoría (Kleiner, 2007, p. 86). Como se muestra en la Figura 4. 2, esta noción se introdujo en 1888 con el trabajo titulado *Calcolo Geometrico secundo lÁusdhenungslehre gi H. Grassmann e precedutto dalle Operozioni della Logica Deduttiva* en el que Peano da la primera definición axiomática de lo que él denominó *sistemas lineales.* Su principal objetivo era dar a conocer de forma más clara el trabajo de Grassmann, apenas difundido, pero elige un enfoque muy diferente que ya sí se puede calificar de axiomático y con el cual se sentaron las bases para posteriores aproximaciones similares. Esto supuso un gran avance, aunque su trabajo es menos general que el de Grassmann y la presentación de algunos conceptos fundamentales como *base* y *dimensión* es menos satisfactoria (Dorier, 2000, p. 32).

Además de las aproximaciones derivadas de la Geometría de Peano, surgió otra tendencia de investigación, denominada Álgebra Moderna, en la que los conceptos de *base* y *dimensión* entendedidos según Grassmann –relacionados con la idea de *generación*– ocupaban un lugar central y se estudiaban dentro de la teoría de cuerpos como el conjunto de todas las combinaciones lineales de las potencias de un elemento primitivo. El desarrollo del AL en dimensiones finitas continuó de este modo durante la segunda mitad del s. XIX, con Dedekind y Steinitz como figuras más destacadas (Dorier, 2000, p. 38). En sus trabajos hay una preocupación por la búsqueda de fundamentos teóricos y aproximaciones axiomáticas como métodos alternativos al uso de coordenadas. Más tarde, entre los años 1890 y 1930 también se realizaron contribuciones al AL desde el estudio de las *Extensiones de Cuerpos*, los *Sistemas de Números Hipercomplejos* y el "*Álgebra Lineal Asociativa*" (Dorier, 2000, p. 41).

El avance de las diversas aproximaciones axiomáticas, realizadas desde la Geometría de Peano o desde la corriente del Álgebra Moderna, estuvo motivado por la similitud de cuestiones y métodos presentes en la resolución de problemas lineales que, en este período, ya no sólo provenían de los campos algebraico y geométrico, sino también de la Física (movimientos de planetas, sistemas de ecuaciones diferenciales) y del Análisis Funcional (derivado del análisis de problemas lineales en espacios de dimensión infinita). Así, el desarrollo teórico y los primeros pasos hacia la unificación y la teorización de la linealidad estuvieron inicialmente más centrados en comparar los métodos que los objetos matemáticos (Dorier, 2000, p. 29). Este enfoque impulsor de cambios (englobados en una tendencia más amplia que buscaba una reorganización del Álgebra y de las Matemáticas) también actuó como freno. Debido a la establidad y la eficacia que dichos métodos habían probado poseer en los siglos anteriores, la aceptación de esta nueva visión axiomática encontró cierta resistencia. Hasta 1920 no terminó de asentarse y en 1930 ya triunfó definitivamente (año en que Van der Waerden publica su famoso Álgebra Moderna en el que se ofrece un enfoque general unificado de todo el nuevo Álgebra).

La nueva visión axiomática consiguió la unificación con los importantes trabajos sobre *problemas lineales finitos*, que habían permanecido independientes hasta entonces (Dorier, 2000, p. 30), proporcionando una mejor fundación teórica e introduciendo nuevas perspectivas para el estudio de la Geometría y la Física (porejemplo, el trabajo de Weyl da una definición axiomática de los espacios afines inspirado por la Teoría de la Relatividad) (p. 42). También hace posible el desarrollo del Análisis Funcional. Hilbert en sus trabajos indica la necesidad de una teoría más unificada para superar el uso de *coordenadas* y de la *Teoría de Determinantes*, cuyos métodos se habían generalizado a dimensiones infinitas y consistían en el principal recurso hasta entonces (reforzado por la visión demasiado formalista de las funciones como series de coeficientes) para resolver cuestiones sobre *ecuaciones diferenciales* e *integrales*.

Este desarrollo aporta el último paso necesario en la construcción de la estructura de los espacios vectoriales: considerar funciones aceptables entre ellos –los *operadores* o *aplicaciones lineales*– creando conjuntos de funciones que contengan todas esas aplicaciones lineales y definiendo *operadores funcionales* que actúan sobre dichos conjuntos. La idea de una función de funciones llevó a hablar de límites, derivabilidad e integrabilidad de estos nuevos objetos, impulsando el desarrollo de nociones como *distancia* y *norma* y la consecuente reflexión sobre su *estructura topológica*. Así, mientras que los aspectos topológicos de este tipo de espacios lograron relativamente pronto una formulación axiomática no fue así con su estructura lineal. La definición de Espacio Vectorial Normado (*espacio de Banach*) apareció antes de que el concepto de Espacio Vectorial se hubiera establecido definitivamente. A finales de los años veinte del s. XX se afianzaron las bases necesarias y surgió la definición abstracta de espacio de Hilbert, arrojando luz nueva sobre la presentación formal de los *Espacios Euclídeos* y sobre la *Teoría Espectral*. Finalmente en 1941, con la definición de Álgebra de Banach se conectaron por primera vez los aspectos algebraico y analítico de la teoría axiomática de los espacios vectoriales (Dorier, 2000, p. 55,56).

Etapa 3: Difusión y consolidación del AL como asignatura

De la evolución del AL descrita anteriormente observamos que la comprensión de los espacios vectoriales y de su estructura emergió básicamente en tres contextos muy distintos dentro de las Matemáticas (además de otros contextos de la Física): Geometría, Análisis y Álgebra. Sin embargo, la comunicación y la difusión de esta disciplina se hicieron desde un punto de vista fundamentalmente algebraico. La primera contribución importante en este sentido se realizó desde Alemania, país que hasta la 2ª Guerra Mundial estuvo en la cabeza de los avances matemáticos de la época. El libro de Van der Waerden marcó una nueva era en el desarrollo matemático del Álgebra y se convirtió en uno de los primeros libros de texto para principiantes por la accesibilidad de sus contenidos. Tras la guerra, muchos matemáticos alemanes emigraron a EEUU, influenciando mucho en la enseñanza del AL marcada también por la publicación de los dos siguientes libros: *Survey of Modern Algebra* (primera edición) publicado en 1941 por Garret Birkhoff y Saunders MacLane, y *Finite- dimensional vector spaces* publicado por primera vez en 1942 por Paul R. Halmos (Halmos, 1974).

Durante estos años, en Francia estaba surgiendo un creciente descontento con los modos de enseñanza tradicionales. En 1934 un grupo de matemáticos jóvenes fundó el grupo Bourbaki. Unos de sus principios más fuertes eran la generalidad y el formalismo, de modo inicialmente se escogía la presentación más universal posible y después ya se pasaba a los casos particulares. En el contexto del AL esto implicaba presentar primero el concepto de *módulo sobre un anillo*. Entre 1930 y 1950, bajo la influencia de este grupo, se extiende (hasta llegar a convertirse en un dogma) la idea de que la mejor forma de modelar situaciones lineales es la presentación axiomática (p. 58), trascendiendo a otros países como España. Estas ideas repercutieron en la enseñanza de la Geometría que finalmente, bajo la influencia de Dieudonné (y su libro *Algèbre linéaire et géométrie* publicado en 1963) acabó por convertirse en una mera aplicación de la teoría axiomática del AL. En los años 80, el fracaso de la reforma de las Matemáticas Modernas encabezada por los bourbakistas se hizo patente y se retiró la teoría axiomática del AL de la Enseñanza Secundaria.

4.1.1.2 Noción y Papel de la Visualización en el Desarrollo del AL

La principal conclusión que obtenemos del Estudio Epistemológico en torno a esta cuestión es que la relación entre la visualización y el desarrollo de la teoría abstracta de espacios vectoriales es compleja. De hecho, aunque la Geometría desarrolló ideas clave del AL y sentó bases necesarias para el desarrollo de la teoría axiomática (como la noción de *vector*) finalmente no se llegó a ella por este camino, si no que se hizo a raíz del desarrollo del Análisis Funcional. Por tanto, aunque el contexto de la Geometría sirvió para proporcionar lenguajes y puntos de vista diferentes (a menudo más familiares e intuitivos para los matemáticos), no condujo de forma natural a la construcción de la noción abstracta de *Espacio Vectorial* (Gueudet-Chartier, 2000). Este hecho tiene implicaciones didácticas que se deben tener en cuenta a la hora de enfrentar la controversia planteada en el Marco Conceptual (ver sección 3.3.2.5) en torno a las propuestas de enseñanza que toman la Geometría como punto de partida.

El origen de la relación entre la visualización, y más concretamente el uso de la Geometría y el estudio de los problemas lineales, surge con la aparición de la Geometría Analítica y la transferencia de métodos que ésta supuso del Álgebra a la Geometría, produciendo una restructuración en esta última a favor de la linealidad[63]. El nuevo método se popularizó rápidamente por su gran poder de simplificación y unificación pero también hubo críticas, como las de Leibniz, que temía que la dependencia en una elección de coordenadas (paso carente de sentido en los argumentos geométricos sintéticos) alejase el problema de su naturaleza geométrica e impidiese el control intuitivo de su solución: el método analítico era capaz de demostrar un resultado pero no daba razones de por qué era cierto. En aquella época, esta búsqueda de justificaciones intuitivamente razonables era una necesidad esencial, que se cubría encontrando modelos reales en el espacio o la naturaleza que les rodeaba. Esta fue la razón que impulsó primero a Wallis (en 1676) a tratar de legitimar las raíces de números negativos buscando una interpretación geométrica y después a Möbius y Bellavitis a desarrollar estas ideas y explorar las propiedades del espacio geométrico desde la óptica del Álgebra, creando el Cálculo Baricéntrico y el Cálculo de Equipolencias respectivamente. Fue en este contexto del espacio tridimensional donde surgieron nociones relativas a la estructura lineal de los espacios vectoriales –vectores y sus operaciones– que finalmente condujeron al Cálculo Vectorial, herramienta potente empleada con éxito en los campos de la Mecánica y el Electromagnetismo (p.29).

Hacemos notar que, en los dos ejemplos anteriores –interpretación geométrica de números negativos y desarrollo de un cálculo geométrico– hay una relación entre Álgebra y Geometría producida principalemente, aunque no sólo, en sentido directo e inverso, respectivamente. De hecho, la concatenación y combinación flexible de distintos modos de pensamiento –en este caso el geométrico y el algebraico– es importante en el desarrollo del AL, como muestra el trabajo de Hamilton con los *cuaterniones*. Otra condición significativa en dicho desarrollo relativa al uso de la Geometría fue la superación de las tres dimensiones, también presente en el trabajo de Hamilton. Esto no ofrecía ningún problema en el contexto algebraico, donde ya se llevaba tiempo trabajando con *sistemas de n ecuaciones con n incógnitas*, pero sí en el geométrico.

Una de las principales dificultades que enfrentaba el desarrollo del Cálculo Geométrico era encontrar una interpretación geométrica para la multiplicación. Trabajando con la representación gráfica de la multiplicación de cantidades imaginarias a través de rotaciones de vectores, este autor se dio cuenta de que un cálculo geométrico tridimensional no podía ser conmutativo y que también debía estar basado en cuaternas en lugar de en ternas. Esta idea de la necesidad de una cuarta dimensión ya está presente en el trabajo de Möbius, pero éste la rechazó como imposible al no poder concebir un modelo geométrico "real" de ello. Por tanto, en esta época, la Geometría servía como base de justificación pero al mismo tiempo ejercía un bloqueo sobre el desarrollo de nuevas

[63] Inicialmente la Geometría Analítica no se basaba en la identificación del espacio con IR^3, como se piensa actualmente, si no que la analogía se establecía entre métodos y problemas y en particular, entre los métodos de coordenadas aplicados a ecuaciones que en geometría se traducían en "líneas", i.e. curvas algebraicas (Dorier, 2002, p. 27). Se habla reestructuración a favor de la linealidad porque antes las circunferencias y las rectas ocupaban un mismo nivel de importancia en el plano loci, pero ahora las últimas triunfaban sobre las primeras al poderse escribir con ecuaciones lineales de forma sencilla (Dorier, 2000, p. 13)

ideas. Con la aparición de las Geometrías no Euclídeas a principios del s. XIX, la necesidad de un modelo físico real desaparece y se abre la posibilidad de Geometrías en espacios n-dimensionales. A su vez, este cambio también trajo consigo la posibilidad de interpretar geométricamente las álgebras *n*-dimensionales. De este modo, a finales del s. XIX todos los problemas lineales admitían una interpretación tanto algebraica como geométrica, suponiendo un gran avance en la unificación del AL (Dorier, 2000, p. 28).

Sin embargo, la irrupción de las Geometrías no Euclídeas supuso, junto a otros factores (ver sección 3.2.3.5), una creciente desconfianza hacia la intuición a favor de un aumento del formalismo. La Geometría pasa así de ser fuente de inspiración a un contexto de aplicación de ideas más generales. Este hecho se corrobora en el trabajo de Grassmann que, como explicamos anteriormente, según Dorier (2000) fue la verdadera semilla –y no el Cálculo Vectorial y el trabajo de Hamilton– del concepto abstracto de *Espacio Vectorial*. A pesar de esta nueva tendencia, las primeras aproximaciones axiomáticas provenientes de Peano y sus discípulos estuvieron relacionadas con la Geometría, dando lugar a puntos de vista diferentes sobre nociones fundamentales como *base* o *dimensión*: en Peano la idea de generación está ausente (y por tanto la de orden como grado de evolución de una extensión), en su lugar el espacio se concibe de forma más estática y el orden o la dimensión se concibe en términos de grados de libertad (p.32). Lo interesante de este hecho, independientemente de que una noción estuviese más lograda que otra, es que da un ejemplo claro de cómo distintos puntos de vista dan acceso parcial a distintas propiedades de un objeto y cómo, con la combinación de ambas, se logra una mejor comprensión.

De hecho, el lento desarrollo de la teoría axiomática tuvo que ver con una falta de flexibilidad entre diversos puntos de vista a favor del formalista, que en el contexto del AL se vio reforzada por el enfoque técnico empleado tradicionalmente en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. En cualquier caso, hay que reconocer que el éxito del desarrollo de la teoría axiomática llega con la *superación del punto de vista geométrico*, a pesar de que algunos términos –como vectores o puntos– y nociones –como distancia, producto escalar o norma– se importaron de la Geometría por su analogía con cuestiones topológicas o a pesar de que la aportación de pensar geométricamente en los espacios de Hilbert realizada por Riesz y Schmidt fue esencial. En 1918 Weyl resaltó la importancia de entender en qué sentido la teoría axiomática de los espacios vectoriales es más que una mera generalización de la Geometría (Dorier, 2000, p. 38). Un ejemplo de ello es el concepto de *rango*, que fue tan esencial y costoso en el contexto de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y es hoy tan importante dentro del AL, pero apenas tiene relevancia en el contexto geométrico (p.60).

De este análisis epistemológico sobre el papel de la *visualización* en el desarrollo del AL, observamos que a lo largo de la historia esta noción aparece fundamentalmente como *uso de la Geometría* que, a su vez está estrechamente vinculado con la *intuición*. También aparecen evidencias de visualización como *uso y conexión de representaciones*. No sólo en relación al registro gráfico o al modo de pensamiento geométrico sino también en un sentido más amplio. En ocasiones la creación de una nueva representación o notación marcó un momento clave en la historia del AL. Por ejemplo, en 1798 Euler introdujo una notación para substituciones lineales, muy similar a la de las matrices actuales, que

Cauchy reconoció como útil para probar propiedades como que el determinante del producto era el producto de los determinantes.

En contraste, la falta de una notación adecuada que distinguiese matrices y determinantes dificultó el avance de la teoría amalgamando ambos conceptos durante mucho tiempo. En otras ocasiones, el avance vino de identificar como similares dos objetos representados de forma diferente, como ocurrió por ejemplo con las ecuaciones y las soluciones de los sistemas lineales, idea importante para dar con el concepto de *vector*. Por tanto, en el desarrollo del AL convivieron una gran diversidad de registros, representaciones y lenguajes que se pueden clasificar como sigue: *geométrico analítico* (con coordenadas) *o geométrico sintético* (libre de ellas); *algebraico* (ecuaciones, *n*-tuplas, coordenadas respecto de una base); *analítico* (a veces se usa indistintamente para referirse a lo algebraico aunque también aparece en relación a la dimensión infinita); *axiomático* (o simbólico). En relación a la visualización también podemos hablar del uso de *ejemplos*, tan importante cuando aún no se ha alcanzado suficiente nivel de abstracción (como ocurrió con los espacios vectoriales infinito dimensionales). Otras concepciones de la visualización como el uso de *metáforas* están menos presentes, quizá también debido a la dificultad de transmisión de este tipo de procesos.

Frente a esta diversidad de usos de la visualización que conviven en el desarrollo del AL, cada autor o matemático se sitúa de modo diferente a la hora de hacer y comunicar Matemáticas según sus creencias y su visión de las mismas. En particular, en la revisión que acabamos de hacer del desarrollo del AL encontramos dos opiniones muy marcadas en relación al uso de la Geometría: por un lado ésta se presenta como una fuente de experimentación, inspiración e intuición y en definitiva como la base de las ciencias y las Matemáticas; por otro, aparece como un primer paso, que hay que superar, para poder llegar a razonamientos más generales. Estas visiones de la Geometría también se manifiestan en los libros de texto clásicos consultados, aunque no siempre lo hacen de forma clara. Por ejemplo, algunas afirmaciones que hace Dieudonné (1964) en su prefacio de *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire* podrían llevar a encuadrar a este autor en la primera visión.

> *Por otra parte, he tratado de resistir la tentación de introducir* prematuramente *las teorías que serán enseñadas en la Universidad. Creo que, afortunadamente, la naturaleza nos ha proporcionado de una "línea de demarcación" perfectamente trazada, al dotarnos de la intuición geométrica para los espacios de dos y tres dimensiones; es posible, por tanto, representar gráficamente* todos *los fenómenos del Álgebra Lineal limitada a estas dimensiones (y, naturalmente, a escalares* reales*), y me he impuesto estrictamente esta limitación. [...] [M]i idea es presentar estos conceptos al alumno bajo una forma en cierto modo* experimental*. En otras palabras, la naturaleza nos ofrece un maravilloso laboratorio de donde familiarizarse con casos particulares de aspecto muy sencillo y susceptibles de imágenes concretas, de conceptos cuya esencia es mucho más general pero mucho más abstracta, y que será necesario asimilar bajo esta forma general más adelante; sería ciertamente una pena no sacar el máximo partico de esta afortunada circunstancia (Dieudonné, 1971, p. 9).*

> *En suma, la enseñanza en los primero años secundarios debería ser una mezcla sabiamente dosificada de "experiencias geométricas" bien elegidas y de razonamientos parciales sobre los resultados de estas experiencias: algo análogo al aprendizaje de la Física o de la Química, una especie de "Física del espacio" (Dieudonné, 1971, p. 12).*

Sin embargo, este libro está pensado para ayudar a los profesores de instituto con la nueva reforma impulsada por los "bourbakistas" (y encabezada por Dieudonné) que condujo a la introducción del enfoque axiomático en Secundaria. De este modo la introducción inicial de la Geometría se traduce en incluir al comienzo del libro los axiomas de Euclides, siendo el resto del libro muy simbólico y formalista. Tanto que no incluye ni una sola figura. Esto lo justifica el autor como sigue, indicando la necesidad de buscar nuevas formas de visualización:

> *Me he permitido también no introducir ninguna figura en el texto aunque sólo fuera para hacer ver que no son necesarias; pero ésta es también una falta que pueden subsanar mis lectores por sí mismos.(Dieudonné, 1971, p. 10)*
>
> *Es, por tanto, deseable liberar al alumno cuanto antes de la camisa de fuerza de las "figuras" tradicionales (exceptuando naturalmente punto, recta y plano), en beneficio de la idea de transformación geométrica del plano y del espacio en sus totalidades, sobre la cual se debe insistir sin cesar y que debe ser ilustrada con múltiples ejemplos. Asimismo conviene ciertamente enseñar al alumno el arte de las construcciones geométricas, pero hay que huir como de la peste de lo que es, sin duda, el mayor "fastidio" de la enseñanza clásica: la limitación de los instrumentos de dibujo a la regla y el compás; sería por el contrario, necesario multiplicar los ejemplos de aparatos mecánicos que realicen construcciones varias, y todavía mejor que efectúen transformaciones del plano (pantógrafo, afinógrafo, etc.) (Dieudonné, 1971, p. 12)*

Algo similar, aunque en sentido contrario, ocurre con el libro de Halmos (1974) *Finite Dimensional Vector Spaces*. Este autor desde el comienzo declara estar interesado en la generalidad, considerando más apropiados los métodos libres de coordenadas:

> *My purpose in this book is to treat linear transformations on finite- dimensional vector spaces by the methods of more general theories. The idea is to emphasize the simple geometric notions, and to do so in a language that gives away the trade secrets and tells the student what is in the back of the minds of people proving theorems about integral equations and Hilbert spaces. The algebraic, coordinate- free methods do not lose power and elegance by specialization to a finite number of dimensions, and they are, in my belief, as elementary as the classical coordinatized treatment" (Halmos, 1974, p. v).*

Estas afirmaciones, unidas al hecho de que en su libro tampoco hay una sola figura, podrían llevar a pensar que este autor es un representante de la segunda visión expuesta en torno al papel de la Geometría en el AL. Sin embargo, si se consulta el libro más detenidamente, se comprueba que se lleva a la práctica el deseo del autor, expresado en el prefacio, de enfatizar la base geométrica que está detrás de nociones generales como los espacios de Hilbert. Esto se logra a través de las introducciones, comentarios y ejemplos que acompañan las definiciones y teoremas. También se encuentran aclaraciones de ciertas representaciones y notaciones.

Por tanto, las fronteras entre ambas visiones del papel de la Geometría son bastante difusas. De hecho, ambas opiniones parecen ser más complementarias que opuestas, lo que nos lleva a pensar que sería deseable un equilibrio entre ambas en la enseñanza. La obra de Grassmann (1995) muestra que la convivencia coherente de ambas es posible. Este autor, a pesar de afirmar orgulloso que su ciencia es "*pura e independiente de la Geometría*", acompaña sus textos de numerosos e ilustrativos ejemplos geométricos:

> *The pure, the scientific way to treat extension theory would be that attempted in the introduction, that is to develop everything fundamental to this science from the concepts. However, to avoid wearying the reader with continued abstractions, and at the same time, by touching upon familiar material, to put him in a position to proceed with greater freedom and independence, I will always relate the derivation of new concepts to geometry, which is the basis of our science. However, since I always present the abstract concept as the basis for the derivation of the truths that form the content of this science, without relying on any geometrical truth, I am able to keep the content of the science completely pure and independent of geometry (Grassmann, 1995, pp. 45–46).*

4.1.2 Estudio Institucional

El Estudio Institucional se plantea con el objeto de conocer mejor el contexto y la visión oficial del AL en la institución en la que se desarrolla la investigación. La Figura 4. 3 recoge los diferentes niveles de análisis seguidos para analizar el uso de la visualización en el curso observado. Para ello se estudian documentos oficiales y materiales del curso, éstos se cotejan con la revisión de 20 de libros de texto de AL y finalmente se contrastan los resultados anteriores con las prácticas reales de enseñanza a través de observaciones de clase (ver Metodología, sección 2.4.2.2). En particular, se precisará: la postura inicial relativa al uso de la geometría escogida, el uso intencionado de distintos tipos de representaciones, y el grado de explicitación ofrecido del cambio del punto de vista.

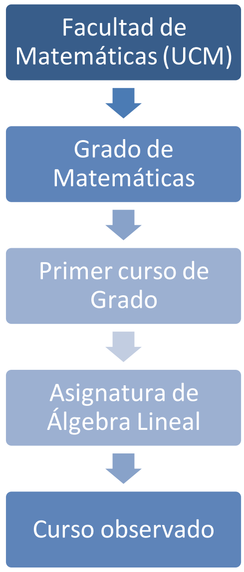


Figura 4. 3: Niveles tenidos en cuenta en el Estudio Institucional.

4.1.2.1 La Asignatura de AL a través de la Guía Docente

A continuación se describen los contenidos de la Guía Docente anual correspondiente al curso 2009/2010, comparados con los del 2010/2011 (muy parecida a la anterior) y completados con observaciones del desarrollo real de la asignatura. Se sigue la estructura organizativa de la misma (ver Anexos): identificación (nombre, titulaciones en que se imparte, distribución de créditos ECTS, departamentos responsables, breve descriptor, prerrequisitos, idiomas, recomendaciones, asignaturas en cuyo desarrollo influye); profesores responsables de cada grupo; coordinación; horarios y fechas de exámenes; objetivos, competencias; contenidos temáticos; metodología (técnicas docentes y porcentaje de créditos por actividad); material bibliográfico (textos y materiales elaborados por el profesor, bibliografía básica, bibliografía complementaria y otros recursos); evaluación. La información más relativa al curso observado ya se explicó en la Metodología (ver sección 2.1.1), ahora nos centramos en la asignatura de AL.

La asignatura de AL es anual, con 18 créditos ECTS, y de "*carácter básico*", significando que "*influye decisivamente en el desarrollo de todas las asignaturas que le siguen*" (ver Guía Docente en los Anexos, p.1). Corre a cargo de dos departamentos de la Facultad de Matemáticas: el de Geometría y Topología y el de Álgebra (siendo este el responsable del grupo observado). Las únicas recomendaciones que se hacen para seguir apropiadamente la asignatura son asistir a las clases, llevar un estudio diario y asistir a las tutorías. Los *objetivos* se describen en diversos apartados y están estrechamente relacionados con las *competencias*[64]:

1. *Se estudiarán los espacios vectoriales, las aplicaciones lineales entre los mismos y las formas bilineales. Los objetivos fundamentales son los teoremas de clasificación de endomorfismos y de formas bilineales simétricas, tanto en el caso real como en el complejo. El Álgebra Lineal se aplicará al estudio de la Geometría Afín y Euclídea (ver Guía Docente en los Anexos, sección Identificación, apartado "Breve descriptor").*

[64] "*Entender la estructura de espacio afín y euclídeo y resolver problemas afines y métricos de carácter elemental*"

2. *Entender en qué consiste la naturaleza lineal o cuadrática de algunos problemas matemáticos y de las ciencias experimentales. Aprender a manejar con soltura el lenguaje matricial inherente al planteamiento y resolución de dichos problemas (ver Guía Docente en los Anexos, sección Objetivos).*
3. *Comprender el cálculo matricial desde el punto de vista conceptual que proporcionan los espacios vectoriales. Conocer y saber emplear los teoremas básicos fundamentales del Álgebra Lineal (ver Guía Docente en los Anexos, sección Objetivos).*

El primer objetivo sitúa como contenidos centrales las *Aplicaciones Lineales* y su *clasificación* desde diversos puntos de vista, más que la noción abstracta de Espacio Vectorial. En cuanto al papel de la Geometría en el curso, ésta aparece como una aplicación de la teoría más general (referida como "Álgebra Lineal"), coincidiendo con un enfoque más moderno de la disciplina también presente en los términos "*teoremas*" y "*estructura*" empleados en el apartado de "*Competencias*". El segundo objetivo enfatiza la aplicabilidad de la disciplina a través de la resolución de problemas, no sólo en las Matemáticas sino también en otras ciencias experimentales. Este hecho denota interés en el carácter interdisciplinar y unificador de la disciplina, también presente en el "*Breve Descriptor*", puesto de relieve en el Estudio Epistemológico. Se hace hincapié en el *lenguaje matricial* y en su "*manejo con soltura*", resaltando el aspecto operativo de dicho lenguaje. Parece que la falta de referencias a otros lenguajes del AL se justifica señalando que el matricial es "*inherente*" a los problemas lineales referidos en la frase anterior. En el tercer objetivo, se continúa incidiendo en el aspecto operativo del "*cálculo matricial*" dándole una dimensión más conceptual al hablar de su "*comprensión*". Ésta debe lograrse "*desde el punto de vista conceptual que proporcionan los espacios vectoriales*", pudiéndose interpretar como un intento de establecer vínculos entre el lenguaje matricial y un *lenguaje más abstracto o simbólico,* en el que suelen estar enunciados los teoremas básicos que se espera que se "*conozcan y se sepan emplear*". El registro gráfico o pensamiento más geométrico, sin embargo, no tiene ningún papel en los objetivos del curso.

Contenidos y duracion aproximada por semanas:		
	Programa teórico	Semanas
	Gauss-Jordan. Determinante. Rango	5
	Teoremas de la base. Aplicaciones lineales. Espacio dual	6
	Clasificacion de endomorfismos. Formas de Jordan	7
	Clasificación de formas bilineales simétricas	3
	Endomorfismos ortogonales y autoadjuntos en espacios euclideos	2
	Espacio Afin y Euclideo	2

Figura 4. 4: Contenidos y duración aproximada por semanas según la Guía del curso.

Los "*Contenidos*" de la asignatura para el grupo observado, así como su distribución aproximada entre las 25 semanas que se disponen para el curso aparecen en la siguiente Figura 4. 4. Tanto el planteamiento de los contenidos como la distribución temporal en semanas son coherentes con los objetivos del curso, teniendo más peso la parte de clasificación de endomorfismos y formas cuadráticas. La parte euclídea, y sobre todo la afín, se reducen a apenas un par de semanas. De hecho los espacios afines no se llegaron a estudiar, quizá porque se estudian después en la asignatura de Geometría Lineal. Consideramos que esta compartimentación de la parte algebraica y geométrica en dos asignaturas diferentes podría dificultar la conexión entre ambos modos de pensamiento, que se ha probado tan útil y necesaria en el Estudio Epistemológico.

Los "*Materiales*" del curso consisten en el Libro de Texto (Fernando et al., 2010), las Hojas de Problemas y la autoevaluación [65]. Además del Libro de Texto, se ofrece una "*bibliografía de consulta*". También, el grupo observado cuenta con una página web en la que circunstancialmente se cuelgan documentos y, en el curso 2010/2011, se habilitó una asignatura de Campus Virtual (en Moodle) para el Grupo de Prácticas (ver sección 2.1.2.2). Las clases teóricas (ver sección 2.1.1) suponen 10 créditos de la asignatura, de los cuales el 40% serían presenciales y el restante 60% de trabajo autónomo. Las clases prácticas o de problemas (ver sección 2.1.1) suponen 1 crédito de resolución de problemas en grupo y 5 de resolución individual de los cuales el 20% serían presenciales y el 80% de trabajo autónomo. Por tanto, el grado de participación esperado de los estudiantes en el aula es limitado. Otras "*Técnicas Docentes*" previstas y desarrolladas en la práctica son: tutorías (2 créditos 100% presenciales), prueba escrita a mitad de cada cuatrimestre[66]. Por tanto, existe cierto nivel de seguimiento de la actividad de los estudiantes durante el curso, facilitando un acercamiento a la "*Evaluación*" continua, especialmente en el curso 2010/2011. En ambos cursos los exámenes parciales y finales cuentan un 100% de la nota, pero en el segundo se especifica que la calificación podrá incrementarse con un 5% obtenido a través de la entrega de problemas por escrito (la prueba escrita intermedia y la autoevaluación) y otro 5 % por la participación en clase.

[65] Consistente en la entrega periódica de ejercicios tipo test corregidos por el profesor de prácticas y devueltos posteriormente al estudiante. No se han tenido en cuenta en la investigación.

[66] Se excluyen, entre las técnicas docentes contempladas en la guía, la asistencia al "Laboratorio de Informática" y la "Exposición oral de problemas resueltos en tutorías programadas".

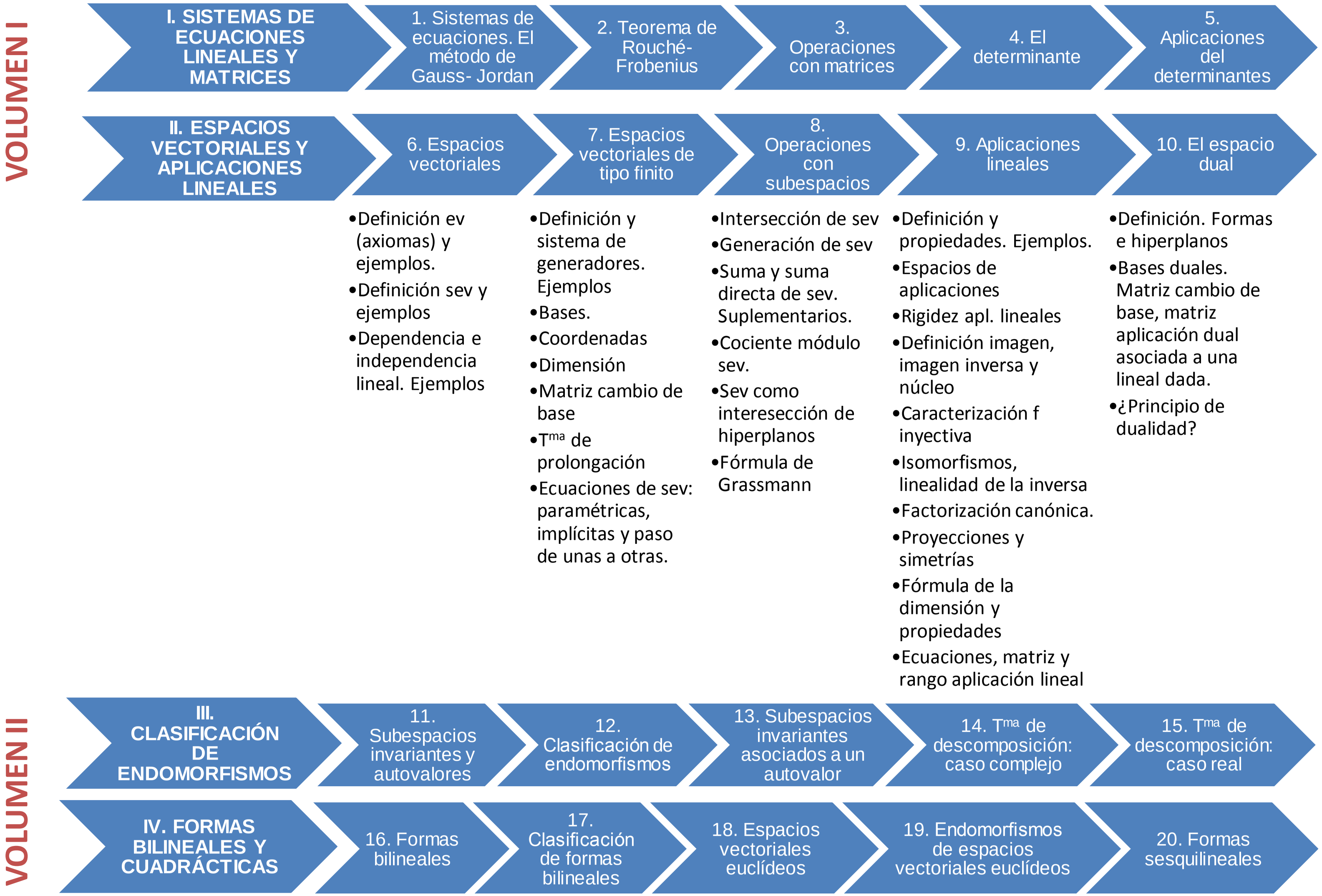


Figura 4. 5: *Estructura y contenidos del Libro de Texto de la asignatura.* Consta de dos volúmenes estructurados en dos grandes capítulos que a su vez se dividen en cinco unidades cada uno. En la figura se hace hincapié en los contenidos del Capítulo II, por ser el que contiene la Unidad sobre Aplicaciones Lineales (observada en el Estudio Exploratorio) y la mayoría de contenidos sobre el cociente a los que se hará referencia en el siguiente capítulo.

4.1.2.2 El Papel de la Visualización en el Curso a través del Libro de Texto

Para completar la información obtenida de la guía de la asignatura analizamos los materiales del curso observado: el Libro de Texto de referencia, las Hojas de Problemas y los enunciados de los exámenes (ver Metodología, sección 2.4.2.2). La estructura y contenidos del Libro de Texto se recogen en la Figura 4. 5.

El **enfoque** del Libro de Texto (Fernando et al., 2010) está en consonancia con el de la Guía Docente y con parte del desarrollo histórico de la asignatura. El punto de partida es el estudio de los sistemas de ecuaciones, contexto en el que emergen las matrices y la teoría de determinantes, y en particular las nociones de combinación e independencia de ecuaciones (p.137)[67]. La teoría formal de los espacios vectoriales se presenta como unificadora de lo hecho previamente con filas y columnas en las matrices; después se introducen las aplicaciones lineales y bilineales y los correspondientes problemas de clasificación que, de acuerdo con lo establecido en la Guía Docente, ocupan una parte sustancial del texto[68]. Finalmente se reservan un par de capítulos sobre los espacios euclídeos y se finaliza con las formas sesquilineales (que no se cubrieron en clase).

En el Prefacio, los autores manifiestan su principal **objetivo**, que es "*explicar el significado verdadero de las cosas*" (Fernando et al., 2010, p. v). En este línea, en la introducción al Capítulo I sobre Sistemas de Ecuaciones se señala que no se pretende enseñar nuevos métodos de resolución de sistemas sino "*explorar el contenido conceptual*" para que el lector sepa lo que sabe en un sentido profundo, esto es, conociendo "*el por qué y no sólo el para qué*" (p.1). Escogen un **estilo** directo, libre de formalismos innecesarios, aunque no por ello menos riguroso. En esta línea, los ejemplos y los problemas resueltos se consideran de gran importancia y por ello constituyen una parte importante del texto. Hay numerosos ejemplos formando parte de la exposición de los contenidos y al final de cada unidad se incluye una colección de 15 problemas. Las soluciones de estos problemas se muestran al final de cada capítulo, junto a una sección de 50 cuestiones de verdadero o falso que pueden utilizarse a modo de autoevaluación y que son del tipo de las incluidas en la parte teórica de los exámenes finales y parciales.

La **Geometría** tiene un papel limitado en el texto[69], aunque se detecta cierta intención de hacer conexiones con ella. Inicialmente se presentan los contenidos del libro como sigue: "*En conjunto, se cubre todo lo que a veces se denomina* limitado en el *Geometría Vectoria*"*l* (Fernando et al., 2010, p. v). En ocasiones se busca dar contenido geométrico a los enunciados presentados, como se pone de manifiesto en la introducción al capítulo II:

> *El punto de apoyo para presentar estas nociones [de Espacio Vectorial y de Aplicación Lineal] y demostrar los resultados principales es la teoría de sistemas de ecuaciones lineales desarrollada previamente, en especial las ideas básicas de combinación e independencia de*

[67] Cuando no se indique lo contrario, la página hace referencia al Volumen I del Libro de Texto.

[68] Durante el curso, la parte correspondiente a diagonalización de endomorfismos se sustituye por unos apuntes que el profesor cuelga en la página web del curso, pero esto no cambia la distribución de contenidos que estamos describiendo.

[69] De hecho, la edición anterior del libro de texto se titulaba "Álgebra Lineal y Geometría" mientras que la edición a la que se está haciendo referencia pasó a titularse simplemente "Álgebra Lineal".

ecuaciones. Además, así se da un contenido geométrico a la teoría de matrices que ya conocemos (Fernando et al., 2010, p. 137).

Un poco más adelante, en la introducción al tercer Capítulo dedicado a la Clasificación de Endomorfismos, aclaran a qué se refieren exactamente con "*contenido geométrico*": "*Con ello se empieza a hacer Geometría, pues se toca ya de manera no trivial la comprensión cualitativa de los objetos que se estudian*" (Fernando et al., 2010, p. 1, vol. II). Por tanto para los autores, la Geometría va más allá de una mera aplicación y está relacionada con la comprensión cualitativa de los objetos, apareciendo únicamente en relación a dimensiones bajas. De hecho la Geometría y los razonamientos geométricos están bastante presentes en la exposición de los contenidos de este Capítulo III, en el que los autores se plantean el objetivo específico de proporcionar una buena comprensión y una soltura en el manejo de endomorfismos entre espacios de dimensión cuatro para abajo (p. 1, vol. II). Un ejemplo de este tipo de razonamiento geométrico aparece en relación al cálculo de espacios invariantes: éste se usa como medio para razonar si ya se han encontrado todos o no (p. 29, vol. II). En esta ocasión los autores aprovechan para reflexionar sobre la conexión entre los razonamientos algebraicos y geométricos, indicador de cierta sensibilidad por este tipo de cuestiones que van más allá de la mera exposición de contenidos:

Y aunque tal vez los métodos geométricos sean menos aburridos que los algebraicos, vemos que los dos son necesarios. Pero para combinarlos con fundamento hace falta comprender cualitativamente la estructura general de invariantes de un endomorfismo. Intentaremos alcanzar tal comprensión en las siguientes lecciones (Fernando et al., 2010, p. 29, vol. II).

Otro ejemplo que muestra la intencionalidad de los autores de conectar ambos modos de pensamiento –algebraico y geométrico– aparece en la solución a un problema de la Unidad 12, sobre Clasificación de Endomorfismos (ver Figura 4. 6). Este ejemplo ilustra el modo en que habitualmente se realiza esta conexión: primero se introduce el razonamiento (o los cálculos) de modo algebraico; segundo, se introduce el geométrico sólo si se considera muy necesario (como en el caso de la Figura 4. 6 donde lo algebraico se considera "*poco esclarecedor*"). El hecho de buscar la coordinación de ambos modos de pensamiento es positivo desde el punto de vista de la **flexibilidad cognitiva**, pero podría no serlo tanto que ésta conexión siempre se haga en el mismo sentido. Esto podría estar dando a entender al estudiante que la Geometría es una mera aplicación de lo algebraico y no un camino hacia la comprensión, en contra de la visión expuesta anteriormente.

Este ejemplo también ilustra el tipo de **representaciones** que se suelen emplear en los razonamientos geométricos. Llama la atención que a menudo éstos se expresan en el *lenguaje matemático natural* y el *lenguaje simbólico,* siendo el uso de *representaciones gráficas* muy poco frecuente (se han contado un total de siete figuras en los dos volúmenes). De hecho, los dos primeros lenguajes predominan fuertemente en el texto, especialmente en las partes más teóricas como la definición de un nuevo concepto, el enunciado de un teorema o proposición o su demostración (en este caso, aparecen además tratamientos de dichas representaciones). Por el contrario en los ejemplos y las soluciones de los problemas, el *registro de tablas* –tanto algebraico como numérico– adquiere un mayor protagonismo. Se usa fundamentalmente para describir los datos del problema (como subespacios o aplicaciones lineales concretas) en combinación con tratamientos que tienen como objetivo resolver el problema. Continuando con el análisis de las representaciones presentes en el texto, el último tipo que podemos encontrar son las *diagramáticas*. De hecho, en la portada o contraportada de uno de los volúmenes, se exhibe una de estas representaciones. Estas representaciones son importantes en AL, especialmente para hablar de composición de funciones. En el capítulo sobre EVC (sección 4.3.1) hay ejemplos concretos del uso de los diferentes tipos de representaciones donde pueden comprobarse las observaciones realizadas.

El problema estaría terminado así, pero de una manera poco esclarecedora de la situación geométrica en la que nos encontramos. Por ello preferimos razonar como sigue. Reescribimos las ecuaciones $(*)$ como sigue:

$$W : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ a(5x_2 - 3x_4) + b(5x_3 - 3x_4) = 0, \end{cases} \quad \text{con } (a, b) \neq (0, 0).$$

Vemos que la segunda ecuación es exactamente una cuyas soluciones contienen las del sistema $5x_2 - 3x_4 = 5x_3 - 3x_4 = 0$. Este sistema de dos ecuaciones independientes define en H la recta

$$L : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 - 3x_4 = 0, \\ 5x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases}$$

luego los planos buscados son exactamente los planos $W \subset H$ que contienen L. Por tanto, una base de cada uno se puede generar con un generador u de L y con un vector $w \in H \setminus L$; es decir, $\{u, w\}$ será una base de W. Ahora bien, habrá muchos vectores w que con u generen el mismo plano W, de modo que hay que ser un poco más selectivos. Para ello fijamos un plano cualquiera $V \subset H$ que no contenga a L. Como V y W son hiperplanos de H, necesariamente $V \cap W \neq \{0\}$ y podemos tomar $w \in V$. Por ejemplo, sea $V : x_2 = 0$ y explícitemos las cosas. Resolviendo el sistema que define L obtenemos $u = (3, 3, 3, 5)$, y para obtener w resolvemos el sistema $x_1 - 2x_2 + x_3 = x_2 = 0$ que define V, lo que da $w = (\lambda, 0, -\lambda, \mu)$, con $\lambda \neq 0$ o $\mu \neq 0$. En consecuencia:

$$W = L[(3, 3, 3, 5), (\lambda, 0, -\lambda, \mu)].$$

Se debe reparar en el hecho de que las ecuaciones $(*)$ de W han servido exclusivamente para determinar la recta L; cuando se desarrolle completamente la teoría de invariantes y la clasificación de endomorfismos en los capítulos siguientes, se comprenderá mejor hasta qué punto a veces se pueden evitar cálculos explícitos con razonamiemtos geométricos.

Figura 4. 6: Resolución geométrica a un problema (*12.2*) resuelto anteriormente de forma puramente algebraica (Fernando et al., 2010, p. 94, vol.II).

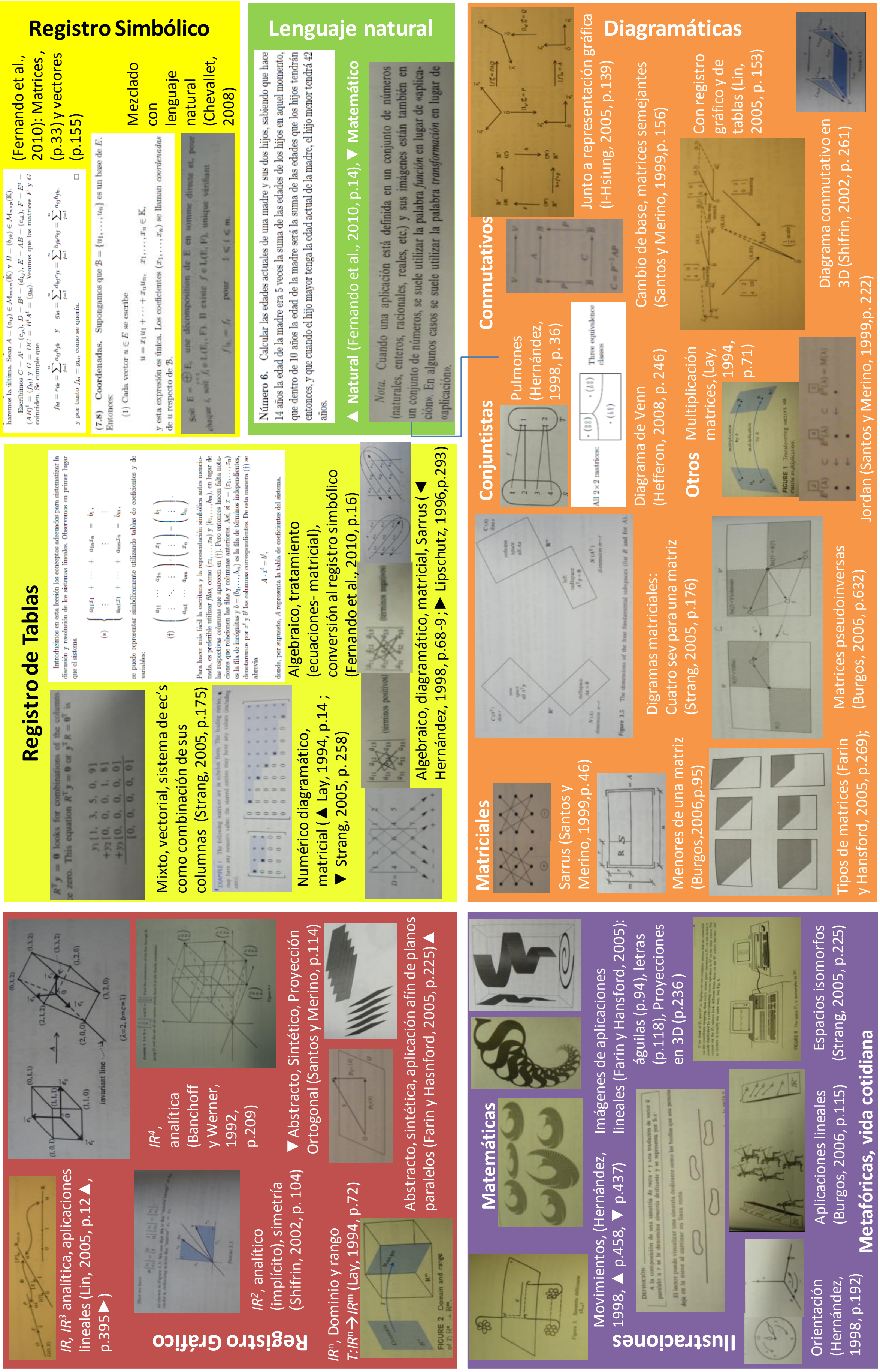


Figura 4. 7: Síntesis de los tipos de representaciones encontrados en el análisis de 20 libros de texto de AL.

Figura 4. 8: Síntesis de las formas de uso de la visualización en el análisis de los 20 libros de texto de AL.

4.1.2.3 Comparación de Enfoques y del Papel de la Visualización en Diferentes Textos de AL

Para situar y contrastar los resultados anteriores sobre el curso de AL en un contexto más amplio, analizamos otros libros de texto de esta asignatura. Este análisis ayuda a precisar el diseño de enseñanza de la visualización, aportando ideas complementarias a las obtenidas de la observación (ver Metodología, sección 2.4.2.1).

De acuerdo con Dorier (2002) se distinguen principalmente dos tendencias en el enfoque de la asignatura (ver Teorías Locales, sección 3.3.1.2): una que se centra en el estudio formal de los espacios vectoriales (que predomina en los libros del Bloque I y en los escogidos como representantes de bibliografía básica de Francia y Alemania) y otra que sigue un enfoque más analítico basado en el estudio de IR^n y el cálculo matricial (que predomina más en los libros del Bloque II, especialmente en los de autores de habla inglesa y a menudo junto al uso de ordenadores). En Santos y Merino (1999) se encuentra otra distinción ligeramente diferente: por un lado está un tipo de presentación "*demasiado abstracta, perdiendo en la efectividad de los cálculos* [y por otro] *un amplio recetario sin justificación que no dejará la suficiente huella en el alumno*" (p.3). El enfoque del libro del curso se sitúa a medio camino en ambas pues comienza con el estudio de sistemas de ecuaciones lineales (en IR^n) pero con el objetivo introducir la teoría axiomática de los espacios vectoriales. Esto se hace buscando una comprensión del cálculo matricial desde el punto de vista conceptual de la teoría axiomática. Este tipo de enfoque es bastante habitual y lo siguen otros textos (Burgos, 2006; Hernández, 1998; Lipschutz, 1996; Merino & Santos, 1999), especialmente los recomendados en la asignatura. Llama especialmente la atención algún enfoque como el de Uligh (2002) que, como el texto del curso da importancia a las Aplicaciones Lineales pero que a diferencia de éste decide situarlas como punto de partida, invirtiendo completamente el orden histórico del desarrollo de la disciplina.

Entre los libros del Bloque III que se escogieron por su énfasis en la Geometría (y también uno de similares características del Bloque II) se encuentra una tendencia diferente a las descritas hasta ahora (aunque ya la mencionamos en la parte de Teorías Locales, sección 3.3.2.5). Parece inspirada por la idea de Grassmann de *evolución* al consistir en una aproximación geométrica constructivista de los espacios vectoriales a partir del estudio de las propiedades lineales de espacios geométricos de dimensión baja. La mayoría comienza con el plano, sólo algunos lo hacen con la recta (Banchoff & Wermer, 1992; Lin, 2005), para finalizar con el espacio. Muy pocos se atreven con la dimensión cuatro (Banchoff & Wermer, 1992). Siguiendo este camino, la mayoría de estos textos llegan sólo hasta el espacio *n*-dimensional, sacrificando ciertos resultados de naturaleza más teórica (como la clasificación de formas bilineales). Sin embargo hay algunas excepciones, como el texto del autor chino Lin (2005) quien consigue introducir de este modo los espacios vectoriales abstractos alcanzando bastante profundidad teórica. Otro logro de este libro es el tratamiento explícito de los diferentes modos de pensamiento del AL y el uso flexible de una gran diversidad de representaciones, aportando interesantes ejemplos al estudio de los tipos de visualización (los resultados de este tipo de estudio se sintetizan en la Figura 4. 7 y en la Figura 4. 8). Este libro, tan interesante desde el punto de la visualización, presenta dos inconvenientes que interesa tener en cuenta de cara al diseño de una propuesta de mejora de la enseñanza: la dificultad de comprensión que algunas figuras gráficas llegan a alcanzar y el elevado número de páginas (en total 856).

4.1.2.4 El Papel de la Visualización a través de la Observación de Clases

Finalmente, para contrastar los resultados anteriores con las prácticas reales del curso observamos clases teóricas y prácticas impartidas en torno a la primera unidad explicada en el Segundo Cuatrimestre: la de Aplicaciones Lineal, correspondiente con la Unidad 9 del Libro de Texto (Fernando et al., 2010) (ver Metodología, sección 2.4.3.1). Como resultado, la comparación de las explicaciones de las clases con las del Libro de Texto pone de manifiesto que el espíritu formalista dominante en el libro está también presente en las clases. Sin embargo, como se describe a continuación, éstas son mucho más ricas en elementos de manipulación de representaciones, de creación de significado, de intuición y, en general, de visualización.

Clases Teóricas

Las clases teóricas tenían lugar cuatro veces en semana y duraban 50 minutos. El estilo general de las clases encaja con el DTD (ver Marco Conceptual, sección 3.2.1.3) y la clasificación de estilos de Weber (2004) sirve para describir la actividad en el aula. El estilo *lógico-estructural* (donde se utiliza un modo de trabajo estrictamente formal sin discusión del significado de los términos que se estudian) es el menos abundante. Se observa cuando se escriben enunciados en la pizarra (bajo expresiones como "*definición*", "*proposición*", "*observación*" o "*teorema*") y subyace en la organización general de la clase que sigue el orden lógico establecido por el Libro de Texto salvo algunas excepciones (como todo lo relativo a espacios de funciones, que se dejó para la unidad siguiente, o cuando adelanta algunos contenidos para que se puedan trabajar algunos problemas en las clases prácticas). Sin embargo, rara vez los enunciados se dan sin ningún tipo de comentario introductorio, aunque sólo sea una breve valoración del tipo "*la siguiente observación es trivial*", y se interrumpen habitualmente con comentarios aclaratorios de cierta notación o afirmación contenida en el enunciado que se está escribiendo. Incluso en alguna ocasión (como en la Factorización Canónica) el enunciado se escribe de forma constructiva, con la participación de los estudiantes motivada por abundantes ejemplos, metáforas y preguntas.

En contraste, el estilo *procedimental* (centrado en completar los detalles técnicos de tareas de demostración) es mucho más abundante. Prácticamente cualquier afirmación que se hace durante el desarrollo de la clase va acompañada de algún tipo de justificación matemática (se suelen introducir con la expresión "*en efecto*" o directamente escribiendo "*demostración*"). Esto lleva al profesor a afirmar que "*las cosas básicas se hacen en clase, en el Libro de Texto no están*", de donde se deduce que para este docente una de las funciones de las clases es completar los detalles justificativos que faltan en el texto. En caso contrario (en caso de que se deje alguna demostración sin hacer), se indica que es porque ya deberían saber hacerla y se deja como ejercicio. Este tipo de práctica, junto al elevado nivel de tecnicismo que domina, por lo general, las demostraciones organizadas en estrictas secuencias lógicas, transmite un fuerte mensaje de rigor a los estudiantes.

Sin embargo, este formalismo se suaviza gracias a numerosos episodios de enseñanza catalogables dentro del tercer estilo, el *semántico* (en los que se trata de crear significados o conectar con la intuición). Éstos suelen tener forma de explicaciones puntuales en medio de una demostración o bien transiciones entre dos contenidos diferentes que pueden servir tanto a modo de reflexión sobre lo que se acaba de hacer o de introducción de lo que está por venir. Las transiciones pueden llegar a alargarse bastante, especialmente si sirven para introducir una nueva unidad (la de las Aplicaciones Lineales hasta un cuarto de hora) o para motivar una proposición importante (como la de la Factorización Canónica), y el profesor emplea en ellas estrategias diversas: ofrece algún dato histórico (habla del plan de Hilbert para introducir las Aplicaciones Lineales), enseña algún ejemplo concreto de dentro de las Matemáticas (representación gráfica de una aplicación lineal tras dar su definición formal) o de la vida cotidiana (un poco antes señala que la función "precio" es lineal pero se estropea cuando hay ofertas) y sobre todo establece conexiones con otras ramas de las Matemáticas (habla de la clasificación de los grupos cíclicos o de superficies en relación al plan de Hilbert), especialmente para resaltar aspectos generales del pensamiento matemático. Por ejemplo, antes de demostrar que la composición de aplicaciones lineales es lineal afirma:

> *#00:02:11-9# Esto es permanente en las Matemáticas, no conozco ninguna clase de aplicaciones en las que ocurra que la composición de dos buenas no sea buena. Hay otros teoremas más interesantes, cuando avancéis más en las Matemáticas, que dicen: si la composición es buena y la primera que actúa es buena, la segunda necesariamente es buena. Eso ya son sutilezas. Pero que la composición de cosas buenas es buena es una verdad como en la cocina. Buenos ingredientes pues buena comida, salvo que seas un poco torpe y la cagues. #00:02:46-6# (20100222G)[70].*

De hecho, en una de las entrevistas este profesor (ver Metodología, sección 2.4.3.3), reconoció que para él es muy importante transmitir a los estudiantes la idea de que las Matemáticas son un todo conectado y en una de las clases les dice que "*conviene que aprendáis que las Matemáticas no son compartimentos estancos*" (20100223G). Esto se aplica no sólo a los contenidos que explica, sino también a los métodos y las prácticas propias del pensamiento matemático. Por ejemplo, aprovecha en mitad de la demostración de que dos espacios que son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión para señalar que los teoremas sobre invariantes tienen una implicación fácil y otra difícil. A menudo este tipo de comentarios le sirven para introducir consejos sobre cómo estudiar la asignatura o *comentarios relacionados con la educación*, que no pertenecerían a ninguno de los estilos contemplados en la clasificación de Weber (2004), aunque sí tienen cabida en la de Saroyan y Snell (citado en Bergsten, 2007) (ver Marco Conceptual, sección 3.2.1.3). Este tipo de comentarios también surgen cuando la *participación* es limitada (esto es, se hace una pregunta y o bien nadie contesta o bien contestan siempre los mismos), a pesar de los esfuerzos del profesor (que hace constantes preguntas o pone positivos a los estudiantes que intervienen). En una de esas ocasiones en que nadie responde les dice: "*Las Matemáticas no entran por estar ahí sentados y hacen así, shhhum (gesto con la mano) suben de*

[70] Los fragmentos de transcripción se refieren con la fecha y el profesor observado: (yyyymmddProfesor). Por ejemplo, esta corresponde a una clase del Profesor G., de teoría, del día 22 de Febrero de 2010. Los números entre almohadillas (#) son los cortes marcados por el software de transcripción *f4* y se mantienen para dar idea de la duración de la cita.

abajo para arriba. [...]. ¡Yo creo que tenéis una actitud muy pasiva en clase! (20100222G)". Finalmente, las clases suelen terminar de forma similar a como comenzaron: con algún comentario sobre lo que se verá al día siguiente o sobre el funcionamiento de la clase. En alguna ocasión incluye algún consejo para las clases de problemas: "*Haced los problemas, no es lo mismo entender cómo le salen los problemas al profesor que hacerlos antes de venir. Aprueban los que los hacen antes de venir" (20100223G).*

Clases Prácticas

Sin embargo, pocos estudiantes (o ninguno) seguían este consejo, limitándose a observar pasivamente cómo el profesor resuelve los problemas en la pizarra[71]. Así, el estilo de enseñanza de las clases prácticas resulta muy similar al de las teóricas, salvando las distancias provocadas por las diferencias individuales de los docentes (de carácter, de creencia sobre las Matemáticas, de preferencia por lo visual) pero sobre todo por las diferencias en los contenidos: resolver problemas hace que el énfasis en los métodos y lo *procedimental* sea aún mayor (también con un elevado nivel de formalismo y de detalles técnicos) y que se reduzcan mucho el número de episodios de transición.

A pesar de ello, hay algunos episodios de estilo *semántico* con los que se trata bien de motivar un camino de resolución (en el *Problema 7.7* se introduce pensamiento geométrico en dos y tres dimensiones para buscar un modo general de construir un suplementario común) o bien de fomentar la intuición en torno a la validez de cierta solución (en el *Problema 8.12* se justifica con una representación gráfica que basta que un subespacio vectorial contenga algún vector del núcleo para que disminuya la dimensión de su imagen). El grado de *participación* fomentado por el profesor de prácticas es menor que el de teoría –aunque hace preguntas, la mayoría son retóricas (ya que no mira a los estudiantes ni espera a que respondan)– pero los estudiantes parecen tener menos miedo a preguntar sus dudas. En el aspecto *educativo* también se hacen algunos *comentarios* (por ejemplo de cómo proceder en el examen de forma más efectiva) pero lo más relevante son las comprobaciones de las soluciones: como el profesor hace los problemas en la pizarra (no los lleva resueltos en un papel) al final casi siempre comprueba la coherencia del resultado, transmitiendo un mensaje importante a los estudiantes y proporcionándoles herramientas útiles.

Papel de la Visualización en las Sesiones Observadas

En relación a la visualización, observamos diversidad de tipos y de formas de uso. En este sentido, los episodios más parecidos al Libro de Texto son los que ocurren durante el estilo lógico-estructural y sobre todo el procedimental donde la visualización aparece en forma de *pensamiento diagramático* y de *manejo flexible de representaciones*: durante el proceso de escribir o demostrar cierto enunciado matemático las representaciones (pertenecientes fundamentalmente a los registros simbólico y de tablas) se crean, se interpretan, se transforman y, en definitiva, se coordinan en una secuencia lógica de argumentos. La diferencia esencial respecto al Libro de Texto es que, en clase, los profesores pueden

[71] En media para cada hoja se disponía de tres días. En el caso de la Unidad de Aplicaciones Lineales, donde había bastantes problemas, el profesor acordó con los estudiantes que sería él el que eligiera los problemas más interesantes, dejando un breve espacio el último día para resolver los que sugirieran los estudiantes entre los que se hubiesen quedado sin resolver.

detenerse a explicitar algún aspecto de este tipo de procesos cuando lo consideren necesario, por ejemplo motivados por la duda de un estudiante (como ocurre en la clase de teoría con la flecha de la inclusión) o si creen que cierta afirmación puede llevar a equívoco (como ocurre en una clase de prácticas cuando el profesor advierte que hay que tener en cuenta qué se quiere hacer con una matriz, si calcular su rango o ver qué ecuaciones son independientes, para decidir si se pueden hacer transformaciones por filas y columnas o sólo por filas). Pero, como se ha podido observar en la descripción anterior, la mayoría de visualizaciones aparecen en los episodios de enseñanza con estilo semántico, teniendo poco que ver con el Libro de Texto: representaciones gráficas empleadas como apoyo de una definición abstracta; pensamiento geométrico como motivación o justificación de la solución a un problema; ejemplos de la vida cotidiana para introducir un concepto nuevo; metáforas que sirven para motivar la construcción de un diagrama (*hacer cociente* es asignar a cada jugador su equipo, *hacer cociente por el núcleo* es concentrar en un sitio la no inyectividad, *arreglar la sobreyectividad* es cortar la parte de pantalla a la que no llega nada); intuiciones e imágenes mentales que ayudan a pensar (las aplicaciones inyectivas encajan por tanto ¿qué relación debe haber entre las dimensiones del espacio de salida y de llegada de una aplicación inyectiva?); etcétera. La forma de comunicar este tipo de visualizaciones es mucho más rica que la anterior pero también más ambigua. Aparecen más tipos de representaciones (gráficas, diagramas e incluso ilustraciones) y surgen nuevos recursos imposibles en un texto escrito: el dinamismo, que permite transformar representaciones ante los ojos de los estudiantes; y el uso de gestos, que favorece la formación de imágenes mentales. Sin embargo, las relaciones entre todos estos elementos quedan implícitas a menudo, como ya se ha observado en investigaciones previas (Wood et al., 2007).

Finalmente, interesan los *mensajes* que el profesor responsable de la asignatura da en relación a la visualización para hacerse una idea del status que ésta posee en el curso. Hay un apoyo hacia la visualización entendida como pensamiento diagramático pero no tanto hacia el pensamiento geométrico que, en este curso de AL de primero, "*a él no le ayuda nada (20100223G)*":

> *#00:02:46-6# En esta asignatura no podremos hacer estudios visuales del estilo... (Hace unos ejes de coordenadas y representa una función real de variable real). Esta función de aquí tiene un mínimo y entonces cerquita está por arriba y también cerquita por arriba... Eso no lo podemos hacer. Pero sí es una asignatura en la que podréis desarrollar las imágenes visuales. Pero las imágenes visuales no en plan que... Como por encima de los planos y las rectas yo por lo menos no tengo imaginación visual... Quiero decir, en dimensión mayor que 3 yo no sé hacer nada. Lo que sí me gustaría es que adquirierais visión espacial pero visión espacial en el sentido diagramático. (Hace gestos con los brazos y las manos) Esto va de aquí en aquí y entonces se enchufa por aquí. Entonces esta entra por aquí.... ¿Habéis visto la portada del libro rojo? (Un alumno la enseña). Eso. Eso es lo que quiero que seáis capaces... ¡Que al acabar el año esa sea vuestra manera de expresaros! Que vuestra manera no sea ir poniendo todas las flechas que aparecen ahí: sea f de tal y tal, sea g de tal y tal. Si no que hagáis cosas de... (repite los gestos de antes). Esta viene por aquí, esta viene por aquí, entonces lo otro actúa, shhh, se la mete por aquí.... Así. Bueno, como ese diagrama. A ver si algún día llegamos a ese diagrama y vosotros lo generáis solos. Sin necesidad de que lo vaya escribiendo. #00:04:19-5# (20100222G)*

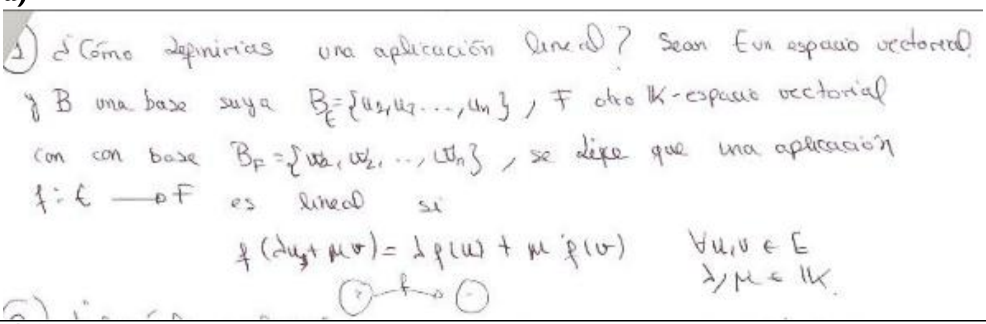
4.1.3 Estudio Exploratorio

Este último estudio se centra en explorar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del AL, específicamente aquellas referidas a la visualización que tengan relación con la comprensión en esta disciplina. Para ello elaboramos el "Cuestionario sobre la Aplicación Lineal" (su diseño y apliación se explicó en la sección 2.4.3.2 de la Metodología; y las dos partes del el enunciado se pueden ver en los Anexos). A continuación describimos el análisis y los principales resultados obtenidos, enfatizando la relación con la visualización.

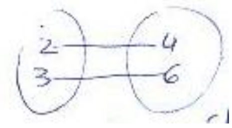
4.1.3.1 Análisis y Resultados del Cuestionario

La *definición de Aplicación Lineal* pedida en la *Pregunta 1* de la **Parte 1** del Cuestionario es expresada en un lenguaje bastante formal por la mayoría de los estudiantes, pero sólo el 35, 3% responde de totalmente correcta. El resto de respuestas contiene imprecisiones de lenguaje (cambian *Espacio Vectorial* por cuerpo o conjunto y aplicación por biyección, escriben elementos que no usan –como matrices, bases o diagramas como en la Figura 4. 9. a)– o no incluyen cuantificadores) o bien confunden las propiedades de las aplicaciones lineales con las de las operaciones de los espacios vectoriales (conmutativa, asociativa, elemento neutro). El único "*dibujo*" que encontramos tiene un papel meramente ilustrativo (Figura 4. 9. a). En la *Pregunta 2,* donde se preguntaba "*cómo le explicarían a un compañero/a en qué consiste la linealidad de las aplicaciones lineales*", aparecen respuestas menos formales entre las que surge con frecuencia la idea de que las aplicaciones lineales son las que preservan las combinaciones lineales. En el resto o bien se repite la definición dada en la anterior (a veces sólo con lenguaje natural) o bien se responden las dos preguntas a la vez (o se deja en blanco).

a)



b) *"La imagen es múltiplo (por un escalar) del el de origen".*



c) *"Le explicaría que la imagen de una suma es la suma de las imágenes de las apl. lineal y que la imagen de un elemento (vector) multiplicado por un escalar es la imagen de dicho vector multiplicado por el escalar.*
Utilizaría un dibujo como el que sigue:"

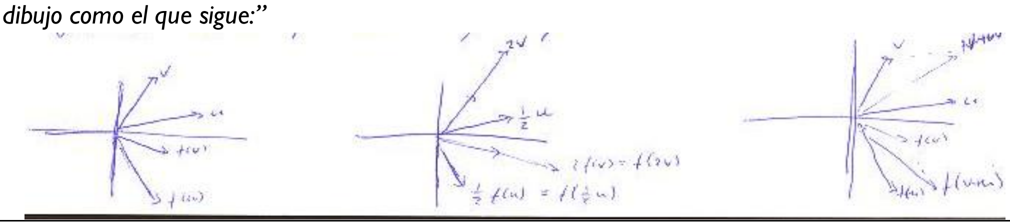


Figura 4. 9: Respuestas de los estudiantes a las preguntas 1 y 2 de la Parte 1 del "Cuestionario sobre la noción de Aplicación Lineal" que usan representaciones gráficas o diagramáticas.

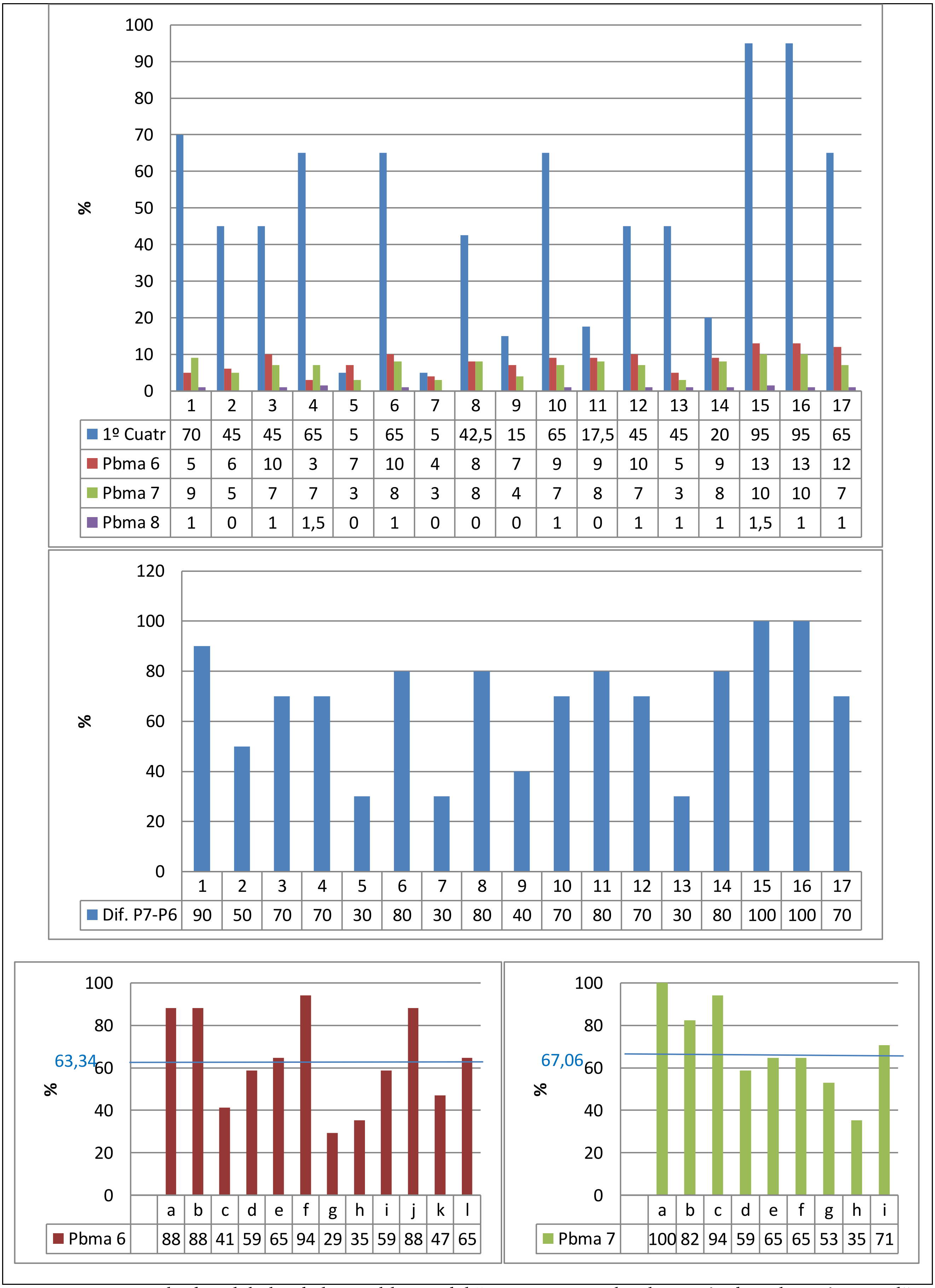
Entre los ejemplos de Aplicaciones Lineales que se piden en la *Pregunta 3* es habitual encontrar la idea de "doble" (Figura 4. 9. b) y funciones en *IR*, siendo pocos los estudiantes que incorporan elementos vectoriales más avanzados: el 35,3% de los estudiantes dan aplicaciones de *IR* en *IR* (dos la identidad y dos aplicaciones afines[72]); otro 35,3% de IR^2 en IR^2 (cinco de ellos eligen $f(x,y)=(y,x)$), el 5,8% en IR^3 ($f(x,y,z)=(x+y,y,x+z)$) y sólo el 11,7% utilizan el lenguaje simbólico para dar la expresión matricial de una aplicación lineal cualquiera o para definir la función traza de una matriz. Los contraejemplos pedidos en la *Pregunta 4* guardan bastante correspondencia con el tipo de ejemplo dado en la pregunta anterior: senos, valores absolutos, raíces cuadradas, potencias o aplicaciones afines.

En ambas preguntas se pedía justificar las respuestas. Las justificaciones de la linealidad de los ejemplos de la *Pregunta 3* son más pobres que las dadas en los contraejemplos de la *Pregunta 4* (donde a menudo, o no dicen nada, o se limitan a copiar una propiedad), denotando dificultades con los razonamientos más generales. A menudo no distinguen bien entre cuándo deben demostrar o cuándo es suficiente con encontrar algún vector que no cumpla una determinada propiedad, dando lugar a respuestas donde se hace un uso innecesario de la demostración formal. Este hecho se repite en las respuestas del *Problema 7* en la *Parte 2* (Figura 4. 11.a). Además, no siempre se utilizan las mismas propiedades que se han enunciado en la definición (evidenciando discontinuidades entre la teoría y su aplicación en la práctica).

En la *Pregunta 5*, donde se pregunta por la utilidad de las aplicaciones lineales, ésta se explica en términos de sus aplicaciones en matemáticas e ingenierías (5,8%), aplicaciones dentro de las matemáticas (11,7%), aplicaciones dentro del AL (11,7%), continuidad dentro del currículum (5,8%) y de aplicaciones a la Geometría (5,8%, "*para el estudio de formas geométricas*" y "*son útiles en geometría e isometría entre cuerpos algebraicos lo cual puede simplificar problemas difíciles en un cuerpo resolviendo problemas análogos sencillos en* IK^n").

De la **Parte 2** sólo analizamos las respuestas a los tres primeros problemas (el *6*, *7* y *8*) porque el último (el *9*) sólo lo intentan dos estudiantes. En la Figura 4. 10 se muestran los resultados globales, tanto desde la perspectiva de los estudiantes como de los problemas. El *Problema 6* (Anexos) consta de 13 ítems en los que se pide que decidan si existe o no una aplicación lineal que transforma un primer conjunto de vectores en un segundo (ambos representados gráficamente) y expliquen el porqué de la respuesta dada (con lo que se busca, más que demostraciones rigurosas, pistas para reconstruir las imágenes mentales de los estudiantes). El *Problema 7* es similar pero las aplicaciones se dan en otros registros –de tablas y simbólico– diferentes al gráfico y consta de 10 ítems. El *Problema 8* (Anexos) se incluye con una doble finalidad: (1) para estudiar la habilidad de los estudiantes con el manejo del registro gráfico al pedir la imagen de una casa (dada de forma gráfica en el enunciado) por una aplicación lineal (dada por su expresión matricial respecto de las bases canónicas); (2) para indagar en su preferencia por lo visual, al admitir el segundo apartado respuestas en diferentes registros (se pregunta por dos bases respecto a las cuales la matriz de la aplicación fuese la identidad).

[72] Quizá la culpa de este error la tenga el nombre de "lineal" que se da a las aplicaciones $f(x)=ax+b$ en cursos anteriores.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1º Cuatr	70	45	45	65	5	65	5	42,5	15	65	17,5	45	45	20	95	95	65
Pbma 6	5	6	10	3	7	10	4	8	7	9	9	10	5	9	13	13	12
Pbma 7	9	5	7	7	3	8	3	8	4	7	8	7	3	8	10	10	7
Pbma 8	1	0	1	1,5	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1,5	1	1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Dif. P7-P6	90	50	70	70	30	80	30	80	40	70	80	70	30	80	100	100	70

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Pbma 6	88	88	41	59	65	94	29	35	59	88	47	65

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Pbma 7	100	82	94	59	65	65	53	35	71

Figura 4. 10: Resultados globales de los problemas del “Cuestionario sobre la noción de Aplicación Lineal”.

Del *Problema 6* llama la atención que ningún ítem fue respondido bien por todos los estudiantes. Ni siquiera el que se refiere a la identidad (ítem f), que obtiene un 94% de respuestas correctas. Le siguen en nivel de éxito (con un 88,2%) los apartados *a* (un paralelogramo se transforma en otro), el *b* (un paralelogramo va a un círculo) y el *j* (tres vectores que van a sus simétricos respecto del eje *y*). Los peor respondidos son el *h* (dos vectores linealmente dependientes que se intercambian) con un 35,3% y el *g* (tres vectores y su suma van al mismo) con un 29,4%.

En el *Problema 7* hay un apartado que obtiene el 100% de respuestas correctas, el *a* (*f(x,y)=(y,x)*). Sin embargo, si se tienen en cuenta la validez de las justificaciones dadas, este porcentaje se reduciría a poco más de la mitad. El hecho de que esta aplicación coincide con uno de los ejemplos más frecuentes en las respuestas de la Parte 1 hace pensar que este es un ejemplo prototípico de Aplicación Lineal y por eso un estudiante justifica que es lineal diciendo sólo que lo han visto en clase. Algo similar ocurre con los dos siguientes ítems mejor respondidos: el *c* ($h(x,y)=(x^2,y^2)$) con el 94 % y el *b* (*g(x,y)=(1,x+y)*) con el 82,3%. Los peores respondidos son el *j* (transposición de matrices, dada en registro simbólico) con el 47% y el *h* (un isomorfismo *f* tal que *f(1,1)=(1,1); f(1,2)=(2,2)*) con el 35,3%. Los errores en este último caso provienen de ignorar el hecho de ser isomorfismo, lo que podría deberse a la falta de atención en la lectura o a la confusión de la palabra isomorfismo con homomorfismo (en la Parte 1 vimos que algunos usan la palabra biyección en lugar de aplicación).

Entre las *justificaciones* dadas a las respuestas del *Problema 6* se encuentran elementos de los modelos detectados por Gueudet-Chartier (2002) y por Molina y Oktaç (2007) como los que se enumeran a continuación (conduciendo a menudo a los mismos errores detectados por estos autores):

- *reconocimiento de transformaciones elementales* (identidad, proyección y simetría), aunque ningún estudiante reconoce el giro con dilatación del ítem *i*;
- *transformación de vectores concretos* (en particular los de una base) conduciendo a errores similares a los descritos por Gueudet-Chartier (2002);
- *atención en la conservación de propiedades geométricas* ("paralelogramos van a paralelogramos"; "la inclinación no importa, sólo cambia la dirección"; "deben permanecer alineados") *o algebraicas* ("suma de vectores", "multiplicación por escalar", "el nombre de los vectores no influye");
- *imágenes prototípicas de figuras y operaciones aceptables bajo las aplicaciones lineales* ("puede resultar un paralelogramo", "el triángulo es la mitad de la misma figura", "la circunferencia no tiene carácter vectorial", "condensar se puede pero no dilatar", "de dimensión 3 a 1 se puede").

También hay estudiantes para quienes justificar significa dar una expresión algebraica de la aplicación y nada más. En este sentido llama la atención en el *Problema 7* que alguno de estos estudiantes, cuando tienen que justificar que cierta expresión algebraica es o no es Aplicación Lineal, siente la necesidad de demostrar o dar un contraejemplo. Este resultado indica que o bien el registro en que está planteado hace variar la idea de lo que significa justificar o bien (más probablemente) que los estudiantes se quedan satisfechos con su respuesta cuando han realizado algún tipo de acción (ya sea únicamente un tratamiento o una conversión). Aunque la demostración o el contraejemplo es el tipo de justificación más común en dicho problema (a veces empleada de forma desequilibrada como en la Figura 4. 11. a) también encontramos: algunos de los argumentos presentes en el Problema 6 (sobre todo relativos a la dimensión y a las bases); conversiones al registro de tablas utilizando la matriz de la aplicación para razonar; o incluso algún estudiante recurre al registro gráfico (unas veces con éxito, como en la Figura 4. 11. B, y otras no, como en la Figura 4. 11. c, donde se emplea sin mecanismos de control). Remarcamos el considerable número de respuestas al *Problema 7* que utilizan argumentos del tipo "*porque lo he visto en clase*".

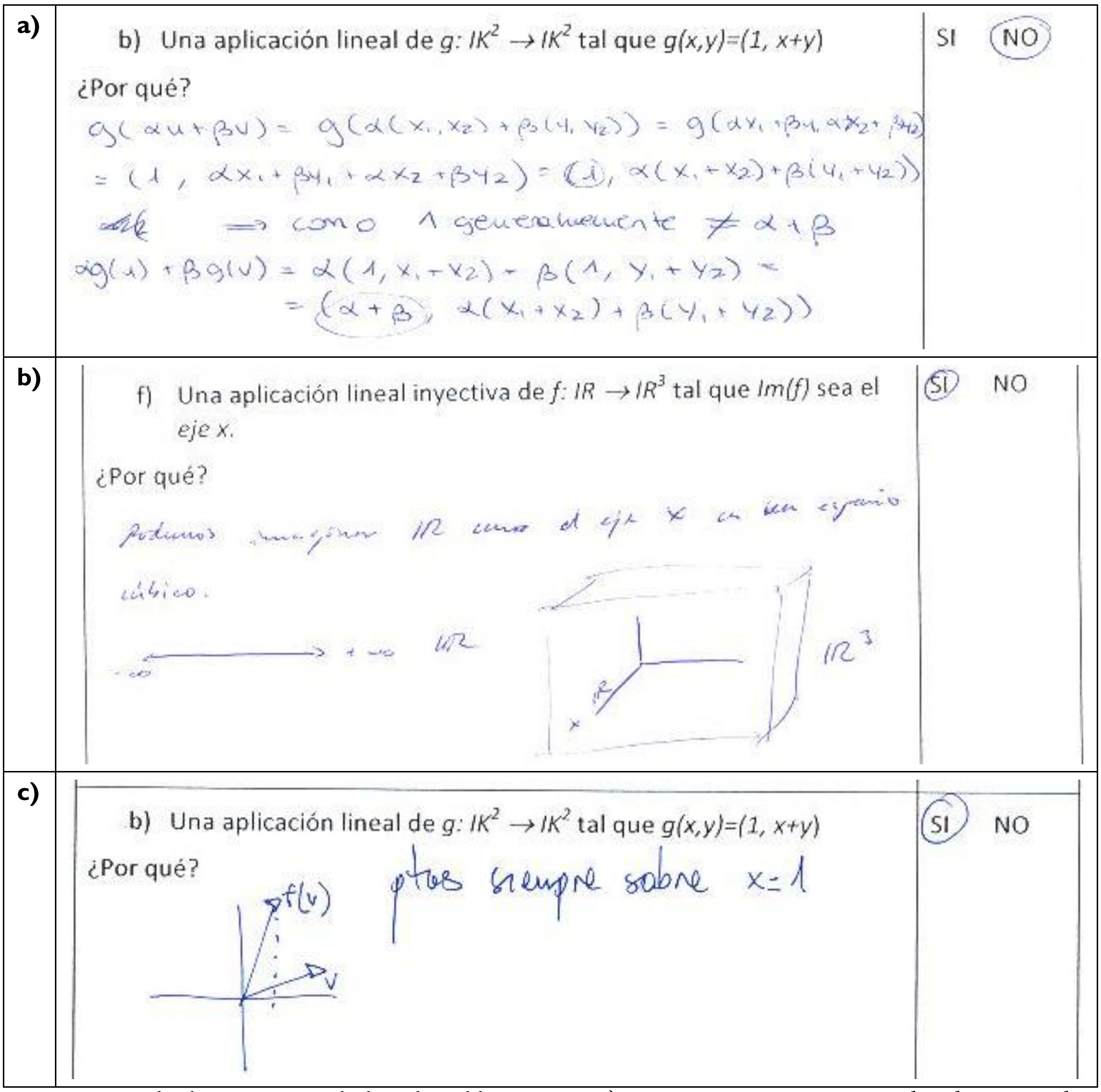


Figura 4. 11: *Ejemplo de respuestas dadas al Problema 7.* La a) muestra una respuesta donde no se distingue bien entre la necesidad de demostrar o de dar un contraejemplo "matando moscas a cañonazos". En este caso bastaría fijarse en que el (0,0) va al (1,0) y no al (0,0) y por tanto no puede ser lineal. El b) muestra un uso exitoso del registro gráfico y de un argumento visual mientras que el c) muestra todo lo contrario.

El *Problema 8* recibe un mayor número de respuestas en blanco que los anteriores[73] (el primer apartado lo responde un 58,8% de los estudiantes y el segundo sólo un 35,3%; ver

[73] Los resultados de la evaluación del instrumento muestran como posible causa la falta de tiempo, aunque también se observan deficiencias en la interpretación gráfica de las Aplicaciones Lineales.

Figura 4. 10), por lo que decidimos analizar el total de los cuestionarios para poder obtener más información (en este caso los porcentajes son 53,3% y 23,3% respectivamente). Los resultados de estos intentos son bastante buenos para el primer apartado (en el 76,4% de los intentos de respuesta hay representaciones gráficas válidas; pero sólo un 5,8% describe el resultado con palabras) pero bastante malos para segundo (sólo hay una respuesta correcta y otra incompleta). La Figura 4. 12 muestra un resumen de estas respuestas, incluyendo ejemplos representativos de las figuras dadas por los estudiantes y prestando especial atención a las respuestas consideradas como no válidas.

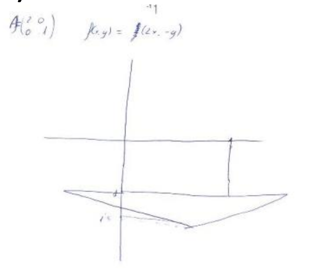
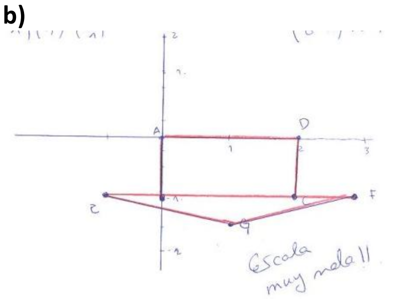
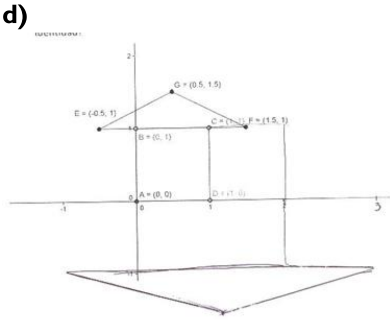
	Primer apartado		**Segundo apartado**
Válidas	**a)** 	**b)** 	**c)** Quedaría el doble de ancho y simétrico respecto al eje x b $B_1 = \{e_1, e_2\}$ ~~Est~~ $B_2 = \{2e_1, -e_2\}$ $M_f(B_1,B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
No válidas	- una incompleta (sólo los ejes aparte); - una tachada donde se afirma "*no entiendo los datos*"; - una ambigua, no se sabe dónde sitúa la base de la casa (si en la base del techo de la inicial o sobre el eje x) - una errónea por invertir el papel de los vectores de la base: "*duplica las alturas y mantiene la anchura*";	**d)** 	- una incompleta: "*habría que escoger una base en la que cada vector de la base se transformara en sí mismo*" Erróneas: - dos dan la inversa como respuesta; - uno propone la base canónica para que "*todo vector se transforme en sí mismo*"; - otro propone una base donde el primer vector tiene tres coordenadas y el segundo dos (sin ninguna explicación); - un último estudiante responde que no se puede (dando un razonamiento basado en el cálculo de la matriz de Jordan).

Figura 4. 12: *Resumen de las respuestas al Problema 8.* Se han encontrado dos posibilidades para las representaciones gráficas en relación a su posición respecto de la figura inicial dada: situadas aparte como en a) y b) (23,3%) o superpuestas como en c) (26,6%). También se puede clasificar en función de la estrategia empleada para representar: punto a punto calculando las imágenes de los vértices como en b) (23,3%) o globalmente pensando en la combinación de una dilatación y una simetría como en d) (6,6%). También varían en su claridad y exactitud, que aumenta con el uso de notación para designar los vértices, coordenadas o numeración de los ejes y con la presencia de otros elementos adicionales como el color o la regla. Estos aspectos, aunque no son esenciales (pues en *a)* no están y se ha considerado válida), ayudan a la interpretación de la representación gráfica que, en ocasiones como en *c)*, puede resultar muy ambigua y difícil de evaluar.

Señalamos el hecho de que ninguna de las respuestas al segundo apartado hace referencia a la representación gráfica. De hecho, la única respuesta correcta a este apartado utiliza un lenguaje bastante simbólico (Figura 4. 12. c) y pertenece al estudiante que únicamente describe la imagen de la casa de palabra, evitando así el uso del registro gráfico. Este resultado resulta coherente con los de investigaciones previas en torno al rechazo de la visualización por parte de estudiantes de elevado rendimiento académico (Presmeg, 1986; Zazkis et al., 1996), ya que este estudiante es el que mejor resultado obtiene en el Cuestionario y las calificaciones más elevadas en el Primer Cuatrimestre (es el número 15 en la Figura 4. 10).

Esta última observación conduce a la lectura de los resultados desde la *perspectiva de los estudiantes*, identificando perfiles de visualización (ver el segundo gráfico de la Figura 4. 10). Si se compara la media global de respuestas correctas del *Problema 6* (63,3%) con las del 7 (67%) se observa que el segundo lo resuelven ligeramente mejor que el primero[74]. Si esta comparación se realiza estudiante a estudiante, los perfiles que se observan son los siguientes (según la clasificación expuesta en la sección 3.2.3.4 del Marco Conceptual): *no visuales* (como el 1 y el 4, donde hay un fuerte predominio de respuestas correctas en registros no gráficos); *visuales* (como el 5 y el 17 donde, aunque en menor grado, hay un predominio de respuestas correctas en el registro gráfico); *mixtos* (como el 7, 10, 15 y 16, donde la diferencia entre el éxito en ambos problemas está cercana al cero). Una vez establecidos estos perfiles podemos extraer alguna conclusión en relación al rendimiento académico.

Los estudiantes *no visuales* obtienen en el curso un rendimiento medio-alto (de Notable), no observándose consecuencias importantes por su falta de habilidad visual. Entre los estudiantes más visuales se observan diferencias, y éstas dependen de su habilidad con otros registros. Si hay un fuerte predominio de lo gráfico sobre el resto de registros, el rendimiento es bajo (como en el caso del 5 que afirma: "*me ayudaría a comprender la asignatura si consiguiera comprenderlo gráficamente y geométricamente*"). Si por el contrario, lo visual destaca sobre un nivel aceptable de dominio de lo algebraico, entonces el rendimiento académico no es tan bajo (como en el 17). Entre los *mixtos* hay fuertes diferencias, como ocurría también en el trabajo sobre Análisis Matemático con estudiantes del mismo nivel (Souto-Rubio, 2009). Si se logra una coordinación de ambos modos de pensamiento (como el 15 y el 16) los resultados son óptimos. En caso contrario, hay muestras de una escasa comprensión de los conceptos (en este caso la Aplicación Lineal) que repercute en bajos rendimientos (como en el 7).

4.1.3.2 Discusión. Papel de la Visualización en las Dificultades de los Estudiantes

Los resultados muestran que la mayoría de estudiantes conoce la definición de Aplicación Lineal pero todos no la han incorporado de forma coherente en el esquema conceptual correspondiente. Lo mismo sucede con el lenguaje formal del AL. Estos resultados difieren ligeramente con los de Molina y Oktaç (2007), que detectan poca presencia de la linealidad (en términos de Espacios Vectoriales) en las definiciones de Aplicación Lineal de sus estudiantes. Una posible causa de este hecho es la diferencia entre las problaciones de ambos estudios y el tiempo transcurrido en cada uno desde la explicación de la definición del concepto hasta la aplicación del cuestionario. Independientemente de ello, un resultado relevante para esta investigación es que, aunque hay evidencias de que se han adquirido ciertos aspectos formales de la noción de Aplicación Lineal, salvo en contadas excepciones ésta no se comprende por completo, provocando dificultades a los estudiantes. Un factor que se manifiesta como influyente en esta falta de comprensión es la falta de coordinación de diversas representaciones. A esto se le suma un dominio mayor del registro de tablas (y simbólico, aunque éste tiene menor presencia en el Cuestionario)

[74] Una posible causa de esta diferencia es que el primero resultaba menos rutinario para los estudiantes que el segundo, como ellos mismos manifestaron en la evaluación del instrumento.

que viene potenciado por la forma de enseñanza en clase. Esta distribución irregular del dominio de los diferentes registros bloquea el uso de la intuición, más cercana a las representaciones concretas del registro gráfico (como muestra el *Problema 6* y también algunos de los comentarios de los estudiantes), dificultando la articulación coherente del esquema conceptual asociado a la noción de Aplicación Lineal y dando lugar a respuestas poco flexibles o coherentes como algunas de las que se han mostrado.

Estos datos apuntan un riesgo para al aprendizaje de los estudiantes, especialmente de los visualizadores que recurren de forma natural a métodos y modelos visuales para razonar pero los utilizan de forma incontrolada llevándoles unas veces al éxito y otras no. Si se les ayudara a desarrollar, a integrar y a utilizar de forma crítica dichos métodos podríamos lograr que éstos les resultaran de utilidad para resolver las tareas de clase y de paso para comprender mejor los conceptos. Estos resultados son coherentes con los obtenidos por Gueudet- Chartier (2002) en su investigación sobre modelos figurales y en el estudio exploratorio en Análisis (Souto-Rubio, 2009) sobre el papel de la visualización en las dificultades de los estudiantes (salvando las diferencias entre el contexto del AL y del Análisis).

4.1.4 Resumen e Implicaciones para la Investigación

El Estudio Inicial ha sido relevante para la investigación, no sólo por la identificación de aspectos relevantes de la enseñanza de la visualización del curso (posibilidades para visualizar del AL como disciplina matemática, visión institucional del curso sobre la visualización y dificultades de los estudiantes para una mejora de enseñanza), sino por lo que supone de soporte para el diseño y desarrollo de la siguiente fase de investigación. A continuación se resumen los hallazgos más relevantes desde este punto de vista y sus consecuencias para el desarrollo metodológico: la elección de una metodología de Observación Participante para la segunda fase y la formulación de principios de diseño a tener en cuenta en el diseño de propuestas de enseñanza con visualización

Un hecho importante derivado del Estudio Exploratorio es la existencia de dificultades de aprendizaje relacionadas con la falta de habilidad de visualización. Los estudiantes no comprenden completamente los conceptos que estudian al no ser capaces de: coordinar diferentes representaciones del concepto; conectar y reajustar sus intuiciones con las definiciones formales vistas en clase; manejar con flexibilidad diversos modos de pensamiento, etcétera. Este tipo de dificultades responden a obstáculos cognitivos que se producen en la mente de los estudiantes y que podrían estar reforzados por el modo de trabajo en clase. Investigaciones previas sobre Mediación Semiótica (ver sección 3.2.2.4) apuntan la conveniencia de trabajar en grupo y discutir colectivamente sobre las representaciones y tareas de visualización para favorecer la construcción de significados y de conocimiento matemático. Sin embargo, el Estudio Institucional pone de manifiesto que la actitud de los estudiantes en clase es bastante pasiva, que nunca se trabaja en grupo (a pesar de estar contemplado en la Guía Docente, ver sección 4.1.2.1) y que apenas hay espacios para discutir. Estos hechos determinaron la opción por una Observación Participante, es decir que la investigadora también tuviera el rol de profesora en una clase de prácticas y que con ese grupo de alumnos se tratara de ofrecer de forma intencionada un ambiente de clase diferente. Para ello serán de utilidad algunas de las estrategias innovadoras estudiadas en la sección 3.2.1.3 como el trabajo colaborativo, el debate científico o la resolución de problemas. Esto nos lleva a formular el Primer Principio de Diseño para la propuesta de enseñanza:

> ***Primer Principio de Diseño:*** *Para favorecer la construcción individual y colectiva de significados se deben buscar otras formas diferentes de organizar la clase que aumenten la interacción social y la participación (como son el trabajo cooperativo y el debate científico), pues así se acercan las prácticas y el lenguaje del matemático experto a los estudiantes y en particular se posibilita la comunicación con y sobre la visualización.*

Además de los cognitivos, existen otros tipos de obstáculos que también se deben considerar en la elaboración de una propuesta de enseñanza de la visualización. El Estudio Institucional pone de manifiesto que tanto en la Guía Docente de la asignatura como en el Libro de Texto los registros predominantes son el simbólico y el de tablas y que éstos aparecen acompañados de un lenguaje muy formal. En las clases se mantiene un elevado grado de rigor y de tecnicismo, pero al mismo tiempo se observa un aumento en la riqueza de elementos intuitivos y de creación de significado. Sin embargo, volviendo a los resultados del Estudio Exploratorio, estos elementos no parecen calar de forma efectiva en los estudiantes. Esta cuestión es clave de cara al diseño de una enseñanza efectiva con visualización y se considera necesario estudiarla con más profundidad en la siguiente fase de investigación. Por ello decidimos continuar observando clases en la siguiente fase, para buscar más modelos de visualización con los que se enriquecen los contenidos del Libro de Texto y comprender mejor qué formas de comunicarlos resultan más efectivas. A pesar de ello, la observación de las clases realizadas dentro del Estudio Institucional ya permite apuntar una posible causa de este obstáculo: en ocasiones hay una falta de explicitación de las relaciones entre dichos elementos, dificultando que los estudiantes establezcan conexiones entre ellos. Esto nos conduce a enunciar un Segundo Principio de Diseño:

> ***Segundo Principio de Diseño:*** *Para favorecer la coordinación y la conexión de la diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento característicos del AL, éstos se deben utilizar y manejar flexiblemente comunicando explícitamente las relaciones existentes entre ellos; pues así se favorece su incorporación en la mente de los estudiantes facilitando la comprensión de la disciplina.*

Otra razón que podría obstaculizar el desarrollo de la visualización de los estudiantes es el predominio del rigor y el formalismo que se observa en el curso y que transmite un mensaje que va en detrimento de formas de pensamiento más intuitivas y geométricas. Este mensaje es una herencia del desarrollo histórico de la asignatura y de la reforma de las Matemáticas Modernas que tuvo lugar en el s. XX, tal y como muestra el Estudio Epistemológico. La Geometría, a pesar de comenzar siendo un pilar fundamental de búsqueda de inspiración y credibilidad que dio lugar a muchas ideas clave para el desarrollo del AL, no fue el camino que condujo de forma natural al desarrollo y la consolidación de la teoría formal de los espacios vectoriales. Esto implica cuestionarse, de cara al diseño de la propuesta de enseñanza, hasta qué punto una introducción geométrica de los conceptos del AL (enfoque que aparece en varios de los libros de texto analizados) es lo más adecuado (controversia ya comentada en el Marco Conceptual, ver sección 3.3.2.5). Sin embargo, al mismo tiempo el Estudio Epistemológico pone de relieve que la formación de la teoría axiomática no habría sido posible sin la coordinación de lenguajes y modos de pensamiento algebraico y geométrico y sin el desarrollo y la comprensión de una notación adecuada. Por tanto, a pesar de que el legado histórico ha resultado a favor del formalismo, desde un punto de vista epistemológico resulta totalmente legítimo y justificado prestar atención especial a la visualización en la enseñanza y éste debe ser el mensaje que se transmita a los estudiantes si queremos fomentar su uso en clase. Esto conduce al Tercer y último Principio de Diseño:

> ***Tercer Principio de Diseño:*** *Para lograr que la visualización sea una herramienta válida para razonar y que sirva de camino a la intuición, ésta debe legitimarse adecuadamente (cuidando mensajes y acciones en torno a ella), ya que permite el acercamiento a los estudiantes posibilitando su posterior desarrollo.*

4.2 FASE II: OBSERVACIÓN PARTICIPANTE DEL CURSO

En este capítulo describimos los resultados obtenidos de la Observación Participante desarrollada en la Fase II de la investigación, planteada con un doble objetivo (ver Metodología, ver sección 2.3.2.2). Este capítulo se estructura de acuerdo a estos dos objetivos. Primero, a partir del “Póster” (ver Figura 4. 13), exponemos los principales acontecimientos y episodios de visualización observados en el curso: modelos de visualización (tipos, circunstancias y prácticas de clase en las que aparecen), creencias del profesor y status de la visualización, relación con las dificultades y percepciones de los estudiantes, limitaciones del contexto, obstáculos que surgen en su enseñanza. Segundo, revisamos y reflexionamos sobre la participación, que facilita la experimentación en el aula permitiendo avanzar en el establecimiento de principios de diseño para materiales y estrategias para enseñar a visualizar.

4.2.1 Secuencia Narrativa del Curso

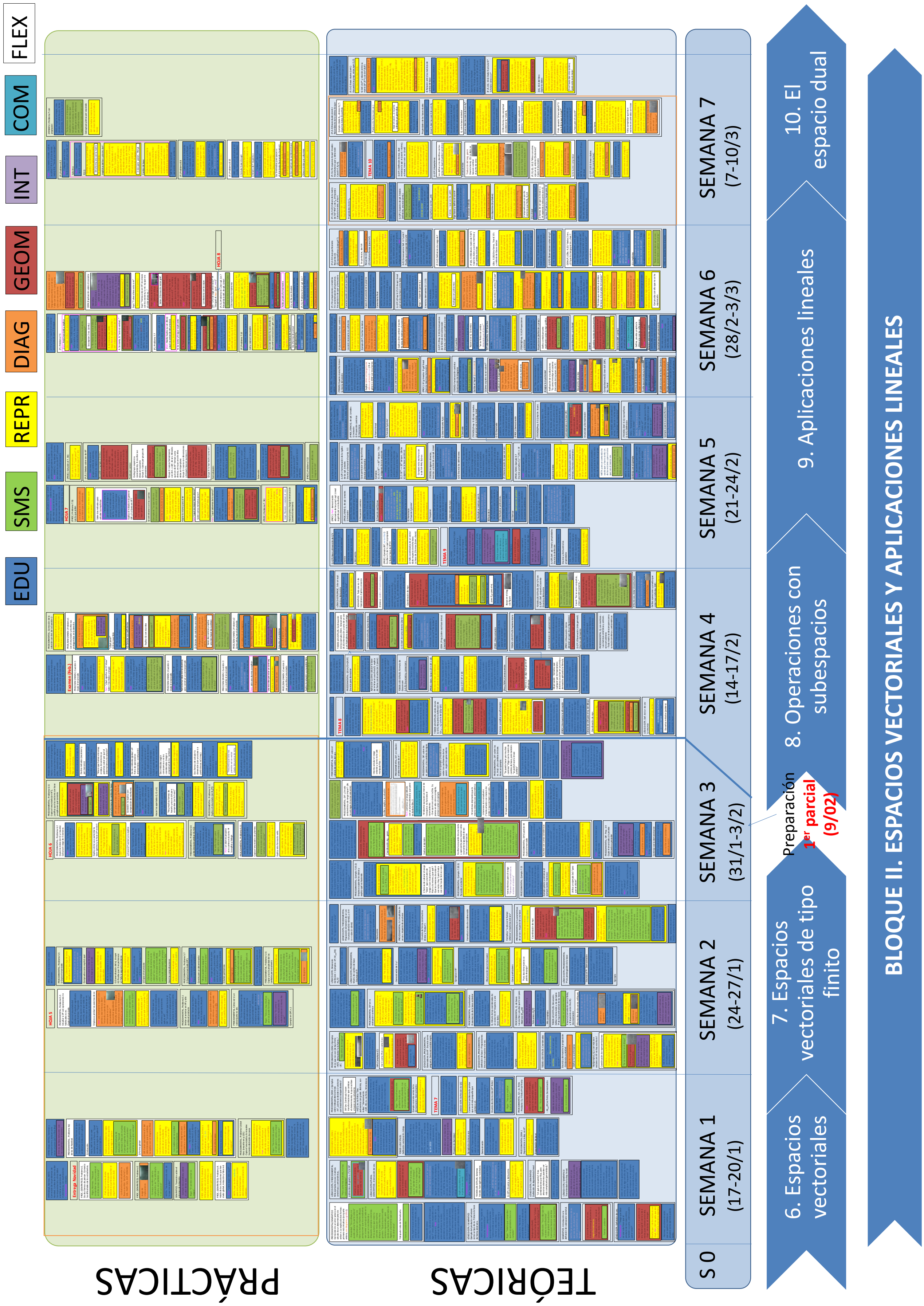
En esta sección describimos los principales acontecimientos y episodios de visualización observados durante el curso. El objetivo de este tipo de análisis es dar una visión de conjunto y, con ello, detectar factores generales influyentes en la enseñanza de la visualización (siguiente sección). El relato se estructura en torno a las etapas de la Fase II (ver Metodología, sección 2.3.2.2).

4.2.1.1 Etapa 1: Inicio del Trabajo de Campo. Observación y Colaboración (Semana 1 a 3)

Semana 1: Identificando diversidad de visualizaciones para explicar los espacios vectoriales; dificultades con la inducción y el manejo de determinantes en las clases prácticas

A pesar de no tener observaciones de la **Semana 0** se recopila información sobre ella. Los dos primeros días se dedican a introducir las propiedades de los espacios vectoriales, el miércoles realizan una pequeña prueba de evaluación continua (referida a veces como el “*examencillo*”) y el jueves empiezan a corregirla.

La **Semana 1** comienzan las observaciones. En las **clases teóricas**, el lunes empiezan corrigiendo un problema que quedó a medias sobre el cálculo del determinante de una matriz *nxn* (el profesor G. lo explica de forma flexible, primero intuitivamente con una representación gráfica y un diagrama y luego más formalmente), continuando con el orden del Libro de Texto hasta llegar al final de la semana al *Tema 7*. Ven ejemplos de espacios vectoriales como el producto cartesiano de dos espacios vectoriales (definido primero formalmente y después ejemplificado gráficamente). Se introducen los subespacios vectoriales, motivando la definición con dos ejemplos gráficos: la Esfera y la unión de rectas no son subespacios vectoriales.


EDU
SMS
REPR
DIAG
GEOM
INT
COM
FLEX
PRÁCTICAS
TEÓRICAS
S 0
SEMANA 1
(17-20/1)
SEMANA 2
(24-27/1)
SEMANA 3
(31/1-3/2)
SEMANA 4
(14-17/2)
SEMANA 5
(21-24/2)
SEMANA 6
(28/2-3/3)
SEMANA 7
(7-10/3)
6. Espacios vectoriales
7. Espacios vectoriales de tipo finito
Preparación 1er parcial (9/02)
8. Operaciones con subespacios
9. Aplicaciones lineales
10. El espacio dual
BLOQUE II. ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

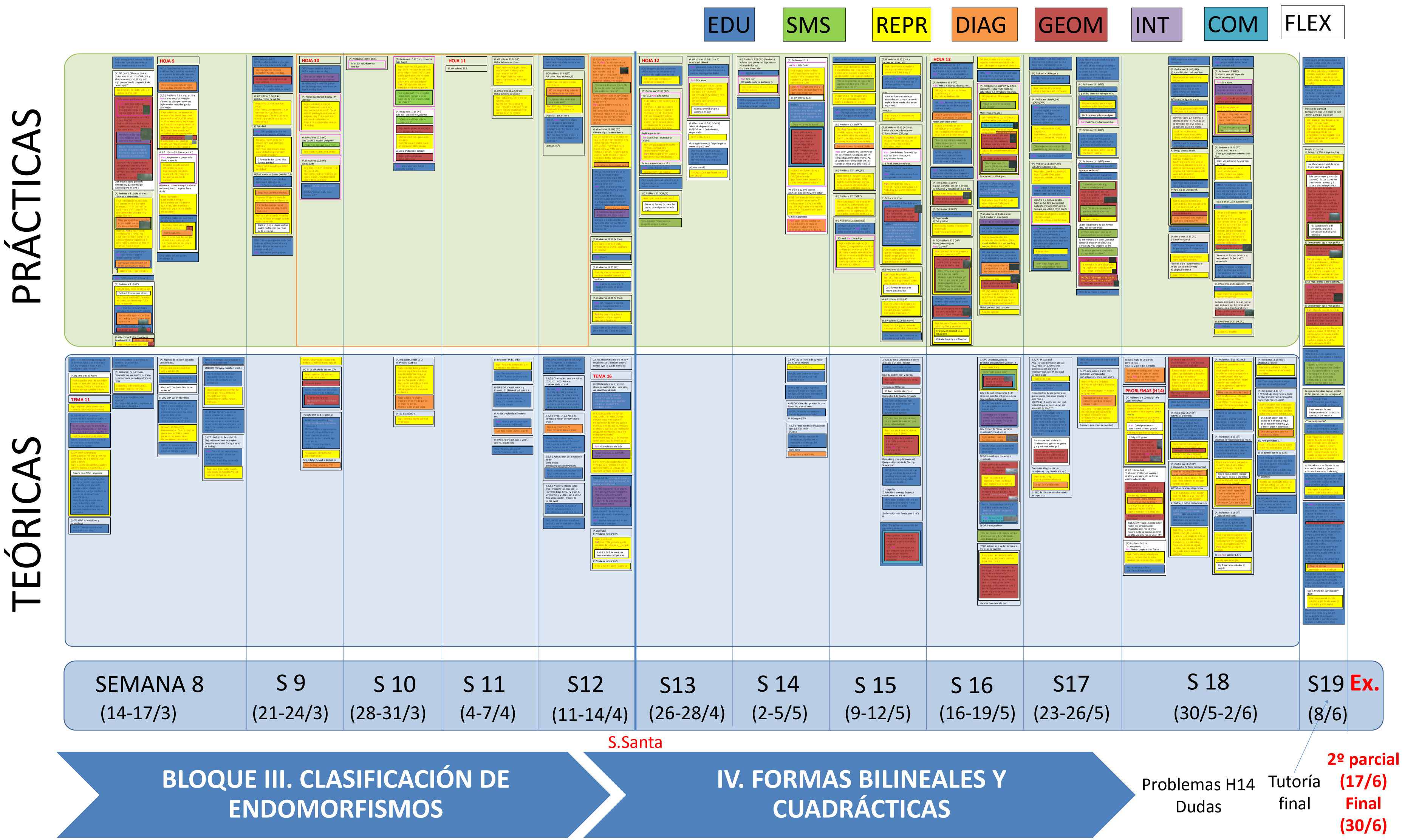
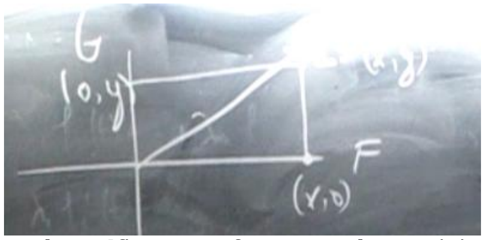


Figura 4. 13: *Uso de un póster como instrumento de reducción y análisis de datos de la Observación Participante desarrollada en la Fase II.* En la página anterior están las 7 primeras semanas de observación, el resto están en esta. Las clases prácticas se han situado en la parte superior (fondo verde), y las teóricas en la inferior (fondo azul). También se indican los contenidos del libro de texto cubiertos (cajas con letras blancas).

Al día siguiente se muestran ejemplos de subespacios de otros espacios vectoriales: matrices y funciones (en este último se usa una representación gráfica para probar un contenido estricto de espacios de funciones, $C(I,IR) \supsetneq C^1(I)$). Se define la intersección de subespacios y se demuestra que es también subespacio, prestando especial atención al manejo de representaciones y aclarando la notación simbólica empleada para referirse a familias indexadas. A esta demostración le acompaña una reflexión tipo META en torno a la intersección de objetos y a la forma de pensar en Matemáticas, que "*es una y darse cuenta de esto puede ahorrar mucho trabajo*". En particular, G. menciona los espacios convexos en cuya explicación se ayuda de un dibujo que borra rápidamente. A este episodio le sigue otro en el que se explicitan dos posibles puntos de vista para los subespacios vectoriales, al conectarlos con los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales. Finaliza la clase con comentarios sobre la dependencia lineal, que "*no es más que lo que han venido haciendo con las combinaciones por filas*", y con la demostración de que se cumple la propiedad transitiva. Concluye: "*En la vida real también es así: si yo dependo de otros dos y esos dos dependen de otros cuatro, mi vida depende de esos cuatro*". G. comenta que esto antes no solía explicarlo, pero la experiencia le ha hecho ver que es difícil para los estudiantes.

a) Episodio de las simetrías del cubo y los argumentos plausibles. Tanto el dibujo de la pizarra como los gestos sirven de ayuda para comunicarse (S120110220G, COM, SMS, GEOM)



b) Ejemplo gráfico para favorecer la participación, cuando G. pregunta por el producto cartesiano no contestan, dibuja y entonces se animan a responder. A pesar de ello califica la imagen de "*poco interesante*" (S120110220G, GEOM, Part, SMS). Justo después viene un ejemplo sobre matrices. Para poder verlas como vectores les recomienda pensar en ellas como "*ristras de chorizos, que se enrollan y desenrollan*" (INT,SMS)

Figura 4. 14: Episodios de visualización en las clases teóricas de la Semana 1.

El miércoles comienza la clase con un interesante episodio sobre manejo de representaciones (ver sección REPR, Figura 4. 29). Se introducen las ecuaciones implícitas y paramétricas de un subespacio, mostrando cómo pasar de unas a otras, explicitando la información que dan, las ventajas de cada una, los convenios en su notación. A continuación se enuncia la definición formal de vectores linealmente independientes (con los λ), se muestra un ejemplo de cómo se usa y se demuestra. G. finalizando con el Teorema de Prolongación de la Base a partir de un ejemplo de vectores independientes en IK^n. El *Tema 6* termina al día siguiente con ejemplos de independencia lineal en IK^3, *IK[T]* y *C(IR,IR)*, para lo que introduce el wronskiano. G. señala su utilidad en otras partes de las Matemáticas y a opinar sobre la asignatura de Elementos de Matemáticas: a través del ejemplo del problema de las isometrías del cubo, expresa la "*esquizofrenia*" que cree que los alumnos deben sentir cuando en unas asignaturas les piden argumentos plausibles y en otras, como la suya, se demuestra hasta que "*0+0=0*" (Figura 4. 14. a). Termina la semana con la introducción al *Tema 7*, sobre *Espacios Vectoriales de Tipo Finito*. Se define el Espacio Vectorial generado por un subconjunto, se informa de que "*todos los espacios de tipo finito* *son 'de hecho' IK^n*" pero que "*hay que explicar qué es 'de hecho'*" y finalmente se dan dos ejemplos: el producto cartesiano de espacios finitos y el espacio de matrices son también finitos (Figura 4. 14. b).Las **clases prácticas** de esa semana se dedican a corregir la "*entrega de Navidad*". Con ello, el profesor S. explica que quiere no sólo mostrar las soluciones correctas sino también "*cómo se debe escribir en Matemáticas*". Los problemas se corrigen atendiendo a las diversas respuestas y métodos empleados por los estudiantes así como a sus dificultades. Se hacen numerosas recomendaciones sobre cómo actuar para evitarlas o para facilitar la labor de corrección al profesor, especialmente en torno al manejo de representaciones: "*Hay que comprobar las cosas, a veces el sentido común no funciona*"; "*escribid sobre la implicación, así no sólo doy la solución, sino también sus motivaciones*"; "*buscad columnas o filas con muchos 0 porque os soléis perder en las cuentas y encontrar una forma inteligente de hacerlas es una gran ventaja*". En particular los estudiantes presentan dificultades con la inducción. Hacen lo que S. llama "*falsa inducción*". Para que entiendan por qué esto no funciona pone ejemplos de la vida cotidiana: con el color de los ojos (Figura 4. 15. a); o con los suspensos (similar). Utiliza pensamiento diagramático para explicitar formas de proceder (Figura 4. 15. b) o para ayudarles a ver manipulaciones de matrices *nxn.*

a) Ejemplos de la vida cotidiana para ayudar a la comprensión. "S:¿De qué color tienes los ojos?; Y: Marrones"; S: ¿Y tú?; E: "Marrones"; S: "Y él también los tiene marrones, ¿Porque tres personas tengan los ojos marrones puedo decir que toda la gente en esta sala también los tienes marrones?" (S120110118S, INT)

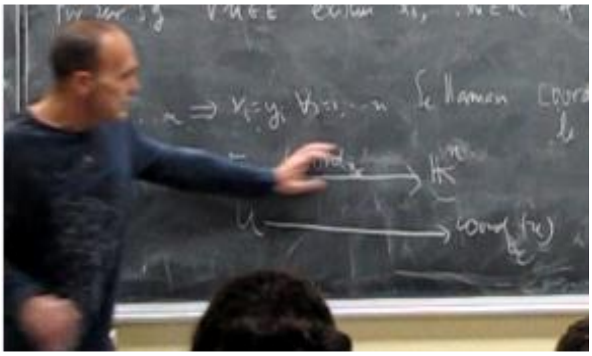
b) Diagramas para explicar procesos. En este caso, una dificultad de los estudiantes que S. ha observado en sus respuestas de las entregas de Navidad: hacen operaciones con las filas que no preservan el determinante. (S120110119S, DIAG)

Figura 4. 15: Episodios de visualización en las clases prácticas de la Semana 1.

Semana 2: Aprendiendo a manejar representaciones de los espacios de tipo finito. Introducción de la aplicación "coordenadas" (coord.)

En las **clases teóricas** de la **Semana 2** se completa casi el *Tema 7*. El lunes comienzan viendo ejemplos de espacios vectoriales que no son de tipo finito: $IK[T]$, IK^I ("*difícil de imaginar*") y ℂ (lo presenta de forma gráfica, mostrando que es indistinguible de IR^2, y explica que se puede ver tanto como *IR*-ev como ℂ-ev). A continuación, G. presenta los sistemas de generadores en IK^n de forma interrogativa, sirviendo también como introducción de las bases y sus propiedades. En ambos casos, los enunciados de los resultados (estilo lógico-estructural) aparecen seguidos de sus demostraciones (de estilo procedimental, con tratamiento de registro simbólico y de tablas algebraico) intercaladas con comentarios de tipo META. Este esquema suele repetirse en este tipo de episodios más formales. Para terminar la clase G. hace lo siguiente: define las coordenadas de un vector, que existen y son únicas (lo demuestra); introduce la aplicación $coord_{BE}$, con la que explica cómo viajar de *E* a IK^n (ver Figura 4. 16.a); pone un "*no-ejemplo*" en IK^2 de falta de unicidad en la existencia de coordenadas si se escriben en función de un sistema generador que no sea base (explica simbólica y gráficamente, en ese orden) y concluye: "*Es como en la telegrafía. Imagínate que usando signos distintos mandaras la misma palabra. Eso sería un caos*" (ver Figura 2. 15).

El martes comienza con la entrega de la evaluación continua corregida, con el comentario de algunas dificultades que ha observado (todas relacionadas con el manejo de representaciones) y consejos para evitarlas (algunos similares a los de S). Después vuelve al contenido del libro poniendo ejemplos de bases estándar: de IK^n (explica cómo calcular las coordenadas de un vector de IK^3), de las matrices $M_{mxn}(IK)$, los polinomios $IK_n[T]$ y los números complejos ℂ. Termina definiendo la dimensión y dando ejemplos. Enuncia el Teorema de Equicardinalidad de las Bases ("*llamado así pedantemente*"). Durante su demostración retoma la idea de viajar de un sitio a otro que explica con un diagrama, luego formaliza con $coord_{BE}$ y para que se entienda mejor sintetiza en otro diagrama. Concluye con la siguiente metáfora: "*Es un proceder habitual, la policía lo usa cuando analiza una foto para atrapar a un ladrón, la aplicación 'coord' es hacer fotos*" (ver Figura 4. 16. b).



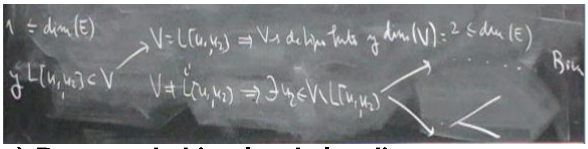
a) Idea de viajar de un sitio a otro explicada a través de la aplicación *coord*$_{BE}$: "*Estudiaremos esto, como digo, con más detalle. Pero la idea es, siempre que me pidan hacer cosas aquí (señala la E) yo viajo (se pone en posición de salida), mediante 'coord.'* pschium *(emite un sonido mientras arrastra la mano sobre la flecha), a IK^n. Hago lo que sea ahí en IK^n (agita las manos como revolviendo algo) donde me sé mover bien, es un espacio que domino, sus elementos son filas, y luego vuelvo. Voy a hacer un par de ejemplos en esa dirección. ¿Entendéis lo que os he dicho?*" (S220110124G, REPR, META)

b) Idea de viajar de un sitio a otro explicada a través de un diagrama (V5_8:18, DIAG) **y una metáfora (con explicitación de su relación con lo formal)** (V5_14:20, INT): "*No sólo es importante que lo entendáis, sino que os deis cuenta de que es transparente. Que además es un proceder habitual. La policía hace lo mismo: no conoce al ladrón, pero consigue una foto suya, la amplía lo suficiente, ve bien la foto, ve qué pasa en la foto, que el sujeto tiene un lunar en el glúteo izquierdo y entonces va buscando sólo tíos con lunar en el glúteo izquierdo para encontrar al ladrón* (Risas). *Pues eso es lo que pasa. La aplicación 'coord.' es hacer fotos. En un sitio desconocido miras la foto, la foto la puedes analizar bien porque es manejable. Eh, IK^n pues lo entiendes bien, haces ahí las operaciones pertinentes* (hace gesto con las manos de llevarlas a su derecha) *y ya está.* [...] *Si habéis entendido eso ya el curso está 'chupao', si no es mejor que os vayáis*" (S220110125G, META, REPR)

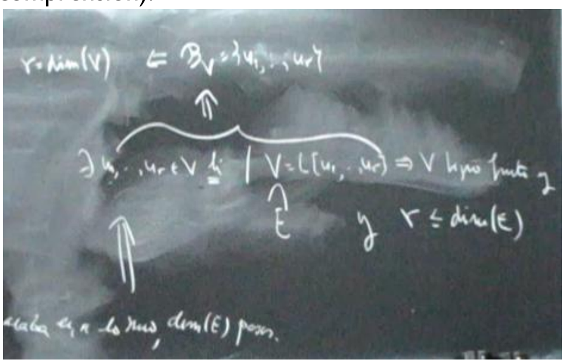
Figura 4. 16: *Diversas explicaciones de una forma de pensar útil en Matemáticas*. Resulta especialmente útil para este fin la aplicación $coord_{BE}$, que va de un espacio vectorial abstracto *E* sobre IK^n y asigna a cada vector *u* sus coordenadas respecto de *B*, es decir, una *n*-upla.

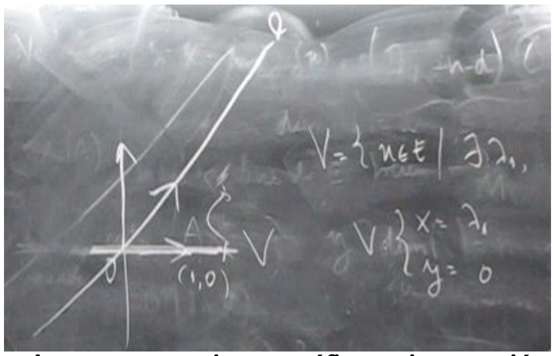
El miércoles es una clase bastante formal. Da comienzo con la definición de dimensión (seguida de ejemplos en IK^n; $M_{mxn}(IK)$; $IK_n[T]$) y continua con el enunciado y la demostración de los Teorema sobre la Matriz de Cambio de Base y de Prolongación de las Bases (enunciado para IK^n). Como es común en este tipo de clases las representaciones empleadas son simbólicas o de tablas algebraicas (para las matrices genéricas), salvo para los ejemplos que acompañan a cada uno de los teoremas (en IR^2 y IR^3, respectivamente) que utilizan el registro de tablas numérico. Los comentarios de tipo META que G. intercala en este caso sirven para resaltar la importancia del teorema que se está presentando, explicitar aspectos del proceso seguido (útil para otras ocasiones similares) y sus consecuencias, mostrar cuándo y cómo se puede aplicar (o no) un resultado, o relacionarlo con otras ramas de conocimiento (como el Análisis o la Física). En particular, se habla de los teoremas de existencia y unicidad, para los que siempre se procede del mismo modo: "*primero se ve la 'pinta' que debe tener el objeto buscado (comprobando que es el único con ella) y luego se ve que cumple las propiedades; se concluye que es el que buscábamos por tanto existe y es único*". Para facilitar la comprensión les pone un ejemplo de la vida cotidiana: "*¿cómo es más fácil encontrar un botón rojo, si hay uno o si hay muchos?*".

Al siguiente día continúa con la misma dinámica para explicar una proposición sobre la relación entre dimensiones de un subespacio vectorial y el ambiente, explicitando cómo usarla para probar igualdades. En este episodio se observan dos usos habituales de los diagramas (Figura 4. 17. a). Por último, ya casi para terminar el tema, explica de forma constructiva (acompañada de bastante participación de los estudiantes) las ecuaciones implícitas y paramétricas de subespacios vectoriales respecto de una base (antes recuerda la relación entre subespacios y sistemas de ecuaciones). Es cuidadoso con la notación (distingue el vector de sus coordenadas con *coord*$_{BE}$, explicita cómo son las "*representaciones fetén*") y utiliza dos representaciones gráficas para ayudar a la comprensión: primero para explicar que "*la clave es coger un sistema de referencia adaptado a la figura*"; y segundo para que entiendan cómo obtener unas ecuaciones implícitas "*inmejorables*" (Figura 4. 17. b). La interacción con los estudiantes le lleva a explicitar elementos de la imagen en los que centrar su atención. También señala: "*aunque en el colegio dejabais que las rectas no pasaran por el origen, aquí es obligatorio que pasen: si no estaríamos haciendo otra Geometría*".



a) Dos usos habituales de los diagramas (DIAG)**: ▲para sintetizar procesos** (en este caso es un proceso finito representado en forma de árbol);**▼ o como juego de implicaciones** (los elementos fundamentales de la demostración y sus relaciones mediante implicaciones forman una configuración en la pizarra que puede ayudar a su comprensión).





b) Uso de representaciones gráficas e interacción con los estudiantes (REPR, FLEX, GEOM, SMS)
#00:02:45-4# G:*¿Cómo son por tanto todos los puntos de V (*repasa rápido la recta con la mano*)?* (Como no responden fija su atención en un elemento) *Este punto* (marca uno sobre la recta) *¿cómo será?* #00:02:53-5#

#00:02:53-5# Al: *(λ,0)* #00:02:53-5#

#00:02:53-5# G: *(λ,0). Lo voy a llamar (*λ_1*,0)* (lo escribe en un hueco que había dejado de las ecuaciones paramétricas de V). *Esa es la ecuación... Se puede llamar λ, t, lo que te de la gana. Pero las ecuaciones paramétricas de V si elijo un sistema de referencia que contiene una base de V, pues son así de fáciles.*

Figura 4. 17: Episodios de visualización en las clases teóricas de la Semana 2 (S220110127G).

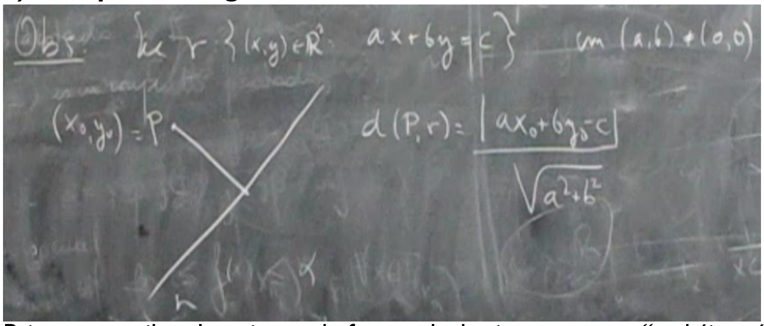
Las **clases prácticas** de la **Semana 2** comienzan con la *Hoja 5* de problemas sobre *Espacios Vectoriales*. El martes hacen los *Problemas* 5.*1* y 5.*2* de comprobación de si IR^2 y IR^3, con operaciones no habituales, son espacios vectoriales. Es una clase muy algebraica en la que durante más de media hora se comprueban los axiomas de Espacio Vectorial. Se explicitan aspectos del manejo de representaciones, especialmente se les dice que deben pensar "*dónde están y qué operaciones se aplican allí*", y aparecen episodios diagramáticos al demostrar igualdades desarrollando cada término por separado. S. explica que hace este problema "*que es un poco largo y aburrido para que veáis lo cuidadoso que se debe ser en comprobaciones de este tipo*". Al final, explica cómo ver si un subconjunto es subespacio vectorial: "*se traduce en que debe tener el 0 y además en que debe estar encerrado en sí mismo* (hace gestos de abrazarse para explicarlo)". El miércoles oferta una clase más para antes del Examen de Febrero y hacen los siguientes problemas: el *5.5*, sobre subespacios (usa la idea del día anterior sobre subespacios, les hace notar que lo "*no lineal les debe oler mal*"; una duda que le surge le lleva a hacer un cambio de notación y a explicarlo en alto); el *5.7* sobre independencia lineal en el registro de tablas, con rangos de matrices de vectores en IR^4 y $\mathbb{C}[T]$ (para calcularlo siguen el método acordado en una pequeña discusión, explica con cuidado, con ayuda de un diagrama, cómo obtener las coordenadas de los polinomios); y el *5.11*, "*más teórico*", sobre independencia lineal en el registro simbólico en un espacio abstracto (deben usar la propiedad de los λ).

Semana 3: Preparando el Examen de Febrero, observando los frutos de la colaboración, dudas de los estudiantes, utilidad del pensamiento diagramático para pensar y comunicar en clase

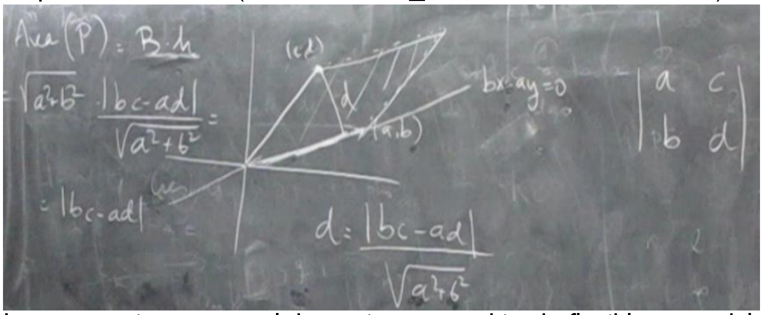
Las **clases teóricas** de la **Semana 3** se dedicaron a hacer dos ejemplos del libro que quedaban para terminar el *Tema 7* y a dudas de los estudiantes, pues G. no quería avanzar más temario antes del Examen. El lunes comienza explicando el objetivo de hacer los ejemplos finales (uno de ellos es ver que la naturaleza de los vectores no es importante ya que todo se transforma en operaciones con filas o columnas). Los ejemplos consisten en: pasar de ecuaciones implícitas a paramétricas (y viceversa); en calcular la base y la dimensión de ciertos subespacios (primero uno abstracto y después el de las matrices simétricas y antisimétricas). Es una clase muy procedimental donde, como suele ser habitual, hace un manejo cuidadoso de representaciones simbólicas y de tablas algebraicas y numéricas, esforzándose en darles consejos y en explicitar algunos aspectos: "*en la práctica pensad* $\{u_1,\ldots u_s\}$ *como si fuera la base canónica*"; "*muy importante poner los parámetros alineados, el que no lo hace se equivoca*"; "*la manera sensata de denotar parámetros es* x_{11}", etcétera. También se atiende a la flexibilidad al explicitar conexiones de ideas ("*obtener las paramétricas es resolver el sistema*"), dando varios métodos para calcular rangos o al poner un ejemplo *3x3* para que se sitúen. Explica cómo calcular la dimensión del subespacio de matrices simétricas usando pensamiento diagramático (interpreta cada sumando en términos de los coeficientes de la matriz). Finalizan hablando del Examen.

Al día siguiente ccontinúan hablando sobre los contenidos teóricos que se van a preguntar en el Examen y con algunas indicaciones del tipo de respuesta que se espera en las cuestiones ("*clara y concisa*"). A continuación tiene lugar la explicación de la interpretación geométrica del determinante (ver Figura 4. 18. a), fruto de nuestra conversación en la reunión del día anterior (ver Metodología, sección 2.4.3.3) donde G. mostró entusiasmo con la idea de conectar esta interpretación geométrica con una dificultad observada en los estudiantes con el cálculo de determinantes. Sin embargo, G. no hace mención alguna de ello explicando de forma muy expositiva (aunque con una buena coordinación entre los modos de pensamiento geométrico y algebraico). Los numerosos mensajes sobre la inutilidad de este tipo de visualizaciones en AL tampoco ayudaron a acercar esta herramienta a los estudiantes. Este episodio pone de manifiesto algunos obstáculos que se dan en la enseñanza de la visualización: hace falta una cantidad elevada de conocimiento para entenderla, es difícil dibujar en tres dimensiones y lleva tiempo explicarla de forma coordinada con otras representaciones. La clase termina con dos preguntas procedimentales de los estudiantes. De nuevo aparece una metáfora para los teoremas de existencia y unicidad ("*buscar una aguja en un pajar*").

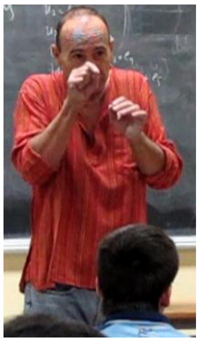
a) Interpretación geométrica del determinante.



Primero escribe el conjunto de forma algebraica, pregunta "*¿sabéis qué figura geométrica es?*" y lo dibuja. Recuerda la fórmula de la distancia de un punto a una recta (S320110201G1_13:18, REPR; GEOM, FLEX)



Lo usa para interpretar el determinante, cambiando flexiblemente del registro algebraico al gráfico vía la imagen (S320110201G2_00:06)



b) Intuición sobre sucesiones

G: *¿Cómo os imagináis una sucesión?* #00:23:13-5#

#00:23:13-5# Al. (Risas) *Una pulga dice la de análisis* #00:23:18-0#

#00:23:18-0# G: *Os dice lo de la pulga. Pero ¿sabes por qué? Porque ella está obsesionada con ver cómo la pulga va dando saltitos, saltitos* (hace gesto con la mano como los de la foto) [Broma sobre la convergencia de las sucesiones por agotamiento de la pulga. Risas de los estudiantes] #00:23:52-6# *Bueno, pues a lo mejor no está mal. Quedémonos con esa respuesta. Es importante saber que la pulga… Le pase lo que le pase en el límite, que en el Álgebra no importa, no es una noción de tipo algebraico. La pulga empieza en un primer lugar, y luego pasa al segundo lugar y luego al tercer lugar, etcétera. Es más fácil de entender que eso de* (hace un gesto de saltos muy pequeños). #00:24:20-9# (S320110203G3_24:17, INT)

Figura 4. 18: Episodios de visualización de las clases teóricas de la Semana 3.

El miércoles, segundo día destinado a las preguntas de los estudiantes, tiene lugar el episodio sobre la existencia de matrices antisimétricas de rango impar que describimos en la Introducción (ver sección 1.1.1). Este episodio, además de ofrecer interesantes evidencias de Pensamiento Diagramático, muestra que la visualización es útil en situación de bloqueo o de dificultad cognitiva y como herramienta para la comunicación. Después hay dos preguntas muy rápidas (la primera sobre notación, $\bar{A}$, y la segunda sobre el significado de "*inconsistente*"). El jueves, último día de clase antes del Examen, hay cuatro dudas de estudiantes, todas bastante procedimentales: (1) sobre el cálculo de la dimensión de un subespacio dado con ecuaciones en el registro de tablas algebraico (escritura matricial); (2) en relación al determinante de A^{-1} (para explicar, G da nombres y advierte de que no se pueden sacar escalares fuera del determinante); (3) sobre las ecuaciones paramétricas y los cambios de signo (G. interpreta que, en el fondo, la dificultad es con los parámetros y los índices mudos); (4) y sobre las ecuaciones implícitas y los cambios de base. También preguntan sobre normas para el Examen y G. da una pista para el segundo problema del mismo (Figura 4. 18. b).

En las **clases prácticas** de esa semana trabajan la *Hoja 6*, sobre *Espacios Vectoriales de Tipo Finito*. En total hacen los siguientes problemas: el *6.2*, para estudiar si cuatro vectores de *E* dados de forma simbólica son linealmente independientes (S. explica el argumento, explicitando cómo mirar las representaciones, los estudiantes muestran dificultades con el paso de simbólico a tablas); el *6.6*, que consiste en probar la igualdad de dos subespacios de IR^3 dados en tablas numéricas (S. sólo explica los pasos, no las cuentas; un alumno propone un camino más corto y lo halaga); el *6.11*, sobre cambios de vectores de IR^3 (el primer día explica el proceso y dos formas de verlo, hace las cuentas al día siguiente, explica que "*una base es una forma de ver las cosas*" con ayuda de una representación gráfica y usa un diagrama para explicar el orden del cambio de base a un estudiante que pregunta); y el *6.12*, sobre cálculo de una base y dimensión de un subespacio de polinomios. El viernes, después de la clase de teoría, S. les da una clase de repaso como preparación al Examen (de tipo META) estructurada en torno a ocho preguntas que deberían plantearse los estudiantes según el contenido sobre el que les pregunten. Explicita reglas de manejo de representaciones (por ejemplo para los determinantes) y todos los métodos aparecidos en clase para diversos problemas como calcular el rango, el determinante de una matriz *nxn* o la dimensión de un subespacio.

4.2.1.2 Etapa 2: Entrada en la Investigación de Campo como Profesora de Prácticas (Semanas 4 a 8)

Semana 4: Dialogando con el pensamiento geométrico en torno a las Operaciones con Subespacios

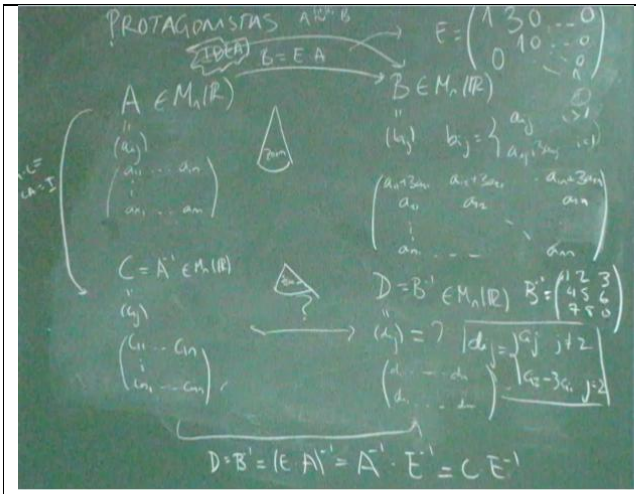
La **Semana 4** es justo la primera después de los exámenes de Febrero. Está marcada por numerosos comentarios de G. relacionados: sobre las notas, sobre el tipo de explicaciones que debe hacer a la luz de los resultados ("*9 de cada 10 estudiantes suspenden*"); sobre el tipo de estudiantes que prefiere ("*pocos y buenos en vez de muchos y malos*"), etcétera. En las **clases teóricas** G. explica, prácticamente el *Tema 8* sobre *Operaciones con Subespacios*. Como veremos a continuación, los ejemplos geométricos y las representaciones gráficas tienen un papel destacado en la exposición de este tema, a menudo acompañados de una fuerte interacción con los estudiantes. La descripción de estos episodios aporta información relevante en torno a cómo se usa este tipo de visualización en clase.

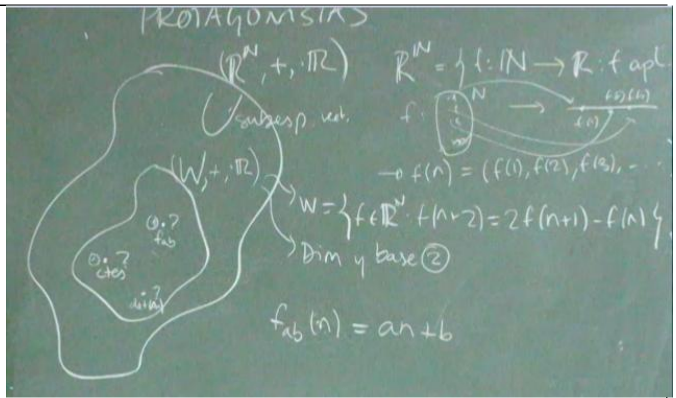
El lunes se introduce el tema y se explica la intersección con un ejemplo. Primero se explica algebraicamente que "*intersecar es concatenar ecuaciones*" y después pregunta de palabra a los estudiantes que razonen sobre las posibles intersecciones de dos planos. Recuerda que la unión no es subespacio volviendo a emplear la representación gráfica de la unión de dos rectas (esta vez en el espacio "*para que sea más chulo*"). Esta representación la deja en la pizarra utilizándola en un diálogo flexible con el razonamiento algebraico a lo largo de casi toda la clase para: justificar que no se está trabajando con la familia vacía, mostrar que en la unión hay infinitos vectores, ejemplificar calculando *L[X]* de la representación gráfica (este razonamiento lo explica utilizando pensamiento diagramático con "*chirimbolos*"). Finalmente, G explica que "*algo debe sustituir a la unión y siempre lo que se hace en Matemáticas, es coger el menor subespacio que la contenga*". De esta forma introduce la definición formal de la suma de subespacios. El martes comienza completando la demostración de una proposición sobre la suma que da una forma de calcular una base, y que en el libro no aparece tan detallada. Después explica la fórmula de Grassmann: la escribe y establece analogías con conocimiento previo de los estudiantes "*esto es cómo se cuenta* (conjuntos)"; demuestra, distinguiendo dos casos y haciendo notar que "*conceptualmente son muy distintos*" y que el primero ha sido fácil de demostrar "*porque hemos cogido la base que hemos querid*o"; obtiene algunas consecuencias y da ejemplos de su uso. Primero G. pregunta para que razonen en qué se cortan dos planos distintos de IR^3 y después generaliza este resultado a cualquier par de hiperplanos. Para explicar que es importante decir "*dónde es hiperplano*" muestra con una representación gráfica que una recta es hiperplano de cualquier plano que la contenga pero no de IR^3.

El día siguiente, G. generaliza esta propiedad aún más mostrando que intersecar cualquier subespacio con un hiperplano que no lo contenga reduce su dimensión en uno, explicación que también acompaña de una representación gráfica en IR^3. Ésta sirve a su vez para motivar la definición formal de suma directa, intercambiando así el orden habitual de uso de estas representaciones. Tras enunciar la propiedad de escritura única para una suma directa, mostrar un "no-ejemplo" en IR^3 (que no representa gráficamente "*porque no lo hace bien*", a pesar de que "*considera importante la visualización*") y realizar su demostración, define espacios suplementarios. Con una representación gráfica revela que "*no cabe hablar de EL suplementario sino de UN suplementario*" y explica cómo hallar un suplementario de un hiperplano. Termina probando que las matrices simétricas y antisimétricas son suma directa. El jueves, la clase comienza explicando un par de propiedades que quedaban colgadas: en relación a la existencia de un suplementario y sobre la posibilidad de ver cualquier subespacio como intersección de hiperplanos. Para que entiendan mejor esta última proposición, les hace pensar en IR^3 –"*una recta es la intersección de dos planos*" – y les hace ver que la "*codimensión es igual al número de restricciones*". El resto de la clase la dedica a los EVC: primero G. motiva la necesidad del concepto con el ejemplo de la parametrización de la circunferencia; a continuación da la definición formal de un Conjunto Cociente y demuestra que la relación definida para un subespacio dado es de equivalencia; explica la interpretación geométrica de esta definición; y finalmente comprueba que a dicho conjunto se le puede dotar de estructura de Espacio Vectorial. Esta explicación es muy rica en visualizaciones y se verá con más detalle en el Capítulo 4.3 sobre EVC.

Las **clases prácticas** de la **Semana 4** se dedican a revisar el Examen, explicando no sólo explicando cómo se hace (pues G. colgó la corrección en internet) sino "*cómo pensar para que salga*". Los primeros 10 minutos de la clase del martes se dedican a una presentación, ya que era la primera clase del curso de la profesora B. Se les pregunta el nombre, el Grado que están estudiando, por qué han elegido estos estudios y qué es lo que más (y menos) les gusta por ahora de la carrera. A continuación, comienzan a revisar, una por una, las cuestiones teóricas del Examen (ver Anexos) siguiendo una dinámica de clase de tipo debate: B. lee la enunciado, pregunta cuántos habían respondido verdadero y cuántos falso (anotando el resultado en una tabla en una esquina de la pizarra), pide a diversos estudiantes que expliquen cómo lo habían pensado, a partir de sus ideas explica la respuesta, finalmente formaliza la respuesta correcta y la recuadra en la tabla. En este debate surgen diversidad de métodos y razonamientos, así como dificultades de los estudiantes a las que se les puede prestar atención específica. En particular, se favorece la aparición de visualización en clase. Por ejemplo en la *Cuestión 3* una alumna sale a la pizarra a explicar su razonamiento utilizando pensamiento diagramático sobre matrices. Esta idea la emplea B. para dar un contraejemplo. Finalmente, como se detecta que confunden "*estar contenido*" con la idea intuitiva que se les dio para subespacios de "*estar encerrado en sí mismo*", B. explica de nuevo esta idea traduciendo la definición formal en un diagrama de conjuntos.

El miércoles se dedica a corregir los dos problemas (ver Anexos). En ambos casos se sigue la misma estrategia. En la pizarra pequeña de la izquierda se sitúan de forma diagramática los objetos matemáticos involucrados en el problema (representados de formas diferentes), sus relaciones y la información conocida y solicitada. En el caso del *Problema 1* el diagrama que surge es de flechas y permite explicar (a B. primero y luego a los estudiantes) la estrategia que se va a seguir (Figura 4. 19. a). En el *Problema 2* el diagrama es conjuntista y se usa para ayudar a entender mejor lo que se está pidiendo (Figura 4. 19. b). En ambos casos se comienza explorando las diferentes representaciones de los objetos involucrados, distinguiendo niveles de acercamiento, y se utiliza la idea de hacer zoom –acercar o alejar– para explicitar los cambios de nivel. Incluso se establecen nombres –macro y micro– para referirse a las diferentes representaciones y puntos de vista. En el *Problema 1* este lenguaje sirve para ver una matriz como *A* (a nivel macro) o según sus coeficientes como (a_{ij}) (a nivel micro) y permite explicar cómo llegar a la "*idea feliz*" del problema que básicamente consiste en elegir bien el punto de vista.





▲**b) Diagrama conjuntista** para entender el *Problema 2* y tener una visión global del mismo (S420110216B)
◀**a) Diagrama de flechas** para sintetizar las relaciones y resolver el *Problema 1* (S420110215B)

Figura 4. 19: Explicaciones visuales de los problemas del Examen de Febrero en las clases prácticas de la Semana 4.

Semana 5: Adquiriendo intuición y práctica sobre el concepto de Aplicación Lineal

Las **clases teóricas** de la **Semana 5** comienzan con una proposición bastante procedimental sobre la base y la dimensión de los EVC. Primero se enuncia y demuestra, después utiliza el argumento de la demostración en un ejemplo de cómo calcular la base y las coordenadas de una clase (de dos maneras) de un espacio cociente IR^4. Con esto finaliza el Tema 8 y empieza el *Tema 9* sobre *Aplicaciones Lineales*. La introducción, de estilo claramente semántico, mezcla metáforas de la vida cotidiana, notas históricas (sobre el programa de Erlangen) y conexiones con otras ramas de las Matemáticas: Topología, (donde explica la idea de homeomorfismo y define a un topólogo como "*alguien que no distingue entre un donuts (toro) y una taza*"); Geometría Proyectiva (habla de aplicaciones que transforman una elipse en una hipérbola). G. expresa su frustración: "*es importante relacionar las cosas que se van aprendiendo, pero eso sólo se puede hacer si se sabe algo*". Acaba con un ejemplo de aplicación en la vida cotidiana (comprar en el supermercado, donde si no hay ofertas, para saber el precio basta con conocer cuánto vale el kilo). Lo cuenta utilizando notación vectorial, por lo que sirve de introducción a la definición formal. Enuncia y demuestra propiedades, entre las que se incluye $f(0_E)=0_F$, que comenta que "*le dejaban perplejo*"cuando él empezó la carrera. En la clase del día siguiente da una demostración alternativa, más sencilla, sugerida por un estudiante el día anterior después de clase. El resto del tiempo lo dedica a ver los ejemplos de aplicaciones lineales que aparecen en el libro y termina hablando de "*su rigidez*". Es una clase con poca visualización. A parte del episodio anterior, más intuitivo, sólo hay uno más sobre las funciones lineales de *IR* en *IR*. G. pregunta por su interpretación gráfica y establece una analogía: "*De IR en IR las únicas aplicaciones lineales son del tipo 'multiplicar por'. Esto se extiende a todas las aplicaciones lineales, sólo que en lugar de multiplicar por un número se hace por una matriz*". Esta es una idea recurrente en la clase y en el tema.

Al día siguiente formaliza la idea de la rigidez de las aplicaciones lineales, enunciando y demostrando la *Proposición 9.5* del libro. Explica "*con conocer lo que pasa en algo pequeño sé lo que pasa en algo grande*" y muestra dos ejemplos de endomorfismo de IK^2: uno imposible (pues da tres vectores con imágenes incompatibles) y otro sobre el cálculo de una matriz dadas las imágenes de los vectores de la base (compara la escritura con la de $f: IR \rightarrow IR; f(x)=ax$). A continuación explica las imágenes directas e inversas y, como casos particulares, define la imagen y el núcleo de una aplicación. Demuestra que son subespacios y hace el *Ejemplo 9.7* del libro de cómo se calculan. En dicho ejemplo explicita aspectos relativos a la visualización como: "*las imágenes directas contraen, bajan, empatan; las inversas, suben o empatan* (INT)"; "*mi método, cuando le das ecuaciones paramétricas de W te escupe implícitas de* $f^{-1}(W)$ *y con las imágenes directas hace al revés* (REPR)"; "*para un contenido he usado que 'u' fuera combinación lineal de los vectores y para el otro que son el menor subespacio [...] Es importante ver las dos caras de la misma moneda* (FLEX)"; "*f preserva lo íntimo a un subespacio, pero eso no significa que no pueda distorsionar; como los espejos del parque de atracciones* (INT, metáfora)". El jueves, muestra ejemplos de cálculo de imágenes y núcleos de aplicaciones lineales, siguiendo un esquema parecido al del lunes (con los ejemplos de aplicaciones lineales). Después enuncia y demuestra una proposición sobre la conservación de la independencia lineal a través de las aplicaciones lineales y termina definiendo isomorfismo y espacios isomorfos. Para disuadir a los estudiantes de pensar que se puede extender a otras partes de las Matemáticas el buen comportamiento de las aplicaciones lineales (si son biyectivas, su inversa también es lineal), pone un contraejemplo ($f(x)=x^3$) que representa gráficamente. En la demostración de que este hecho es cierto en el AL utiliza pensamiento diagramático para que piensen en cómo razonar en general cuando "*tenemos un transformador inyectivo y queremos ver que dos 'tipos' son iguales*". Llama la atención de que 'ser isomorfo' es una propiedad simétrica: "*esto en general no tiene por qué ser cierto; si uno es hermano mío, yo soy hermano suyo pero si tú eres mi tío yo no soy tu tío*". Pone como ejemplo la aplicación $coord_{BE}$ y concluye que "*esto prueba que todos los espacios vectoriales de dimensión n son el mismo módulo isomorfismo, son* IK^n"

En las **clases prácticas** de esa semana empiezan con la *Hoja 7*, sobre *Operaciones con Subespacios*. El martes B. comienza explicando la organización de las clases en torno a esa hoja: ella hará los problemas que no están resueltos en el libro (argumenta que cubren bien los contenidos del tema); del resto cada uno debe pensar en tres que quiera que se hagan y la semana siguiente resolverán ellos en la pizarra los que más votos hayan obtenido. Comienza por el *Problema 7.3*, que trata sobre cálculo de ecuaciones implícitas, paramétricas, bases y dimensión de dos subespacios dados y de su suma e intersección. B. comienza escribiendo una tabla en la pizarra de la derecha en la que sitúa los datos del problema y donde va escribiendo las respuestas. Esta tabla también sirve para explicitar cómo usar la fórmula de Grassmann. Surgen diversas preguntas y B. invita a todos a que intenten responder a sus compañeros. Esto lleva a veces a explicitar mejor el manejo de representaciones (por ejemplo, las dificultades de Noelia con el paso de implícitas a paramétricas llevan a B. a explicar que "*no es nada más que resolver el sistema*"). En otra ocasión un estudiante pregunta cómo se razonaría en IR^3 (el problema está en IR^4) y B. responde razonando con dimensiones sobre una representación gráfica. También utiliza el pensamiento geométrico para reforzar su mensaje de rigor: "*Os puede parecer un poco absurdo hacer esto, pero hay que demostrar porque imaginaos que...* (pone un ejemplo geométrico en el que la intuición pueda fallar)". Finalmente, para que reflexionen sobre el manejo de representaciones B. les pide que intenten rellenar dos tablas (Figura 4. 20).

Dados U y V, ¿qué información conocemos fácilmente para hacer la unión y la intersección según el tipo de ecuaciones con que nos los den?

∪		V	
		Paramétricas	**Implícitas**
U	**Paramétricas**		
	Implícitas		

∩		V	
		Paramétricas	**Implícitas**
U	**Paramétricas**		
	Implícitas		

Figura 4. 20: Propuesta de actividad de reflexión sobre el manejo de representaciones de un problema del curso sobre unión e intersección de subespacios en la Semana 5.

En la clase siguiente, B. dice el resultado de la votación de problemas y corrige el apartado *7.3.iii)*. Mientras copia la respuesta en la pizarra, B. les pide que piensen individualmente en la pregunta "*¿cómo son todos los subespacios de IR^3?*" Hecho esto, propone un debate, les coloca en grupos y explica las normas. Durante 15 minutos discuten en grupos (algunos utilizan bolis y gestos para discutir, B. pide a una alumna que dibuje en las hojas en sucio en vez de en la mesa). A continuación ponen en común las soluciones del problema observándose tres diferentes (el Grupo 1 y el 4 piensan en términos de número de generadores, el Grupo 2 se basa en la definición formal y las dimensiones y el Grupo 3 razona primero con las dimensiones y luego busca intersecciones y sumas). B. revisa cada respuesta, indicando cómo haría falta completarlas y señala que "*todas las respuestas son válidas*". Pregunta que si hay alguna que les parezca más matemática y todos responden que la del Grupo 2. Finalmente B. hace preguntas de ampliación: menciona que podrían continuar pensando en los Cocientes, les pide que piensen cómo no son los subespacios de IR^3 (pensando geométricamente con la esquina de la clase y con una representación gráfica); y pregunta que cómo sería en IR^4 y IR^n. Termina explicando a los estudiantes la finalidad problema y comenta por encima el *Problema 7.13* sobre Cocientes.

Semana 6: Desarrollando el Pensamiento Diagramático para la Factorización Canónica, Geométrico para las Proyecciones y Simetrías y las representaciones matriciales para las Aplicaciones Lineales

Las **clases teóricas** de la **Semana 6** se dedican a la segunda mitad del *Tema 9* sobre *Aplicaciones Lineales*. Como principal novedad se destaca la introducción y el uso de los diagramas conmutativos, hasta ahora con presencia casi nula en el curso. La primera parte de clase del lunes se dedica a explicar que la dimensión caracteriza los espacios isomorfos. Primero, G. introduce la idea de invariante con elementos habituales: referencias a otras ramas de las Matemáticas (clasificación de superficies compactas a través de la característica de Euler); notas históricas (programa de Hilbert y la imposibilidad de su realización demostrada por Gödel); comentarios sobre la enseñanza ("*el Grado está descafeinado*"). Antes de enunciar y demostrar el Teorema, pide a los estudiantes que conjeturen qué tendrán en común dos espacios isomorfos (responden bien). Tras la demostración señala que "*además del resultado en sí, esto tiene interés*" y explica de nuevo el proceso de transportar estructura con un diagrama. A continuación prueba que la composición de aplicaciones lineales es lineal (resaltando con comentarios humorísticos que "*se lee al revés, como los árabes*"). Pregunta que a cuántas personas les parece razonable este nivel de detalle (una alumna cuenta unas *20* manos mientras G. cierra los ojos para que respondan libremente). Después explica la factorización que, "*como él no entendió nada cuando se lo contaron, lo hace poco a poco; y al final saldrá un precioso diagrama*". Este episodio, rico en comentarios de tipo META, metáforas, traducción de modos de pensamiento y explicitación de manejo de representaciones, se explica con más detalle en el Capítulo sobre EVC (sección 4.3.1.2, Figura 4. 76). La clase termina con un ejemplo (el *9.13*) de uso de la Factorización Canónica. Se plantea el problema y se prueba una condición necesaria para su existencia.

Al día siguiente, se prueba que es también suficiente y se hace un ejemplo en IK^4, explicando que "*el problema de la factorización está presente en todas las Matemáticas* (MAT)", muestra cómo S. lo empleó para pensar la *Cuestión 4* del Examen (con un diagrama y explicitando cómo cambiar el punto de vista de matrices a funciones). Concluye: "*si una 'f' factoriza a través de algo pequeño, ella llena poco* (INT)". Decide cambiar el orden del libro y explicar algunas consecuencias de la fórmula de la dimensión. En su demostración utiliza algunos ejemplos concretos, metáforas del día anterior para convencer a los estudiantes ("*la pantalla siempre es más grande que lo que proyectas*"), compara con conocimiento previo ("*esto recuerda al resultado de cuándo dos subespacios forman suma directa*") y les previene de posibles dificultades (derivadas de utilizar las implicaciones en sentido contrario). Finalmente explica las proyecciones y simetrías estableciendo un estrecho diálogo entre la definición formal (simbólica) y el pensamiento geométrico (representaciones gráficas). Este último sirve para dar sentido, justificar, convencer, comprobar y ayudar a los estudiantes a conjeturar. También pregunta por lo que les enseñaron al respecto en Elementos de Matemáticas (a través de un dibujo que borra rápido) y lo compara con lo que está explicando ("*a vosotros os han enseñado un caso particular; aquí no hay distancias ni ortogonalidad*").

La explicación finaliza al día siguiente, dejando una proposición sobre simetrías por demostrar (la pide como entrega que cuenta para la evaluación contínua). El resto de la clase la dedica a la *Matriz de una Aplicación Lineal*, proposición (*9.17*) que formaliza matemáticamente un cambio de representación: "*esta proposición dice cómo codificar la información de una aplicación lineal, pues con conocer cómo se transforman los elementos de la base sé calcular lo demás*". Utilizando pensamiento diagramático sobre las representaciones concluye: "*Aquí nace una matriz*". Hecho esto enuncia (explicando la notación) y demuestra el *Teorema sobre Existencia y Unicidad de la Matriz de una Aplicación Lineal* (utiliza la expresión "*gráficamente*" para referirse a lo que se denomina en esta investigación *la representación diagramática de la matriz de la Aplicación Lineal* (ver Figura 4. 21). Después muestra algunos casos particulares, entre los que sale la fórmula del cambio de base. En todo este episodio, el manejo de representaciones se hace de forma cuidadosa, se usa "*coord$_\varepsilon$*" para distinguir el vector de sus coordenadas, se pide a los estudiantes que establezcan relaciones entre objetos (para ayudarles tanto a conjeturar como a comprender utilizando diagramas conmutativos) y se explicita una regla nemotécnica para el orden de las bases (que se usa para comprobar) así como relaciones con conocimiento previo ("*os tiene que sonar al cambio de base*").

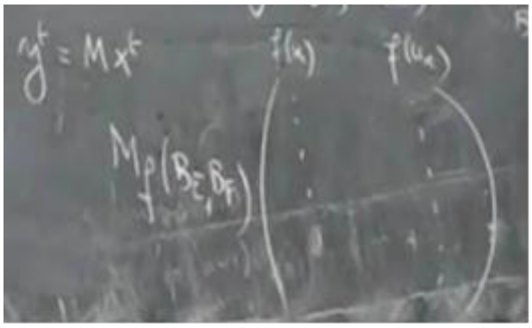
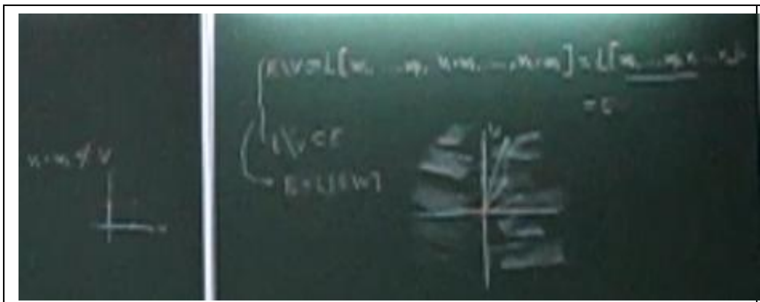


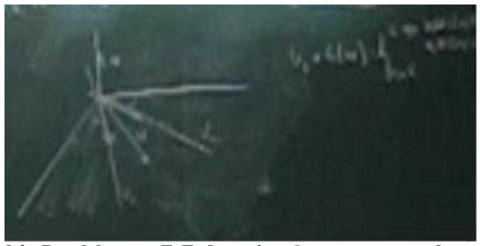
Figura 4. 21: Representación diagramática de la Matriz de una Aplicación Lineal (S620110302G)

El jueves continúa con la misma dinámica para explicar dos subcasos particulares. Para los endomorfismos, explica qué es conjugar (relacionándolo con lo que saben de Teoría de Grupos), define traza y determinante de un endomorfismo (mostrando que la definición es independiente de la matriz que se escoja). Volviendo a un contexto más general, define rango de una Aplicación Lineal y explica que es igual a la dimensión de la imagen usando el diagrama (Figura 4. 21). Finalmente se dan dos episodios relacionados con la flexibilidad cognitiva: un ejemplo de cálculo de la matriz de un endomorfismo de IK^3 (lo hace siguiendo dos métodos) y un nuevo punto de vista para los subespacios vectoriales como imágenes y núcleos de una cierta aplicación lineal (lo explica porque dice que "*puede estar bien psicológicamente*" y "*quizá os venga bien ver un subespacio como núcleo y aplicar sus propiedades*").

En las **clases prácticas** de la Semana 6 continuan trabajando en la *Hoja 7* sobre *Operaciones con Subespacios*. El martes trabajan en los problemas más votados. Ana sale al *Problema 7.5*, sobre el espacio que genera el conjunto complementario de un subespacio. Comienza a explicarlo, bajo y mirando a B. principalmente, de forma simbólica (como en el enunciado). B. pide justificación de una afirmación que Ana ve evidente y no sabe probar, así que B. la anima a representar gráficamente: "*Yo hasta que no vi el dibujo no se me ocurrió, cuéntanoslo*" (Figura 4. 22. a). Noelia sale a explicar dónde se ha quedado atascada en la solución del libro (simbólica) al *Problema 7.7* (sobre la existencia de un suplementario común a dos subespacios de la misma dimensión). Para ayudar a la clase a salir del bloqueo, B. representa gráficamente un ejemplo concreto en IR^3 (traduce del lenguaje formal al pensamiento geométrico, ver Figura 4. 22. b). A pesar de la insistencia de B. nadie quiso salir al *Problema 7.10*, sobre espacios de polinomios, así que ésta lo explicó en la pizarra (explicitando aspectos clave del manejo de polinomio y dando varias formas de pensar). Finalmente, aunque surgieron dudas en torno al *Problema 7.15*, B. decide dejarlas para tutorías y hacer un repaso sobre lo aprendido en esta Hoja de Problemas (retoma la tabla de síntesis sobre el manejo de representaciones para la suma y la intersección, ver Figura 4. 20).



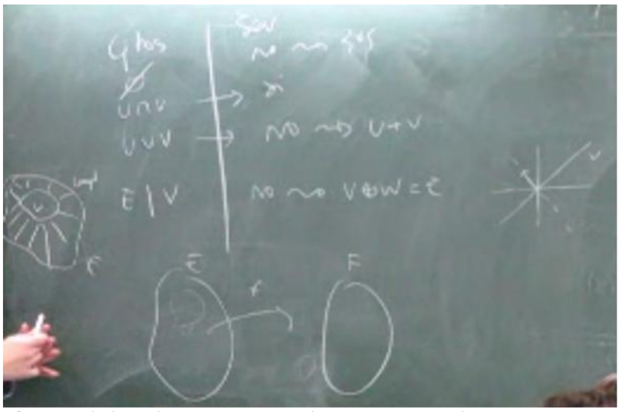
a) *Problema 7.5.* Ana dibuja, pero explica poco (GEOM, Part, SMS, FLEX)**.** B. hace preguntas para guiarla. Visto gráficamente, Ana termina su razonamiento simbólico y se sienta. B. explica con la representación gráfica por qué la respuesta final es verdad (que no parece haber quedado clara para todos, pues Ángel pregunta "*¿entonces la respuesta cuál es, todo E?*"). (S620110301B, GEOM)



b) *Problema 7.7*. Las imágenes pueden llevar a engaño, pero también guiar hacia la solución (GEOM, Part, SMS, DIAG). Noelia tiene dudas con una representación simbólica del libro. B., al pensar geométricamente, omite un paso importante formalmente, relacionado con la dificultad de Noelia. Otro estudiante, David, da con la solución consistente en un proceso finito que B. explica y resume en un diagrama.

Figura 4. 22: Uso del pensamiento geométrico para salir de un bloqueo y obtener ideas para resolver un problema en las clases prácticas de la Semana 6 (S620110301B).

El miércoles la clase comienza con una nota aclaratoria sobre los lenguajes conjuntista y de espacios vectoriales (Figura 4. 23. a). Después B. pregunta cuánta gente quiere una explicación del Cociente y casi todos levantaron la mano. Como describimos más adelante (ver Capítulo sobre los EVC, sección 4.3.1.2) se usan diversas visualizaciones: la metáfora de la ferretería y las representaciones gráficas MICRO y MACRO. Entonces, se comienza la *Hoja 8* sobre *Aplicaciones Lineales*., recordando la definición y sus propiedades antes de hacer el *Problema 8.1*, sobre ejemplos de aplicaciones en *IK*^{2}. Pregunta "*¿qué os dice la intuición?*" y demuestra formalmente. Aprovecha el problema para hacerles reflexionar sobre todas las posibles representaciones de las aplicaciones lineales y explicarles cómo se razonaría con cada una (Figura 4. 23. b). Cuando llega a la gráfica les hace preguntas para ayudarles a interpretarla y les dice: "*En IK*^{2} *se puede dibujar pero en otros mundos no; la formal es importante, además la gráfica os puede engañar*".



a) Explicitación de manejo de lenguajes con la ayuda de una tabla y de diagramas conjuntistas (DIAG, GEOM, SMS, Expl)

b) Explicación sobre la coordinación de representaciones, poniendo todas juntas y comparándolas (REPR, GEOM, DIAG, FLEX)

Figura 4. 23: Explicitación de la visualización en las clases de prácticas de la Semana 6 (S620110302B)

Para el apartado *8.1.ii)*, B. promueve un pequeño debate. Una estudiante razona que es lineal geométricamente y B. dice "*bien, ahora habría que comprobar*" (sale Pablo, aburrido, a hacerlo formalmente). Los otros dos apartados los ven bastante claros. Para terminar la clase hace el *Problema 8.5*, también sobre existencia de aplicaciones lineales, ahora en el registro simbólico. B. explica cómo pasarlo a coordenadas (tablas) y utiliza una tabla bajo la fórmula de la dimensión para distinguir casos.

Semana 7: Cambiando de punto de vista y de representación para 'vencer' al dual

En las **clases teóricas** de la **Semana 7** se finaliza el *Bloque II* del libro terminando el *Tema 9* y explicando el *Tema 10* sobre el Espacio Dual. Las clases de esta semana son muy formales, predominando en ellas un estilo procedimental que a veces desemboca en algún enunciado de carácter más lógico-estructural. En relación a la visualización, el aspecto más característico de estas clases es la importante cantidad de tiempo y energía dedicada al manejo de representaciones y a su explicitación. Un motivo puede ser el cambio de profesor (de lunes a miércoles explicó J.), aunque el jueves vuelve G. y continúa habiendo bastante énfasis en el manejo de representaciones. Este hecho lleva a pensar que también pueda estar influyendo el contenido que se está explicando. Sólo hay un breve episodio de pensamiento geométrico este último día, para dar sentido a los elementos de la base dual como proyecciones.

El lunes J. comienza explicando un ejemplo (*9.23*) sobre una aplicación lineal restringida a un hiperplano. Como introducción a los espacios duales, explica los espacios de aplicaciones lineales: (1) la definición (simbólica), (2) el isomorfismo con el espacio de matrices (explicita que esto facilita el trabajo, que "*en abstracto es complicado*", y que "*una vez comprobado que es isomorfismo se trabaja en los dos espacios igual*"); (3) la dimensión (lo explica utilizando una disposición diagramática que ayuda a ver relaciones entre los objetos). El martes introduce el *Tema 10* explicando con un esquema para qué se usan los duales. Da la definición de espacio dual y de las π_i (comparando la notación del dual y de IK^n, "*la única diferencia es que en un sitio separamos por espacios y en otro por comas*"). Define los hiperplanos, explica cómo sirven para traducir el lenguaje geométrico y emplea este punto de vista para mirar con otros ojos un ejemplo de factorización (*Ejemplo 10.2*). Introduce de forma constructiva las bases duales y sus propiedades.

Al día siguiente termina con las bases duales explicando varias formas de obtener B_E* dada B_E (el problema recíproco) y sus dos propiedades fundamentales. Estudia dicho problema en IK^n (dada B_E* obtener B_E) de varias formas y concluye que "*el método más fácil es poner los h en filas, los u en columnas y calcular inversas*" y lo explica con un diagrama. Las explicaciones de J. proporcionan evidencias de atención a la flexibilidad al: establecer analogías (entre la forma de dar coordenadas en los espacios de funciones y en los de los polinomios); realizar comprobaciones en clase; explicitar varias formas de hacer las cosas o dividir razonamientos generales en varios pasos de modo que se pueda deducir una pauta (además de este modo se evitan subíndices). El jueves G. continúa con las propiedades de las bases duales. Define la aplicación dual f^* de una aplicación lineal f (usando diagramas conmutativos) y explica la relación entre sus matrices (respecto de bases duales) y las matrices de cambio de base. Habla de la importancia del dual en otros cursos. En AL han decidido no usarlo más por las dificultades que supone a los estudiantes. Termina con el episodio que da sentido a los elementos de la base dual del que hablamos anteriormente y con un ejemplo (*10.6*) de cálculo de coordenadas del dual (el lunes de la semana siguiente lo explica de otra forma distinta, pero dice que el método de este día es mejor). Las características principales que se observan en el manejo de representaciones en las clases de esta parte son las siguientes:

- uso de diversas representaciones dando nombres para referirse a unas y otras y explicando cómo razonar con cada una (matricialmente, vectorialmente lo presenta como "*escribir en detalle*" y en combinaciones lineales como "*en coordenadas*");
- reflexión sobre el tipo de representación más conveniente ("*es más fácil pensar en coordenadas que en abstracto*"; "*las formas más sencillas –es decir con más ceros– quitando la nula son* π_i");
- uso de lenguaje natural para ayudar a la interpretación de propiedades sobre los objetos de los que se habla (propiedades de las bases duales);
- explicación detallada de qué se tiene, qué se busca y cómo pasar de unas representaciones a otras ("*se toma una base y coordenadas*", "*lo pongo como Aplicación Lineal*"), a veces con ayuda de pensamiento y escritura diagramática para mostrar mejor relaciones y destacar elementos de las representaciones que se tienen en cuenta en las transformaciones (diagrama matricial para las aplicaciones lineales (Figura 4. 21), con marcas de cuadrados y círculos que llaman la atención sobre ciertos elementos, escribiendo matrices como moldes que se deben ir rellenando, o con diagramas conmutativos);
- comparación y conexión de representaciones ("*la única diferencia con* IK^n *es que en uno separamos por espacios y en otro por comas*", J. explica cómo identificar IK^n y E^*);
- distinción de varios puntos de vista, de palabra o indicándolo con flechas (habla de vectores o de sus coordenadas; indica "*a nivel de vector*" o "*a nivel de funciones*"; se refiere a los hiperplanos diciendo "*desde un punto de vista más conceptual*");
- reglas, convenios y normas establecidos ("*nadie coge* π *como base de IK*"; "*hay gente que llama a* f^* *la traspuesta*", "*se llama calcular a dar sus coordenadas en* ε^*").

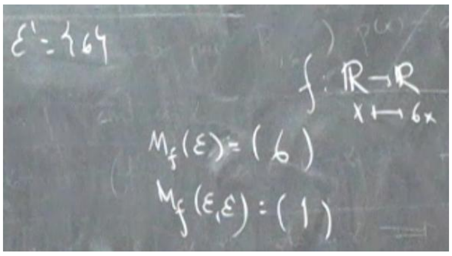
Las **clases prácticas** de la **Semana 7** se dedican a continuar trabajando los problemas de la *Hoja 8*: el martes de modo más tradicional, con predominio de representaciones simbólicas y de tablas; mientras que el miércoles tiene lugar una sesión experimental de trabajo en grupos en torno al *Problema 8.7*, de la cual hablaremos con detalle más adelante (ver sección 4.3.2). La clase del martes es escasa en visualizaciones, predominando el manejo explícito de representaciones y el uso flexible de diversidad de métodos de resolución (motivado fundamentalmente por la interacción con los estudiantes). Pocos de ellos han pensado los problemas antes, B. les dice: "*tenéis que trabajar*". Comienzan con el *Problema 8.2,* sobre cálculo de la matriz de una aplicación lineal de IK^2 en IK^3 (dada en registro de tablas numérico) y ecuaciones implícitas del núcleo y de la imagen. Sale Ana, quien resuelve utilizando la linealidad con representaciones simbólicas. B. complementa con una explicación matricial. Surgen dificultades con la parte de las ecuaciones, llevando a B. a explicitar aspectos del manejo de representaciones ("*hay una matriz que hemos usado de dos formas distintas*"). Resuelven otros dos problemas, el *8.8* y el *8.10*. B. pide que anticipen las respuestas. Para ayudarles con el primero (sólo una estudiante responde bien) explicita: "*Cuando os pregunten cosas así donde no se os da mucha más información, sólo podéis jugar con las dimensiones*". Una duda de Ángel lleva a B. a explicar por qué tener núcleo igual a *0* es equivalente a ser inyectiva. En relación al segundo, tras escuchar algunas respuestas complicadas, B. dice "*es mucho más fácil que eso*" y muestra cómo hacerlo usando un cambio de base, de tres formas distintas.

Semana 8: Entrando en el problema de diagonalización de endomorfismo a través del estudio del polinomio característico, formalismo y ausencia de visualización

G: Fijaros, hoy vamos a plantear el problema más importante de los que vamos a resolver en este curso. Plantear, no resolver. Plantear. Y me parece razonable para plantearlo empezar con una situación banal y que como todas las banales no interesa, pero no por ello... Eso nos hará caer en la cuenta, espero, de la necesidad de abordar el problema que queremos abordar. #00:12:05-4# El asunto es el siguiente. Eh, todas las transacciones económicas... Una transacción económica normal puede ser, por ejemplo, yo te dejo un euro y dentro de tres meses tú me devuelves 6 euros. No sólo es normal sino muy beneficiosa para mí. Ahí se diría, ¿verdad?, que la aplicación que hace corresponder el número de euros que yo te presto con el número de euros que tú me devuelves es 6x. #00:12:32-3# Se transforma en 6x. Y digo bueno, a las malas en Matemáticas podemos conseguir que todas sean las que mandan x a x. ¿Sabes cómo? #00:12:42-1# Llamo a lo que tú me devuelves, a esos 6, el "euraco". El "euraco" es una moneda que nos acabamos de inventar de 6 euros. Entonces, yo doy un euro y te me devuelves un "euraco". La aplicación manda x a x, pero lo que cambian son las unidades. #00:12:56-2# ¿Estáis de acuerdo? #00:12:58-9# Así por ejemplo. Eh, f de IR en IR que manda como habíamos quedado, x a 6x tiene su matriz respecto de la base estándar... ¿Es cuál 6? Y su matriz de la base estándar a la E' donde E' es el 6, es cuál. Quiero contestaciones rápidas a las dos preguntas. #00:13:30-4#

#00:13:30-4# Al. 6 y 1.; G: 6 y 1 (lo escribe) #00:13:32-5#

#00:13:32-5# G: Digo, ¿cuál creéis que dan más información? Bueno, las dos dan toda la información porque la matriz codifica todo. Pero ahora imagínate que yo me pongo aquí delante (tapa la parte de las matrices y sólo deja ver el 1 y el 6). Y digo la matriz es 6. Y luego digo, no la matriz es 1. ¿Con qué información te quedarías? #00:13:54-6#



#00:13:54-6# Al: (Se oye algún 6) #00:13:57-2#

#00:13:57-2# G: Yo con la del 6. Esto es todo subjetivo. Falta el dato fundamental, que es respecto de qué base. Pero se tiene la confianza de que no es tonto con quien se está hablando. Porque si se toma demasiado en serio y cambiamos de reglas de juego. Imaginaron que la vida tiene inflación y entonces el segundo semestre yo te dejo un euro y tú me devuelves 12. Pues definimos el "euratón" y entonces pues ya está. Otra vez es uno. Pero ahora el euratón son 12 euros, o sea que la cosa te va fatal. #00:14:25-2# #00:14:25-2# Por tanto, qué bases se utilicen es muy importante para decidir qué código asociamos a cada f. Y si nos ponemos a las malas, los isomorfismos... Siguiente pregunta #00:14:42-8# (Explica que un isomorfismo de E a F respecto de bases adecuadas siempre puede ser la identidad y que por tanto no da ninguna información, mientras que hay otras matrices que dan toda la información). #00:15:54-3#

Figura 4. 24: Ejemplo de la vida cotidiana para introducir el tema sobre diagonalización (S820110314G).

Las **clases teóricas** de la **Semana 8** se dedican a introducir herramientas necesarias para el estudio del problema de diagonalización de endomorfismos como: la definición de matrices semejantes, autovectores y autovalores (lunes); la definición del polinomio característico, un lema sobre su grado (martes) y un estudio sobre el aspecto de sus coeficientes (miércoles); el Teorema de Cayley-Hamilton (el miércoles lo enuncia, explica y da una consecuencia para el cálculo de matrices inversas y el jueves lo demuestra). Así el jueves ya están en disposición de entender el problema de diagonalización y G. explica: "*a partir de ahora estudiamos cuándo dos matrices son semejantes, pero simplificamos el problema al de estudiar qué matrices son semejantes a una matriz diagonal*". Y da la definición de matriz *IK*-diagonalizable acompañada de observaciones y ejemplos. Para que entiendan que "*el* *cuerpo va a empezar a importar*" muestra una matriz que es ℂ-diagonalizable pero no *IR*-diagonalizable. Por tanto, las clases de esta semana son muy teóricas y formales, con pocos episodios de estilo semántico y ninguno interesante de visualización (vuelve a haber mucho manejo de representaciones que tienen que ver con los polinomios, los autovalores y con el cambio de punto de vista entre endomorfismos y matrices). La única excepción a esta ausencia de visualización es el ejemplo de la vida cotidiana que utiliza en la introducción del tema sobre diagonalización (ver Figura 4. 24). Este ejemplo se usa para explicar la importancia de la base al expresar una matriz de una aplicación. Como en la introducción a las Aplicaciones Lineales, sirve para activar a los estudiantes y va acompañado de una explicitación simbólica de la relación con lo que se está explicando. Esto no siempre ocurre, a menudo los ejemplos de la vida cotidiana y las metáforas se consideran tan evidentes que no se acompañan de ningún tipo de explicación adicional.

En las **clases prácticas** de la **Semana 8** el martes finalizan los problemas de la *Hoja 8* y el miércoles, comienzan con la *Hoja 9* sobre el Espacio Dual. El martes los estudiantes solicitan retrasar una semana la entrega del "*Problema* 7 con Ampliación". A raíz de éste, un estudiante (Juan) pregunta "*¿lo que hace el Cociente es enviar todo V al cero y el resto se queda igual?*". De este modo surge una conversación sobre el Cociente, en la que intervienen las visualizaciones explicadas en la clase anterior, que detallamos más adelante (ver sección 4.3.1). Ese día resuelven los siguientes problemas:

- el *8.11* (simbólico) sobre propiedades de las aplicaciones lineales definidas en espacios abstractos: B. explica que "*como el lenguaje es abstracto, el problema no puede ir de calcular matrices, si no de usar relaciones de conjuntos y dimensiones*", utiliza un diagrama de conjuntos para recordar y justificar en qué dirección se da un contenido. Cuando pregunta si quieren que lo escriba formalmente "como G." los alumnos responden que no. Entonces Patricia plantea una dificultad, surgida a raíz del apartado *8.11.i)*, que conduce a un pequeño debate sobre la inversa en el que B. se sirve del diagrama para explicar cuándo existe;
- el *8.12* (en tablas numérico, IK^4) donde se pide dar un subespacio cuya dimensión sea mayor que la de su imagen pero menor que la de la preimagen de su imagen: tras estudiar la aplicación a través de su matriz, B. pregunta por ideas y para ayudarles a pensar usa un diagrama de conjuntos, da sentido a la respuesta usando una representación gráfica);
- el *8.14*, lo ven muy por encima;
- el *8.13* (en tablas, sobre polinomios) con el que una alumna (Elena) tenía dificultades: B. explica cómo dar coordenadas a los polinomios y cómo hallar la matriz de la aplicación, usando el diagrama típico; también se ayuda de una representación gráfica para recordar que la unidad tiene tres raíces cúbicas en ℂ.

Al día siguiente, B. sintetiza lo aprendido en la *Hoja 8* y escribe un resumen en la pizarra de la derecha de lo que iban a utilizar del dual en la *Hoja 9*. A pesar de que en varias ocasiones afirma que "*se va a usar de forma más bien mecánica*", da una explicación más conceptual, con un diagrama conjuntista, de los dos puntos de vista –MACRO y MICRO– del dual (De Vleeschouwer & Gueudet-Chartier, 2011). Siguiendo la dinámica de trabajar unos minutos individualmente o en parejas antes de resolver, hacen dos problemas:

- el *9.3* (tablas algebraico, en IK^5), sobre existencia de una base: B. explica los diversos métodos observados entre los estudiantes, manejando con cuidado las diferentes representaciones y explicitando los cambios de punto de vista ("*miro dentro de la aplicación*", "*escribo la matriz de la aplicación*");
- el *9.4* (tablas , en IK^4) sobre coordenadas de una forma: sale David que resuelve usando la matriz del cambio de base y *coord.* para escribir la solución. Después B. resume el proceso y explica otro método haciéndoles ver que las cuentas son las misma que antes pero escritas en columnas en vez de en filas y que por eso hay que trasponer. Noelia plantea dificultades en relación a los vectores de la base dual estándar y con que la base canónica de *IR* sea *1*. B. explica cómo son los elementos del dual con diversas representaciones. Entre ellas destacamos una representación gráfica similar a la de G., el diagrama matricial de la Aplicación Lineal (Figura 4. 21) y una representación gráfica de *IR*.

4.2.1.3 Etapa 3: Tutorías y Paréntesis como Profesora de Prácticas (Semanas 9 a 11)

Después de dos meses de observaciones intensivas de las clases, apenas se obtiene información novedosa de las clases teóricas (como apreciamos en la descripción de las dos últimas semanas) percibiéndose una saturación y convergencia de los datos. Por tanto, decidimos reducir horas de observación (ver Metodología, sección 2.3.2.2).

En las **clases teóricas** de la **Semana 9** terminan el *Tema 12* de los apuntes sobre Jordan[75] (ver Anexos), titulado *Autovalores, Autovectores y Diagonalización* y el jueves comienzan con el *Tema 13*, sobre *Endomorfismos nilpotentes y subespacios invariantes*. Ese día G. pone primero un ejemplo de cálculo de subespacios en $\mathbb{C}^3$, que da lugar a ciertos comentarios de naturaleza geométrica (en relación a los haces de planos y a las rectas invariantes, "*que son los valores propios*"). Después introduce y define los endomorfismos nilpotentes como unos de los más sencillos (además de los diagonales "*que son homotecias por bloques*"). En las **clases prácticas** de esa semana, el martes B. repite una explicación sobre los duales al comienzo de la clase, similar a la del día anterior (aunque incluyendo la interpretación geométrica de las formas como hiperplanos) y resuelve, paso a paso, el *Problema 9.5* sobre Factorización Canónica, la aplicación dual y bases cuyas matrices asociadas sólo tengan *0* y *1* (se apoya todo el tiempo en el diagrama conmutativo típico). El miércoles vuelve a dar clase S. y comienzan con la *Hoja 10* sobre el *Polinomio Característico y Diagonalizabilidad de Endomorfismos*. Comienza explicando qué es diagonalizar (usando la idea de que se repetirá durante toda la clase de que "*una aplicación es una máquina que come vectores y saca vectores*") y, por primera vez desde que se comenzaron las observaciones, S. saca a tres estudiantes a hacer los siguientes problemas: el *10.2* (sale Iker a probar que cualquier endomofismo en IR^2 con determinante negativo es diagonalizable); el *10.5* (sale David a decidir si existe un endomorfismo de IR^4 con dos subespacios propios dados en ecuaciones implícitas, S. dice "*aquí hay algo que os debe oler mal*") y *10.6* (sale Judith a resolver un problema similar al anterior).

[75] El *Bloque III* no se explicó por el Libro de Texto, sino a través de unos apuntes que G. colgó en la página web.

Las **clases teóricas** de la **Semana 10** continuan con el *Tema 13* de los apuntes (ver Anexos) llegando el miércoles a la matriz de Jordan, que se explica de forma constructiva y muy procedimental (con manejo significativo de representaciones para el que resulta útil colocar la base que se iba encontrando diagramáticamente en "*forma trapezoidal*"). Una vez explicado el caso general ven un ejemplo (*13.5i*) de cálculo de una matriz de Jordan para un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$. De las **clases prácticas** del martes la única información que tenemos es que dos estudiantes salieron a hacer los *Problemas 10.9* y *10.11*. El miércoles sólo asisten dos alumnos, cada uno sale a hacer un problema: Ángel sale al *10.13,* sobre cálculo de términos lejanos de una sucesión dependiente de dos elementos (a raíz de una dificultad S. eplicita: *"Lo de antes olía mal; os aprendéis las cosas de memoria, pero sale todo de manera natural de la definición"*); Edu sale al *10.14*, sobre cálculo de subespacios invariantes (lo resuelven de varios métodos, entre ellos uno geométrico razonando por dualidad que se acompaña de una representación gráfica de dos planos perpendiculares).

En las **clases teóricas** de la **Semana 11** ven el *Tema 14* de los apuntes sobre el Teorema de Jordan y la Clasificación de endomorfismos. De hecho, el miércoles la clase comienza con la terminación de la demostración de ese teorema. Le sigue la definición del polinomio mínimo y la demostración de que divide al característico, una explicación constructiva sobre la complexificación de un endomorfismo (para la que utiliza un diagrama de flechas) y una proposición sobre endomorfismos nilpotentes. En las **clases prácticas** pasan a la *Hoja 11* sobre *Formas de Jordan*. El martes hacen el *Problema 11.17*, sobre cálculo de la forma de Jordan de un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ dado por una matriz con parámetros. El miércoles hacen el *11.14*, sobre cálculo de la forma de Jordan de una matriz *3x3* (para calcular una suma de sus potencias) y el *11.2* del que S. dice "*el cambio de base no se puede calcular explícitamente porque es un ejercicio teórico*" (y como tal, formulado de forma simbólica).

4.2.1.4 Etapa 4: Continuación con las Clases de Prácticas (Semanas 12 a 17)

Las **clases teóricas** del miércoles de la **Semana 12** terminan con los apuntes sobre la forma de Jordan (ver Anexos). G. explica lo que faltaba: (1) una observación sin demostración sobre cómo son todos los subespacios invariantes de un endomorfismo, pero según lo escribe se da cuenta de que hay algo mal (lo intenta pensar en el momento pero decide dejarlo para el día siguiente porque "*no les quiere hacer perder el tiempo*"); (2) una proposición sobre las posibles formas de matrices de orden cuatro (utiliza pensamiento diagramático sobre matrices con asteriscos); (3) se salta Jordan real y cuenta dos aplicaciones de las matrices de Jordan (para cálculo de potencias y la descomposición de Gelfand). Para cerrar el tema les comenta un problema abierto sobre endomorfismos semejantes en espacios de dimensión infinita y adelanta algo sobre el Teorema espectral.

Al día siguiente vuelven al libro y "*comienzan de cero*" definiendo las aplicaciones bilineales[76]. La introducción es algo más procedimental que en otras ocasiones. Empieza dando directamente la definición y enseguida explica cómo asociar a cada forma bilineal una matriz, cambiando el orden del libro (así la puede usar en los ejemplos posteriores).

[76] Decidimos asistir a observar también el día siguiente ya que se iba introducir un nuevo tema y queríamos constatar si se utilizaría alguna visualización para dar sentido a los conceptos nuevos, como en introducciones anteriores (por ejemplo la de las Aplicaciones Lineales).

Sin embargo, hay algunos episodios relacionados con el desarrollo de la intuición de este nuevo concepto que vale la pena mencionar: (1) habla de la bilinealidad en términos de "*apareamiento de vectores*" ("*se aparean dos vectores y sale un escalar*" o "*valen las pajas*"); (2) pregunta a los estudiantes por operadores conocidos que hagan algo parecido (y contestan que el producto escalar); (3) compara lo bilineal con lo lineal poniendo varios ejemplos de la vida cotidiana ("*lo lineal es sumar y multiplicar por algo fijo (escalar), lo bilineal es multiplicar; así si se sabe lo que gana un frutero vendiendo 1kg en una hora ¿cuánto ganará trabajando t horas y vendiendo k kg?*"; también recuerda los ejemplos del colegio sobre personas cavando una zanja).

La última **clase de problemas** de S. es el martes de la **Semana 12**. Resuelven el *Problema 11.16*, en el que se pide determinar las formas de Jordan de todos los endomorfismos de $\mathbb{C}^5$ cuyo polinomio característico es uno dado. S. explica que el otro día hicieron problemas más mecánicos pero que "*hoy vamos a ver más qué ocurre*", así que lo cuenta con detalle preguntándoles en ocasiones ("*¿alguien sabe sacar algo que huele mal?*"). La duda de Ángel ("*¿hubiera cambiado si cogemos otra base?*") muestra que las preguntas de los estudiantes son de naturaleza cada vez más matemática. Finalmente S. extiende el problema hallando el polinomio mínimo y les muestra un contraejemplo ($\mathbb{C}^4$) para que se crean que no siempre éste determina unívocamente la forma de Jordan.

Al día siguiente regresa B. a las clases explicando un diagrama que "*a ella le ayuda*" y que quería contarles por si estaban atascados con el otro (ver Figura 4. 31). Para explicar cómo se construye les hace reflexionar sobre la información que determina la matriz de Jordan y con un ejemplo les muestra cómo usarlo. Llama la atención de que "*hay dibujos que no pueden existir*" y les recomienda pensar sobre ello aplicando la teoría. Los estudiantes parecen interesados en el diagrama, pues hacen muchas preguntas a raíz de él. Después pasan a resolver problemas (continúan con la *Hoja 11*). Resuelven el *11.18ii)*, sobre cálculo del polinomio mínimo de una matriz de orden *3* (usa el diagrama). Hacemos notar que en este caso el polinomio mínimo sí determina la forma de Jordan y surgen varias preguntas sobre el espacio ambiente y sobre las restricciones a los núcleos (a las que B. responde con un diagrama de flechas y hablando del "*paisaje*", para referirse al espacio ambiente, y de la "*mesa*", para referirse al subespacio). Después hacen los tres problemas siguientes (el *11.19*, *11.20* y *11.21*), más teóricos. La participación es elevada y lleva, en varias ocasiones a exhibir representaciones y explicitar aspectos relacionados con el manejo de representaciones. Al final de la clase, B. se despide hasta después de Semana Santa ofreciéndose a corregir problemas a la vuelta de vacaciones.

La **Semana 13**, después de Semana Santa, no es posible asistir a observar las **clases teóricas**. Las **clases prácticas** comienzan a trabajar en la *Hoja 12*, sobre *Clasificación de Formas Bilineales*. Como en otras ocasiones, B. escribe un resumen de lo que van a usar en la pizarra de la izquierda. Empiezan con el *Problema 12.1.iii)* que básicamente consiste en aplicar definiciones, aspecto en el que Patricia muestra dificultades. Sale a probar que es bilineal pero al tratar de usar la definición exclama "*no tengo coordenadas*" a lo que B. contesta "*pues creálas*". Ángel sale a calcular la matriz. Cuando surgen dificultades no sólo es B. la que contesta, sino que entre todos intentan resolverlas. Antes de dar la respuesta de los siguientes apartados les pregunta qué opinan. Pasan al *Problema 12.5*, en $IR_2[X]$, donde se describen varias formas de hacer las cosas "*aunque unas son más de AL que otras*".

Al día siguiente, piensan 10 minutos individualmente o en parejas en el *Problema 12.6*, sobre el cálculo de la matriz bilineal de un espacio abstracto de dimensión *3*. Sale Yaser a resolverlo y se da otro camino con el que pueden comprobar. Después B. resuelve el *Problema 12.3*, teórico, sobre formas bilineales degeneradas. Primero lo hace de forma correcta (simbólicamente). Después señala que "*lo que viene ahora es para los 'rayados', si lo habéis entendido así ya estaría el problema resuelto*"y explica cómo lo había pensado inicialmente, de forma errónea. Les pregunta "*¿qué está mal?*". Lo hace un poco deprisa porque se le acaba el tiempo de clase.

En la **Semana 14**, las **clases teóricas** se ocupan del *Tema 17* sobre *Clasificación de Formas Bilineales*. Según el orden del libro, en el tiempo transcurrido desde la última observación debieron explicar cómo diagonalizar formas bilineales. El miércoles G. introduce la Ley de inercia de Sylvester, define la signatura de una forma bilineal de una matriz (dando un ejemplo en IR^3) y explica el Teorema de Clasificación de Formas Bilineales para *IK=IR*. En su demostración juega de forma diagramática con los iguales y las relaciones, como hemos descrito en otras ocasiones. El interés de la clase práctica del martes respecto de la visualización es escaso. Únicamente hacen el *Problema 12.8* que piensan primero individualmente y luego corrigen con Iker en la pizarra. Surge una dificultad y hay que detenerse a explicar las $\varphi(u,\cdot)$ y las formas polares. Al final de la clase se reparten entre los asistentes los apartados del *Problema 12.14*, que resuelven y corrigen al día siguiente situando las respuestas en una tabla. En particular, sale David a explicar su apartado al resto de la clase. En el transcurso de la explicación, Ángel hace una pregunta sobre el cálculo de la matriz de una forma cuadrática que no responde B. sino que lo hace David mostrándole el diagrama con el que él se ayuda para pensar (Figura 4. 25). También surgen dificultades con los conjugados. B. explica que ella intuitivamente ve las formas bilineales como si fueran "*productos escalares raros*" y así piensa los conjugados como "*ortogonales*" y la imagen de un vector consigo mismo como en su norma. Pero advierte de que no deben tomarlo de forma literal. Para que se entienda mejor el proceso de diagonalizar cogiendo conjugados hace una representación gráfica y explicita "*conjugado no es perpendicular, sino que al hacer la imagen de la bilineal dé cero*". Ésta también sirve para resolver dudas. Finalmente explica que diagonalizar una aplicación bilineal se divide en dos pasos (diagonalizar y conseguir *1* y *-1* en la diagonal) y da tres métodos para clasificar. Se hacen preguntas sobre cómo afecta la elección de la base en el resultado.

En la **Semana 15**, con la llegada de los *Espacios Vectoriales Euclídeos* a las **clases teóricas**, vuelven a surgir episodios interesantes de pensamiento geométrico. El *Tema 18* (en que se introduce este nuevo objeto) lo ven rápido, pues el jueves ya llegan a la definición de una norma asociada a un producto escalar y el enunciado y la demostración de propiedades notables (*18.11*) entre las que destacan la desigualdad triangular (que ilustra gráficamente), el Teorema de Pitágoras (del que comenta que, como ellos mismos señalan en su revista, se conocen muchas demostraciones) y la Desigualdad de Cauchy-Schwartz. Ésta última la explica como se la contaron a él. Es diferente al Libro de Texto pero comenta que no se le ha olvidado nunca (es un argumento geométrico basado en la representación de

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz & xt \\ yx & y^2 & yz & yt \\ zx & zy & z^2 & zt \\ tx & ty & tz & t^2 \end{pmatrix}$$

Figura 4. 25: Diagrama para recordar cómo obtener la matriz de una forma cuadrática.

una parábola, pide a los estudiantes que traduzcan de lo geométrico a lo algebraico). Finalmente da varios ejemplos de cómo se aplica en diferentes espacios (integrales, números reales) y explica que para terminar el tema sólo les falta estudiar un problema relacionado con distancias y la proyección ortogonal (que explica sobre una representación gráfica).

En las **clases prácticas** de esa semana aún trabajan en la *Hoja 12* haciendo bastantes problemas del final. El martes trabajan sobre: el *Problema 12.10* (tablas algebraico, sobre clasificar formas bilineales en IK^3; B. expresa los resultados en una tabla que le ayuda a comparar), *el Problema 12.11* (tablas numérico y simbólico, se pide probar que una función es forma bilineal de $M_2(IR)$ y calcular su rango y su signatura; B. lo explica por encima, dejando las cuentas indicadas), el *Problema 12.12* (tablas algebraico, hay que descomponer una forma bilineal de IR^2 en una parte simétrica y otra antisimétrica; B. exhibe la fórmula, explica por qué funciona y la utiliza), el *Problema 12.15* (simbólico, problema teórico; B. señala que como no dan coordenadas hay que usar definiciones y propiedades, pregunta a los estudiantes si este tipo de problemas les parecen más difíciles y responden que sí, surge un pequeño debate sobre qué significa φ inyectiva, sale Ángel a resolverlo por un camino en el que falta demostrar un paso).

El miércoles continúan con: el *Problema 12.15* (B. muestra que el camino de ayer lleva a bloqueo y lo explica de otra forma), el *Problema 12.16* (simbólico, problema teórico; salen dos formas diferentes de probar que algo es suma directa, en el tercer apartado David propone una solución que B. desecha convenciéndole con una representación gráfica que además usan después para razonar), y los problemas sobre formas cuadráticas *12.18* (tablas algebraico, IR^3), *12.19* (tablas algebraico, IR^3; B. dice que lo difícil del problema "*es que hay que traducir*") y *12.20* (simbólico, problema teórico). Una posible razón del elevado número de problemas realizados esta semana es que B. pasa la mayor parte del tiempo en la pizarra. De hecho ella afirma que "*así vamos más rápido*". A pesar de ello, se observa una elevada participación de los estudiantes: proponen soluciones (no siempre válidas pero se aceptan, discuten y rebaten entre todos), piensan en caminos alternativos, hacen preguntas que llevan a discusiones colectivas. Esta dinámica favorece la aparición de visualización.

Las **clases teóricas** de la **Semana 16** comienzan explicando el *Tema 19*, sobre *Endomorfismos de Espacios Vectoriales Euclídeos*, último del curso. El miércoles se exponen algunas observaciones sobre: la expresión de vectores ortogonales en IR^2 (se ayuda para explicarlo de una representación gráfica "*como las del cole*") y el determinante de endomorfismos ortogonales (es *1* o *-1*). De esta última surge la explicación de orientación que pasa por definir primero qué es '*tener la misma orientación*'. Dice que "*es un camino un poco raro*" y para que lo entiendan les pone un ejemplo con lenguaje natural: "*un 'perro verde' no es entre los perros, uno verde, sino que hay que decirlo de corrido*". Formaliza con escritura diagramática (usando asteriscos) que sólo hay dos orientaciones y trata de dar sentido a la palabra '*orientar*' con una explicación gráfica (que combina con escritura algebraica para ayudarlos a responder bien). Concluye: "*orientar es definir un sentido de recorrido*" y utiliza un dibujo rápido para comprobar si han entendido (ver el episodio GEOM de la Figura 4. 34). Finaliza explicando la forma de Jordan real, que se había saltado.

La complementa con una interpretación geométrica: "*lo que se hace es sustituir una recta compleja por un plano real invariante*".

En las **clases prácticas** empiezan con la *Hoja 13*, sobre *Espacios Vectoriales Euclídeos*. B. se muestra preocupada por llegar a los problemas más difíciles (normalmente al final). Divide en tres partes la Hoja de Problema y se propone explicar del *1* al *7* el martes. Pregunta si tienen dificultades (no hay) y explica qué se pide en cada problema para justificar los que va a resolver (uno de cada tipo). El martes hace el *13.1, 13.2, 13.3* y *13.5*, el miércoles el *13.6* y el *13.8*. Los cálculos de bases ortonormales de los problemas *13.1, 13.4* y *13.7* se reparten entre los estudiantes (después sus respuestas escritas se colgarán en Moodle). Al igual que ocurre en las clases de teoría, los problemas de este tema también dan pie a muchas representaciones gráficas y argumentos geométricos. Éstos surgen especialmente en problemas que involucran ortogonalidad, como el *13.5*, el *13.6* o el *13.13* (sobre EVC). También aparece una conversión al registro gráfico para calcular el intervalo en que se verifica una desigualdad (se hace en el *Problema 13.2* y se aprovecha en el *13.3*, donde sólo se dice "*si os acordáis de antes*"). El *Problema 13.13*, sobre un producto escalar definido en un EVC, provoca diversas dificultades a los estudiantes, no se dan cuenta de que tienen que demostrar que la aplicación está bien definida (B. justifica el por qué de esta comprobación con un diagrama de conjuntos y flechas).

En estos episodios se observan aspectos relevantes de la enseñanza de la visualización: (1) obstáculos para representar y explicar gráficamente en tres dimensiones (B. a la vez que dibuja dice expresiones como "*voy a arriesgarme*", "*estoy fastidiada*", "*se ve fatal*" y "*esto al que tenga un poco de imaginación le servirá*"); (2) uso de las representaciones gráficas para ayudar a comprender y apoyar la comunicación, especialmente para responder preguntas de los estudiantes (así B. lo usa para mostrar que suplementario ortogonal sólo hay uno, o David, lo combina con razonamientos algebraicos para responder una pregunta de Yaser); (3) comparación de los argumentos geométricos con los del AL y puesta en valor de estos últimos (B. aprovecha la explicación de David para ello).

Las **clases teóricas** de la **Semana 17** continúan con el *Tema 19*. El miércoles G. enuncia y demuestra el *Teorema espectral*, acompañándolo de dos ejemplos (uno en IR^3 y otro más profundo "*que no podían haber hecho el primer día, lo que demuestra que el curso no es banal*" para el que combina argumentos geométricos y algebraicos sobre un polinomio de grado 5). Le sigue un corolario sobre diagonalización simultánea por congruencia y semejanza y un ejemplo de cómo aplicar esto en la práctica (IR^3). Al día siguiente también asistí a clase, para detallar la teoría que entraba en el Examen. Define la variación de unos coeficientes y demuestra varias propiedades, un lema clave (con manejo significativo de representaciones y uso de pensamiento diagramático para estudiar los cambios de signo) y un corolario.

En las **clases prácticas** siguen con la *Hoja 13*. B. les expone "*que tiene un problema: quedan muchos problemas por hacer y sólo dos semanas de clase*". Los estudiantes le informan de que G. se ha ofrecido a resolver la *Hoja 14*, sobre *Endomorfismos de Espacios Vectoriales Euclídeos* en clase. El martes, la clase es poco interesante en relación al uso de visualizaciones. Sin embargo, es relevante para mostrar elementos relacionados con las normas y el apoyo a la intuición. Estas características podrían explicarse por el carácter de los problemas, más abstracto de lo normal: el *Problema 13.13* (sobre EVC, lo terminan), el *13.9* (simbólico, en M_n(IR)) y el *13.10* (tablas algebraico, con un endomorfismo de *IR*^{n} a *IR*^{5}). Para resolverlos, los estudiantes muestran intuiciones que, como ellos mismos, reconocen no consiguen "*explicar matemáticamente*". B. las recoge, ayuda a formalizarlas y las apoya como frases como: "*suena razonable, nos lo podemos creer por lo que decía Ángel*" o "*bien visto, pero había que justificar mejor*". En cambio, los problemas que se resuelven el miércoles (el *13.11* y por encima el *13.12*) tratan sobre el producto vectorial de *IR*^{3}, y se prestan a usar argumentos geométricos. De hecho, no sólo se prestan si no que, según B., "*viene bien pensar geométricamente*". Y así se lo propone en dos ocasiones a los estudiantes, quienes inicialmente sólo piensan algebraicamente. La dinámica que B. fomenta en clase es: pensar geométricamente, hacerse una idea de si el resultado es cierto o no y utilizar esa intuición geométrica para dar un argumento más formal. Lo resume diciendo: "*tenemos que verlo, creérnoslo y luego explicarlo bien*". La representación gráfica contribuye al avance del pensamiento de los estudiantes ("*¿por qué no puede sacarse uxv de la ecuación del plano*?").

4.2.1.5 Etapa 5: Final de Curso (Semanas 18, 19 y período de exámenes)

Semana 18, última del curso

Las **clases teóricas** de la **Semana 18** comienzan con un breve comentario sobre la regla de Descartes generalizada (explicada con un razonamiento diagramático que también sirve para hacer frente a una respuesta errónea de un estudiante). El resto se dedican a hacer problemas de la *Hoja 14*: del *14.1* al *14.4*, y del *14.14* al *14.19* (dejando sin hacer el *14.12, 14.13* y *14.17*; del *14.5* al *14.11* se cuelgan en internet). El estilo docente de G. con los problemas resulta rutinario, muy similar al de los episodios procedimentales de las explicaciones de teoría (ejemplos y demostraciones). Si hubiera que apuntar alguna diferencia, ésta sería la presencia de aún más comentarios relacionados con la diversidad de modos de pensamiento y con la búsqueda de generalidad: "*aquí se podía haber hecho por semejanza de triángulos, pero me interesa hacerlo de la formas más general posible; así este razonamiento sirve por ejemplo en IR*^{7}"; "*en este caso podría calcular las raíces, pero es menos didáctico*"; "*en esta situación esto no acaba de interesar, porque se pueden dar valores y ya, pero en casos más abstractos sí*". Esta flexibilidad fomentada por G. se ve reforzada con la participación de algunos estudiantes que proponen caminos alternativos o justificaciones complementarias.

El pensamiento geométrico está presente en menor grado del que se podría esperar en problemas que tratan sobre giros, simetrías y descripción geométrica de endomorfismos ortogonales. Únicamente hay dos episodios el lunes, para los *Problemas 14.1* y *14.2*, en los que éste juega un papel importante, aunque no principal (apareciendo subordinado a los razonamientos algebraicos, ya sea para justificar algún paso o para comprobar). En ambos casos se basa en representaciones gráficas. Esto no se observa en el caso de descripción geométrica de endomorfismos, proceso que se define en términos puramente algebraicos: "*describir geométricamente se llama a decidir si es rotación o simetría* [cosa que se decide con un estudio del determinante], *y también hay que decir respecto a qué ángulo o eje* [se calcula de forma algebraica a partir de la matriz]". El pensamiento diagramático aparece este día para interpretar una suma (como "*algo que vive*" en un subespacio más "*algo que vive*" en su complementario), el martes y miércoles para pensar sobre una matriz (dividiéndola en cajas) y el miércoles y jueves en forma de tablas para estudiar los cambios de signo de polinomios. En cuanto a intuiciones, metáforas y ejemplos de la vida cotidiana únicamente el lunes se hace una breve referencia a la idea de la semana anterior sobre los "*perros verdes*" y el martes se describen los productos escalares como "*formas de medir*".

En las **clases prácticas** el martes terminan con la *Hoja 13* y el miércoles resuelven problemas que faltaban por hacer de la *Hoja 14*. El martes son el *13.14* (registro de tablas algebraico en $S_n(IR)$, sobre desigualdades) y el *14.15* (registro de tablas algebraico, en IR^4, sobre cálculo de bases ortogonales). La visualización fue escasa. Únicamente aparece cuando B. habla de "*una recta de matrices*" y les explica con un diagrama cómo calcular y recordar la dimensión de $S_n(IR)$. El miércoles hay un poco más de visualización en torno al *Problema 14.8* (tablas algebraico, sobre una simetría especular). Se corrige a petición de Yaser, que sale a la pizarra. B. explica que se dice simetría especular porque "*es como si el plano fuera un espejo*". Trata de ayudarle a salir de un bloqueo haciéndole pensar geométricamente (con gestos). Éste se para en mitad de las cuentas y muestra un diagrama que suele usar para pensar en los cambios de base. David exclama "*¡esa es buena!*", pero a Yaser le conduce a error (Figura 4. 26). B. dice "*está bien, pero que no te líe*" y explica de nuevo la regla nemotécnica. Hay otro par de breves episodios de pensamiento geométrico en el *Problema 14.12* (tablas, sobre productos escalares y bases ortonormales en IR^3; una dificultad de Ángel lleva a Blanca a explicar apoyándose en una representación gráfica "*una vez tengo la dirección da igual coger un vector o su proporcional*") y el *14.13* (tablas algebraico, sobre sucesiones; donde la representación gráfica sirve para ver qué potencia de M es la identidad). El resto de episodios de clase repiten las características de otras veces: elevada participación, explicitación del manejo de representaciones y de aspectos META, y fomento de la flexibilidad explicando diversos métodos de resolución y formas de pensamiento.

$$B = \{\underbrace{u_1, u_2}_{H}, \underbrace{u_3}_{H\perp}\}; \quad M = M_f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} B & \leftrightarrow & M & \leftrightarrow & B \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ \epsilon & \leftrightarrow & M' & \leftrightarrow & \epsilon \end{array}$$

Figura 4. 26: Diagrama para recordar la fórmula del cambio de base.

Semana 19, Tutoría Final

El miércoles de la semana siguiente, la profesora B. ofrece una tutoría para repasar los contenidos del curso y dar la oportunidad a los estudiantes de preguntar sus dudas antes de los exámenes. Asisten unos 13 estudiantes[77]. Se acuerda con ellos la estructura de la tutoría de dos horas de duración: la primera hora se dedicará a trabajar en una actividad diseñada por B. para la ocasión (ver el diseño de la "*Actividades de reflexión y autoevaluación*" en la sección 2.4.3.1 y el enunciado en los Anexos); y la segunda a las dudas de los estudiantes. B. reparte la actividad y comienzan a trabajar en ella. Los estudiantes tienen dudas sobre cómo realizarla y avanzan muy despacio, llevando a alguno a expresar aburrimiento y frustración. Tras 30 minutos casi nadie ha pasado de la mitad de la primera pregunta. B. les pide que rellenen la parte final (de reflexión sobre la pregunta) y empieza la puesta en común en la pizarra de las soluciones de los cuatro primeros apartados. B. encuentra bastante dificultad en las explicaciones con las representaciones

[77] Se planteó como una actividad abierta al Gran Grupo, pero salvo tres o cuatro, la mayoría habían formado parte en algún momento del Grupo de Prácticas

gráficas. La comunicación con los estudiantes tampoco es sencilla, haciéndose patente la necesidad de crear un lenguaje común para referirse a ellas ("*la punta de la casa*", "*el lado sin puerta*"), a veces muy vago ("*así como ladeada*"). Motivada por la duda de un estudiante, B. comienza un repaso más tradicional de la asignatura. La actividad se retoma por la pregunta 6, sobre la diversidad de puntos de vista de una matriz simétrica (ver Anexos), para explicar en qué consiste la diagonalización simultánea por semejanza y congruencia. Como es tarde, se corrige rápidamente y se resuelven dudas que, en general, son muy procedimentales.

Período de exámenes

Ocho días después es el segundo Examen Parcial y, un par de semanas más tarde, el Examen Final. En este último, fruto de la colaboración con G., se introdujo una cuestión sobre visualización cuyos resultados se detallan más adelante (ver sección 4.2.4.2).

4.2.2 Observaciones generales y factores influyentes en la enseñanza de la visualización

La visión de conjunto que ofrece esta narrativa permite detectar algunos aspectos y factores generales influyentes en la enseñanza de la visualización. Para ello, se formulan preguntas básicas como: cuándo, cuánto, qué, quién, dónde, cómo y por qué.

4.2.2.1 ¿CUÁNDO y CUÁNTO se usa la visualización en clase?

La visualización aparece a lo largo de todo el curso. No se concentra puntualmente en determinados momentos, sino que ocurre de forma *transversal*, adaptándose a los diferentes contenidos matemáticos tratados. Si focalizamos en una *unidad concreta* o una *hoja de problemas*, vemos que no se puede generalizar una temporalización (no se puede afirmar en qué momento hay más visualización, si al principio, a mitad o al final de los temas). En el inicio de algunas unidades (por ejemplo, *la 9, la 10 o la 16*; ver Figura 4. 13) se observa una concentración notable de visualizaciones. Pero en general, más que del aspecto temporal, la aparición de la visualización depende de los contenidos, del propósito y del estilo docente. Si nos centramos en las *horas de clase,* observamos al final un número ligeramente mayor de visualizaciones. A menudo, tras haber explicado alguna demostración o concepto, G. concluye con una metáfora o un diagrama que resuma el proceso seguido o la idea principal que trata de comunicar. Sin embargo, las clases de problemas son diferentes, porque dependen básicamente de las partes del proceso de resolución.

	Días	**Características**
Más	S420110217G	GEOM para ver los subespacios como intersecciones de hiperplanos; INT para asociar la codimensión con el número de restricciones; FLEX, GEOM, DIAG para motivar el Cociente con el ejemplo de la parametrización de la circunferencia, REPR para definir el Cociente, GEOM para interpretarlo gráficamente, DIAG para explicar cómo se le dota de estructura de Espacio Vectorial, REPR con explicación de las igualdades y una distribución favorable para demostrar.
	S620110228G	GEOM e INT en relación a otras ramas de las Matemáticas para explicar los espacios isomorfos; DIAG, INT, COM para explicar el diagrama de la Factorización Canónica; REPR para las comprobaciones y la formalización.
	S620110301G	DIAG para el ejemplo de la aplicación de la Factorización Canónica; FLEX, INT para ayudar a intuir cómo se comportan las factorizaciones, INT para conectar con una demostración similar anterior; GEOM, FLEX, REPR y COM para las proyecciones y simetrías.
	S1620110518G	REPR, COM, GEOM para explicar cómo es un vector ortogonal en IR^2; INT, DIAG, GEOM, REPR y COM para explicar qué es tener la misma orientación y comprobar si han entendido.
	S620110302B	DiAG para explicar las diferencias entre el lenguaje conjuntista y el de espacios vectoriales, GEOM e INT para dar sentido al Cociente; REPR y GEOM para decidir si algo es aplicación lineal o no.
	S820110315B	GEOM e INT para dar sentido al Cociente, DIAG para probar un contenido de conjuntos, DIAG y GEOM para dar sentido, resolver y justificar el problema, GEOM para recordar cuáles son las raíces cúbicas complejas de la unidad.
	S1620110518B	COM para explicar qué hacen las proyecciones, DIAG sobre la Matriz de la Aplicación Lineal, GEOM la usa un estudiante para resolver la duda de un compañero y B. la usa para poner en valor el AL frente a la Geometría, INT para dar sentido a los productos escalares y a la proyección canónica, DIAG para justificar por qué hay que comprobar que la aplicación está bien definida y GEOM con espacios ortogonales para justificar y que se crean el argumento simbólico.

Menos	S820110315,16, 17	REPR para definir polinomio característico, estudiar su aspecto, enunciar y demostrar el Teorema de Cayley-Hamilton.
	S1120110407S	REPR para calcular la matriz de Jordan y la base correspondiente.

Figura 4. 27: Relación de días con más y menos episodios de visualización y sus características.

Complementario a este análisis hemos realizado uno sobre los *días* en que hay menos visualización (ver Figura 4. 27), considerando tanto la cantidad como la diversidad. Así, aunque haya un día con muchos episodios del mismo tipo (como ocurre con REPR en el tema del dual) éste se considera con menos visualización que un día donde haya más diversidad (como cualquiera de los escogidos). A grandes rasgos se observa que las características de los días que hay más visualización son mucho más diversas que los días en que hay menos, donde éstas se resumen fácilmente: días de explicaciones formales muy procedimentales. Por tanto, aunque se puede encontrar visualización a lo largo de todo el curso, la cantidad y diversidad de la misma es variable. La respuesta a las preguntas que se plantean a continuación ayudará a precisar qué aspectos influyen en esa variación.

4.2.2.2 ¿QUÉ se enseña influye en el uso de visualización en clase?

El *contenido* afecta tanto a la cantidad como al tipo de visualización utilizada en clase. Así lo evidencia una revisión del uso de la visualización por *bloques* de contenido. El *Bloque IV* es rico en episodios de pensamiento geométrico (especialmente el tema de Espacios Euclídeos). Por el contrario el *Bloque III* es muy pobre en visualizaciones, la mayoría de episodios registrados son en torno a la explicitación de aspectos relacionados con el manejo de representaciones o de pensamiento diagramático. El *Bloque II* es el que presenta mayor diversidad, hecho relacionado con la diversidad de contenidos que involucra. Un análisis más detallado de este bloque pone de manifiesto que también puede haber gran diversidad entre *unidades* dentro de un mismo bloque. Por ejemplo, el tema de operaciones de subespacios es rico en pensamiento geométrico. En el inicio de las aplicaciones lineales aparecen diversidad de episodios que tienen como objetivo ayudar a los estudiantes a construir imágenes mentales ricas del concepto que se está introduciendo de Aplicación Lineal, mientras que al final de ese tema aparecen numerosos diagramas (especialmente en relación a la Factorización Canónica). La Unidad sobre el Espacio Dual es muy rica en torno a la explicitación del uso de representaciones. Finalmente, en temas con diversidad de *conceptos* (como el de operaciones con subespacios) también se observa variación. El concepto que más diversidad de visualizaciones concentró a lo largo de todo el curso es de los EVC y por eso, entre otras razones, nos centramos en él (ver Capítulo 4.3).

4.2.2.3 ¿QUIÉN enseña o aprende influye en el uso de visualización en clase?

Debido al formato DTD de las clases teóricas, la mayoría de visualizaciones que aparecen en ellas surgen de los **profesores**. A pesar de ello, la interacción con los alumnos es un factor influyente en cómo se explica la visualización. En particular, sus dificultades a menudo conducen a una mayor explicitación de la misma. Así pues, si hay interacción con los **estudiantes**, el uso que se hace la visualización en clase también depende de ellos. Esto resulta aún más evidente en las clases prácticas, donde se fomentó una mayor participación de los estudiantes. De hecho, hubo al menos cuatro ocasiones en que ellos mismos generaron de forma espontánea visualizaciones (una de tipo geométrico y tres diagramático). A pesar de estos ejemplos, se cumple que la mayoría de visualización es incitada por los profesores de prácticas.

Es difícil evaluar con los datos obtenidos hasta dónde llega la influencia del agente sobre el uso de la visualización. Es cierto que se han observado un total de cuatro profesores diferentes enseñando (algunos de ellos durante un largo período de tiempo), pero el hecho de que éstos casi nunca enseñen los mismos contenidos hace difícil la comparación. Así ocurre por ejemplo en Unidad sobre Espacios Duales, donde se plantea la duda de si la causa de un mayor énfasis en el manejo de representaciones era el contenido o la diferencia de profesores. En aquel caso, se consideró que esa era una característica fomentada por el tema. En otras ocasiones, la influencia de quien explica se hace más evidente. Por ejemplo, tanto el profesor S. como la profesora B. explicaron el cálculo de la matriz de Jordan. El primero lo hizo de forma simbólica mientras que la segunda utiliza un diagrama, argumentando que "*a mí este diagrama me ayuda y lo quería contar por si estabais atascados con lo otro*". Por tanto, se evidencia que los profesores deciden incluir más o menos visualización en relación a su experiencia con las Matemáticas, su perfil visualizador, y su visión de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Así, aunque no haya más episodios donde resulte posible una comparación directa, se pueden establecer aspectos personales de los profesores que ayuden a caracterizar, explicar y distinguir el uso que éstos hacen de la visualización en clase. Por ejemplo, el profesor G. considera importante enseñar a pensar matemáticamente a sus estudiantes. Esto le lleva a dedicar mucho esfuerzo en sus clases a los comentarios tipo META, y entre ellos surgen metáforas y ejemplos de la vida cotidiana interesantes. Sin embargo no tiene clara la utilidad de las representaciones gráficas en AL, por lo que hace éstas sólo de vez en cuando y siempre las acompaña de mensajes contradictorios sobre su uso (Figura 4. 43). Como se siente poco capaz de dibujar, y en particular de representar en IR^3, la mayoría de representaciones gráficas son en IR^2 o explicadas con gestos. Como algebrista que es, junto a los profesores S. y J., tiene la preocupación de que sus estudiantes comprendan bien la notación y utilicen adecuadamente el lenguaje algebraico,por eso se esfuerza en aclarar el manejo de representaciones (especialmente en los registros de tablas y simbólico). En contraste, la profesora B. está más preocupada por las ideas y los métodos que por las cuentas. Se esfuerza por dar sentido tanto a los problemas que resuelven en clase como a los conceptos que involucran, incluyendo numerosas representaciones geométricas y diagramáticas.

4.2.2.4 ¿DÓNDE se enseña influye en el uso de visualización?

La enseñanza de la visualización es diferente en las clases *teóricas* que en las *prácticas*. Estas diferencias pueden estar motivadas por la diversidad del profesorado, tal y como se acaba de describir, pero también por la distinta actividad que se realiza en unas y otras. En las *clases teóricas*, donde se introducen nuevos conceptos, hay más espacio para las motivaciones y los ejemplos geométricos, la construcción de imágenes mentales a través de metáforas y ejemplos de la vida cotidiana, las explicaciones de notación o la introducción de nuevas representaciones. En contraste, el fin de las *clases prácticas* es resolver problemas. Esto supone explicaciones menos conceptuales donde es raro encontrar los elementos anteriores, especialmente metáforas y ejemplos de la vida cotidiana (aunque a veces hay excepciones, normalmente motivadas por las dificultades de los estudiantes con algún concepto involucrado en la resolución del problema). La visualización juega un papel más heurístico en estas clases: una intuición puede servir como fuente de inspiración para conjeturar soluciones, una reflexión sobre las representaciones del enunciado puede dar pistas para su solución, el pensamiento geométrico puede ayudar a hacerse una idea o dar sentido de lo que ocurre o incluso puede servir como argumento en medio de un debate, un diagrama puede usarse para resumir el proceso de resolución seguido. Este diferente uso de la visualización que acabamos de describir tiene mucho que ver con el cómo se enseña, que se discute a continuación.

4.2.2.5 ¿CÓMO se enseña influye en el uso de visualización en clase?

No se enseña igual cuando se motiva una definición, cuando se explica su enunciado o cuando se demuestra una proposición en torno a ella. Estos diferentes modos de enseñanza están recogidos en los diferentes *estilos docentes*: lógico-estructural, procedimental o semántico. Tampoco se enseña igual si se está haciendo una exposición de un tema o si se quiere que los estudiantes conjeturen un resultado, pues en la primera situación no hay *participación* de los estudiantes y en la segunda sí (ver sección 4.2.4.1, Primer Principio de Diseño). Los datos recogidos durante la Fase II corroboran las observaciones realizadas en el Estudio Inicial en torno al uso de la visualización en relación al estilo docente (ver sección 4.1.2.3): las visualizaciones más ricas se dan en los episodios de *estilo semántico*, aunque con un nivel de explicitación limitado; éste es mayor en los episodios de visualización dentro del *estilo procedimental*, donde ésta se traduce en el manejo cuidadoso de representaciones o pensamiento diagramático; en los episodios *lógico-estructurales* es donde hay menos visualización, pero a veces este hecho pasa desapercibido al aparecer intercalados ejemplos (a menudo geométricos) o comentarios con los que se les intenta dar sentido.

4.2.2.6 ¿POR QUÉ se usa visualización en clase?

A su vez, el cómo se enseña está estrechamente relacionado con el por qué se enseña. Si se quiere ayudar a comprender, motivar o dar sentido a un concepto se emplea un estilo semántico. Para demostrar, poner un ejemplo de cálculo o comprobar si una cuenta es correcta se utiliza uno procedimental. Para enunciar una definición o formalizar un resultado se utiliza un estilo lógico-estructural. Las *motivaciones* y *propósitos* docentes que se plantee el profesor en cada momento influyen en sus acciones y, en particular, en el uso y la enseñanza de la visualización. Al mismo tiempo hay también *obstáculos* que hacen que ésta se evite en clase. Aunque en la sección siguiente reflexionamos con más detalle sobre las motivaciones y propósitos para cada tipo de visualización, en la Figura 4. 28 se ofrece un resumen general de las razones para visualizar (posibilidades) y para no visualizar (obstáculos) observados en el curso.

Posibilidades	**Obstáculos**
Son útiles para… Ayudar a la comprensión (conjuntos, S820110315B). Explicar conceptos difíciles (como EVC, S620110228G). Explicitar ideas o procesos tipo META (*'coord.'*, S220110125G). Explicar o guiar manejo de representaciones (matrices, S220110125G; Jordan, S1220110413B). Ayudar a la memoria (S1820110601B). Relacionar con conocimiento previo (S220110124G). Justificar un resultado (S120110118G) o la necesidad de una demostración (bien definida, S1620110518B). Convencer de la falsedad o veracidad de algo mediante algún ejemplo concreto (S1201101217G). Complementar un argumento simbólico (S1520110512G). Motivar una definición (Parametrización S^1, 420110217G). Dar sentido, concretar (S820110315B). Hacerse una idea de qué ocurre y razonar (S420110206B). Sintetizar información (árbol, S220110127G) y explicitar relaciones (S120110118S). Ayudar a salir de un bloqueo (S620110301B). Resolver problemas (S1720110525B). Comprobar (S1820110530G). Resolver preguntas de los estudiantes (inversa S820110315B, producto vectorial (S1720110525B) y ver si están entendiendo (S420110214G). Facilitar la comunicación (N., S420110215B) y la participación de los estudiantes (S620110302G).	Hay conceptos difíciles de imaginar (IK^1, S220110124G; EVC, S520110223B). Algunos ejemplos visuales son demasiado pobres o triviales (S120110118G) o no se usan (S320110201G). Es difícil explicar visualización: "*No sé más visualización*" (proyecciones, S620110301G); "*esto no sé si os está liando*" (S620110301B), "*me arriesgo*" (S1620110517B); "*si dibujo no va a quedar más claro que si lo hago con las manos*" (en IR^3,S320110201G); "*no dibujo porque no lo hago bien*" (S420110216G) y lleva tiempo (S320110201G). Hace falta más conocimiento para visualizar (S320110201G; S1820110530G; S1620110518G). Imágenes engañosas (EVC, S420110217G; (S520110222B; S620110301B). El pensamiento intuitivo o concreto puede ser una limitación (S420110215B; S420110215B) o causar dificultades a los estudiantes (S520110223B). Falta de conocimiento previo con el que establecer conexiones (S320110201G; S520110221G). Son muchos estudiantes en clase con diferentes niveles (y estilos) y es difícil adaptarse a todos (S220110126G; S320110201G; S420110215G). Falta de estudio de los estudiantes (S720110308B). Visión institucional sobre la visualización limitante (S420110215B); "es cosa del colegio" (S420110217G; S1620110518G; S1820110601G); los estudiantes la esconden (S520110223B) o no entienden lo que se les pide si es visual (S520110223B).

Figura 4. 28: Posibilidades y obstáculos observados en el curso en torno a la enseñanza de la visualización.

4.2.3 Temas y modelos en la enseñanza de la visualización

En la narrativa anterior hemos seguido un orden cronológico que ha ayudado a situar los principales acontecimientos en el desarrollo del curso y a detectar factores influyentes en la enseñanza de la visualización, como son: los contenidos; los agentes; el propósito y el estilo docente; la cultura y las prácticas de clase. En esta sección analizamos los datos desde una perspectiva diferente –transversal– con objeto de determinar patrones de enseñanza de visualización y de identificar qué tipo de prácticas de clase resultan más adecuadas. La revisión conjunta de todos los episodios etiquetados bajo el mismo código permite establecer categorías de modelos de visualización. Mediante la identificación de temas se describen las formas de uso, observadas en clase, de cada uno de ellos. Para sintetizarlos se emplean tablas con referencias explícitas a los datos, que deben tomarse como ejemplos de los temas y no como una lista exhaustiva de todas las apariciones de éstos. La clasificación final no es excluyente (de hecho hay referencias cruzadas entre temas de diferentes modelos). En particular se presta atención a: cómo y por qué suelen surgir en clase (circunstancias y propósitos de cada modelo); cómo se explican y comunican a los estudiantes (explicitación); qué relación tienen con las dificultades de los estudiantes y si se han observado obstáculos en su enseñanza (dificultades y obstáculos del modelo).

4.2.3.1 Uso y Enseñanza de los Diferentes Modelos de Visualización

(REPR) Manejo y Coordinación de Representaciones; énfasis en su explicitación

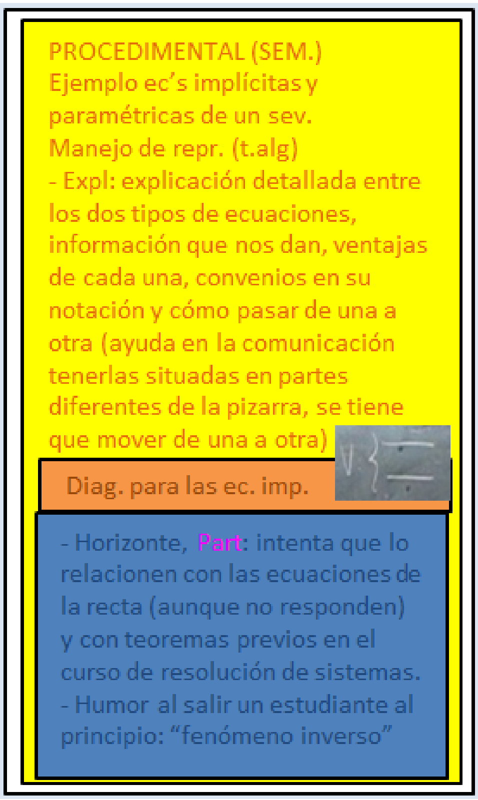


Figura 4. 29: Ejemplo de episodio tipo REPR (S120110119G). Este episodio se ha clasificado como REPR porque tanto el contenido (ecuaciones implícitas y paramétricas de un subespacio) como las acciones de enseñanza en torno a él prestan una atención importante al manejo de representaciones (en el registro de tablas) y a su explicitación. Como es habitual aparece mezclado con otros tipos de visualización, en este caso: un diagrama para explicitar el aspecto de las ecuaciones implícitas y comentarios de tipo EDU.

Esta categoría sirve para referir episodios de clase donde predomina un manejo de representaciones. Hace referencia especialmente a los registros simbólicos o de tablas (el manejo de representaciones gráficas suele ir asociado al pensamiento geométrico y por tanto se engloba en GEOM). Hemos prestado especial atención al modo en que se realiza el manejo de representaciones pero sobre todo a cómo éste se hace explícito a los estudiantes (usando el código "Expl"). Según avanzamos en el análisis, fueron emergiendo características comunes de este tipo de episodios que afectó al método de codificación[78]. En la Figura 4. 29 se observa un ejemplo de este tipo de episodio.

Los episodios del tipo REPR son los más frecuentes, después de los de tipo EDU. La razón principal de este hecho es que el manejo de representaciones, en registro de tablas o simbólico, es característico de los episodios de enseñanza más formales y éstos abundan en el curso: tanto dentro del estilo *lógico-estructural*, para enunciar resultados, aclarar notaciones o presentar representaciones equivalentes; como dentro de los *procedimentales*, para explicar los pasos técnicos de una demostración o para enseñar algún ejemplo de aplicación de la teoría. Otra razón que también motiva este tipo de episodios es la interacción con los estudiantes. A través de sus preguntas y dificultades a menudo surgen episodios de explicitación del manejo de representaciones (esto se observa principalmente en las clases de problemas o cuando no responden a una pregunta de G. en las clases de teoría).

La tabla de la Figura 4. 30 recoge los temas de los episodios de tipo REPR, que sirven para describir la forma de uso de este modelo (se pueden contrastar con las características observadas en el manejo de representaciones en las explicaciones de clase, ver Semana 8). Todos ellos hacen referencia al manejo de representaciones en sí, salvo el último que refiere un propósito para el que se usan las representaciones. Tal y como indican los datos, el curso presta bastante atención al manejo de representaciones, haciendo explícitos elementos importantes para su aprendizaje. Sin embargo, los estudiantes tienen muchas dificultades en relación a las representaciones (ver Figura 4. 45), algunas relacionadas con la notación y con una falta de comprensión que deriva en un aprendizaje memorístico y mecánico (en coherencia con los resultados del Estudio Exploratorio, ver sección 4.1.3). Por tanto, se observa una *paradoja existente en la explicitación y comunicación de representaciones* que consiste en lo siguiente: sabemos que la falta de explicitación del manejo de representaciones dificulta la comprensión de los conceptos (Hillel, 2000); pero al mismo tiempo, estar continuamente explicitando dicho manejo puede suponer un nuevo obstáculo para los estudiantes. Por ejemplo, esta paradoja se hace patente en las diferentes posturas que toma el profesor G. y el Libro de Texto en torno a la aplicación "*coord*" (Figura 4. 16). Como averiguamos mediante con una conversación con este profesor, el primero la usa continuamente porque considera que ayuda a aclarar y distinguir conceptos matemáticos; mientras que en el Libro de Texto se omite en los razonamientos matemáticos para no dificultar a los estudiantes con nueva notación.

[78] Es habitual encontrar en el póster la expresión "*manejo habitual/usual de representaciones*", seguida de una aclaración entre paréntesis de aspectos relevantes de las representaciones (como el registro, que si no se pone nada se debe presuponer que se está trabajando en el registro simbólico o el espacio en el que se trabaja). Además, se terminaron incluyendo en los cuadros amarillos los comentarios de tipo EDU (como DIF o aspectos de tipo META) que hacían referencia a algún aspecto relacionado con las representaciones (explicando el aparente descenso de episodios EDU en el póster).

TEMA	**DESCRIPCIÓN YEJEMPLOS**
Manejo de representaciones (de tablas y simbólicas)	Acciones desarrolladas sobre las representaciones sin ningún tipo de explicación adicional: Dar nombres (S220110126G), calcular determinantes (S220110126S), demostrar por reducción al absurdo basándose en la equivalencia de dos representaciones (S220110124G), tomar coordenadas (S220110126G), paso de ecuaciones implícitas a paramétricas (S920110323S), etc.
Guías para la interpretación y la conducta de abducción	Comentarios complementarios con los que se quiere ayudar a los estudiantes a centrar la atención en elementos y relaciones relevantes: Preguntas como "*¿cuáles son las incógnitas?*" (S320110131G) o "*¿Observáis algo de estas condiciones? Son lineales*" (S220110126S); explicitar relaciones o conexiones que deben surgir en la cabeza como "*si te dan un subespacio como espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones ya puedes decirme la dimensión sin tener una base*". (S220110127G) o "*el lenguaje del enunciado es abstracto así que no va a ir de calcular matrices, si no de usar relaciones de conjuntos y dimensiones*" (S820110315B).
Elección de representaciones adecuadas	Explicitación del aspecto deseable de las representaciones: Descripción de objetos que "*tienen buena pinta*" (matrices triangulares o con muchos 0, S120110119S); alusión a "*representaciones fetén*" (S220110127G); advertencias de abusos de notación (S320110201S); comparar notaciones con metáforas (EVC, S1620110518B).
Explicación de notación	Comentarios que ayudan a interpretar una nueva notación: Con gestos (las barras del determinante, S120110119S); con metáforas y humor (suma directa, mirilla y hace gesto de disparar, S420110216G); acuerdos con los estudiantes (f_A, con las traspuestas, S520110222G).
Explicación y explicitación del manejo de representaciones (a menudo derivadas de la interación con los estudiantes)	Comentarios explicativos de convenciones y de las acciones realizadas sobre las representaciones: Repaso de reglas como las de los determinantes (S320110203S); distinción de los datos, uso de huecos que rellena (S520110221G); consejos y convenciones como "*La disposición en matriz ayuda más a reconocer las dependencias que las ec's*[…]*en la práctica nadie pone los cuantificadores*" (S320110131G); ideas intuitivas para explicar manipulación de matrices (S220110125G) o con el zoom (S420110216B), uso de una representación gráfica como puente entre lo geométrico y lo algebraico (S320110201G); indicaciones en los = o las ⇒ (S420110215G); explicitaciones como "*Estoy razonando por columnas en vez de filas*" (S220110124G); reglas nemotécnicas (S620110302G); analogías con cosas conocidas (S1320110426B).
Comparación y conexión de representaciones	Acciones dirigidas a que los estudiantes vean similitudes y diferencias entre representaciones: Distinción de operaciones según espacio ambiente (S420110216B); con preguntas *("¿sabéis por qué no he puesto *?"*,S220110125S); generalización de representaciones (de las aplicaciones lineales de IR a IR^n, S520110222G); relación de conjugación de matrices (S620110303G); la matriz de las formas y sus coordenadas (S720110308J).
Explicitación de traducciones y conversiones	Comentarios que ayudan a conectar repr. o ideas: Conexiones: "intersecar es concatenar ecuaciones(S420110214G); META: reducir problemas a matrices (S220110124G); uso de frases como "*traducimos*"(S220110126S), "*dicho de palabra*" (S520110223G).
Reflexión sobre el manejo de representaciones	Comentarios tipo META sobre el manejo de representaciones: Preguntas que incitan a la reflexión "¿Qué hace a IK^n tan amable?" (S220110124G); META: "Esto te enseña que no te tienes que preocupar de qué base elegir. (S220110126G); analogías con cosas conocidas (S620110302G); extraer conclusiones de un problema: "las paramétricas dan fácil implícitas del ortogonal y viceversa (S1620110517B).
Uso de representaciones para explicitar ideas matemáticas	En ocasiones, introducir una nueva representación o notación ayuda a explicitar ideas: la aplicación *coord.* formaliza la idea, explicada con un diagrama, de viajar de un sitio a otro (S220110125G), además sirve para distinguir el vector de sus coordenadas (S620110302G) , uso de letras diferentes para el caso en que un conjunto sea finito o infinito (S420110214G), los subíndices ayudan a distinguir el espacio ambiente ($f(0_E)=0_F$) (S520110221G).

Figura 4. 30: Temas surgidos en los episodios REPR ordenados según el grado de dificultad y explicitación en el manejo de representaciones.

(DIAG) Pensamiento Diagramático o Uso de Diagramas; útiles para explicitar ideas y procesos

En el inicio del análisis esta categoría se utilizó para marcar episodios de pensamiento diagramático entendido en el sentido de Dörfler (ver sección 3.2.2.2). Pero empleado así quedaba poco diferenciado del anterior, salvo en contadas excepciones donde este tipo de pensamiento se mostraba de forma clara (como en la interpretación diagramática de expresiones algebraicas o de matrices. Por tanto, el código se redefinió para referir episodios de visualización diagramática en el sentido de Miguel de Guzmán (ver Figura 3. 25), es decir, episodios en los que "*los objetos mentales y sus relaciones, en los aspectos que interesen, sean meramente simbolizados de manera que los diagramas así obtenidos ayuden en los procesos de pensamiento alrededor de ellos* (Guzmán, 1996, p. 26)".

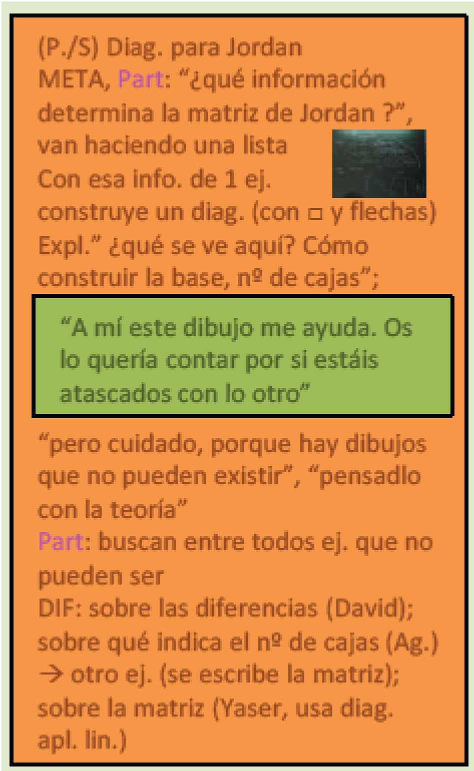


Figura 4. 31: Ejemplo de episodio tipo DIAG (S1220110413B). Se ha clasificado como DIAG porque trata explícitamente sobre la enseñanza de un diagrama como herramienta útil para calcular la matriz de Jordan y guiar en la construcción de la base asociada. Este episodio muestra que los diagramas son útiles para sintetizar información, resumir procesos, comunicar ideas de tipo META y, en definitiva, ayudar al pensamiento. B. trata de explicitar esta idea a sus estudiantes (con un mensaje que aparece encuadrado en verde).

El uso de diagramas surge principalmente en los episodios procedimentales. A menudo aparece en estrecha relación con los episodios de tipo REPR. Es habitual que el manejo de representaciones se haga con una configuración determinada que ayuda a ver mejor las relaciones entre los elementos representados (como los juegos de iguales e implicaciones o las tablas). En otras ocasiones un diagrama resulta de ayuda para recordar alguna cosa (como el orden en la fórmula del cambio de base). El pensamiento diagramático es especialmente frecuente en el manejo de matrices y en las situaciones que involucran diagramas conmutativos. Un uso menos procedimental de los diagramas aparece en algunos episodios de tipo META, para explicitar o sintetizar algún proceso de pensamiento abstracto. Por ejemplo, la idea de viajar de un sitio desconocido a otro conocido (S220110125G, Figura 4. 16) o el transporte de estructura (S420110217G, Figura 4. 58; S520110224G). En las clases prácticas, se emplean para ayudar a los estudiantes a hacerse una idea (S420110226B, Figura 4. 19). Hay pocos episodios donde los diagramas aparezcan de forma autónoma como un contenido aislado. Destacamos el de la Figura 4. 31 en relación a la matriz de Jordan y el de la Factorización Canónica (S620110228G).

TEMA	**DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS**
Juegos de implicaciones o igualdades	Disposición favorable para establecer relaciones entre los elementos representados: Juegos de implicaciones para resolver problemas (S120110118S) o demostrar (S220110124G); Juegos de igualdades en resolución de problemas (desarrollando sus miembros por separados, denotados con Δ, ⊗, (S220110125S) y demostraciones (S1420110504G); Manejo de expresiones como un bloque (entre corchetes) que se puede traducir e incluso sumar (S320110201G).
Razonamientos con matrices	Manejo de matrices atendiendo sobre todo a su forma: Fijarse en una fila o columna de una matriz y razonar sobre ella (S120110129S), ayudándose de [ ] (S520110224G) de otros elementos como □, ○, Δ (S720110307J); Matriz de la Aplicación Lineal, se introduce diciendo "*gráficamente*" y se da qué va en cada columna (S620110302G); cuando no interesan o se conocen todas las entradas se usa * para razonar (Jordan, S1220110412G), una alumna lo usa para explicar su idea de solución (S420110215B); cajas (S21820110531G).
Diagramas de flechas y conmutativos	Introducción de este tipo de diagramas (como una notación más del curso) que suelen incluir espacios y relaciones (aplicaciones) entre ellos: Construcción detallada y explicada con metáforas y otros diagramas (tipo ilustración) de la Factorización Canónica y explicación de qué es diagrama conmutativo (con dibujos y símbolos nuevos, ↻) (S620110228G); traducción y valoración positiva de este tipo de diagramas "*de palabra es más largo*" (S620110301G); base para sintetizar información, hacer preguntas a los estudiantes y pensar (S620110302, 03G).
Diagramas de conjuntos	Parecidos a los diagramas de Venn, expresan relaciones de contenidos en conjuntos: Idea de subespacio, *Problema 2* del Examen (S420110216B); problema teórico sobre relaciones de conjuntos (S820110315B); Diagrama de Jordan (S1220110413B) ; mezclado con flechas, para justificar la demostración de que está bien definida (S1620110518B).
Pensamiento diagramático	Acepción de Dörfler: los símbolos se manipulan diagramáticamente, atendiendo más a sus reglas que a su significado: Darse cuenta que *x* e *y* son intercambiables en una expresión (S220110125S); interpretar una suma como "*algo más su ortogonal*" (S1820110530G); para calcular los cambios de signo de los coeficientes de un polinomio, a veces con ayuda de * (S1820110530G).
Tablas o cuadros	Ayudan a sintetizar información, compararla, etc.: Qué pide y resultados del problema (S520110222B); tarea reflexión (S520110222B); comparación lenguajes (S520110223B).

Figura 4. 32: Temas surgidos en torno a las formas de uso de la visualización en los episodios DIAG, ordenados según frecuencia de aparición.

La explicitación de los elementos y las relaciones en los diagramas no es tan clara como en el caso de las representaciones. A menudo se utilizan asteriscos, estrellas, "*chirimbolos*" u otros símbolos como □, ○, Δ sobre matrices o sobre otras expresiones para llamar la atención de los estudiantes sobre aspectos relevantes del diagrama y para referirlas más brevemente posteriormente. Otras veces, como en los diagramas de conjuntos se utilizan etiquetas para referir los elementos representados y flechas para establecer relaciones. Pero por lo general, como se muestra en la Figura 4. 33 los diagramas suelen servir como medio de comunicación, en detrimento de su propia explicitación. Así, los diagramas se usan como herramientas aclaratorias, considerándose en general suficientemente claros por sí mismos.

Apenas se han observado de forma explícita dificultades de los estudiantes con los diagramas, aunque éstos guardan una estrecha relación con ellas. Se constata que los diagramas, por su capacidad de sintetizar procesos e ideas, resultan útiles bien para explicar errores en algún razonamiento de los estudiantes (S120110119S, Figura 4. 15) o bien para acercar al entendimiento conceptos que resultan demasiado abstractos sólo enunciados formalmente (S820110315B). Los estudiantes los utilizan y personalizan para que les sean de ayuda en sus procesos de pensamiento, por ejemplo para obtener la matriz simétrica asociada a una forma cuadrática (S1420110504B, Figura 4. 25) o para recordar el orden en los cambios de base (S1820110601B, Figura 4. 26). Aunque en este último caso, el uso del diagrama conduce al estudiante a cometer un error, siendo ésta una de las pocas dificultades observadas con el manejo de diagramas.

TEMA	DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS
Para explicar o sintetizar ideas o procesos (META)	Dificultades con los determinantes (S120110119S); idea de sev (S420110215B); síntesis de la idea de viajar de un sitio a otro (S220110125G); procesos finitos en forma de árbol (S220110127G), (S620110301B); uso de un transformador inyectivo (S520110224G); transporte de estructura (S620110228G).
Para explicitar el manejo de representaciones	Coordenadas de polinomios (S220110126S) y su división (S620110301B); después hacer sumas e intersecciones, tarea de reflexión (rellenando una tabla) (S520110222B); resumen de métodos eficaces de cálculo (imagen de cualquier vector, matricial, S620110302G; base dual; S720110309J); comparación de lenguajes (S620110302B).
Para explicar relaciones o sintetizar información	Corrección de los problemas del Examen estudiando inicialmente sus "protagonistas" y relaciones (S420110216B); para resolver una duda con Sol ($Ax^t=b^t$) = SOL. PART+ SOL. SIST. HOMOG. (S120110118S); poner en tablas qué se pide en un problema (S520110222B) o el estudio de signo de un polinomio (S1820110601G) ; esquemas (uso del dual, S720110308J) y conclusiones (sólo hay 2 clases de equivalencia, S1620110518G).
Para ayudar a comunicar y a pensar (hacerse idea de qué pasa)	Día matriz antisimétrica (S320110202G); base para que los estudiantes propongan dos caminos de resolución (S420110216B) o den sentido al problema (S820110315B); apoyo para la metáfora de hacer bolsas (de flechas y conjuntos, con traducción a lo simbólico, S620110228G); puntos de vista MACRO y MICRO del dual (S820110316B); escritura "trapezoidal" de la base de Jordan (S1020110331G).
Para facilitar la comprensión o la memorización	Orden del cambio de base (S320110202S; un estudiante, S1820110601B); dimensión de las matrices simétricas (simbólicamente pensando en la matriz, S320110131G; con diagrama matricial, S1820110531B); explica diagramáticamente por qué es sistema generador (y no demuestra) (S520110223G); comportamiento de las factorizaciones (S620110301G).

Figura 4. 33: Temas surgidos en torno a los propósitos del uso de la visualización en los episodios DIAG.

(GEOM) Uso de la Geometría; complemento de lo formal en interacción con los estudiantes

Esta categoría registra cualquier referencia a la Geometría en clase, ya sea de modo explícito (a través de representaciones gráficas) o de modo implícito (al hablar en términos de rectas, planos, hiperplanos, intersecciones, lugar de los puntos, etc.) Se ha prestado especial atención al modo en que se hacen explícitos elementos relevantes en la visualización (Expl.), resultando de ayuda incluir la representación gráfica empleada (ver Figura 4. 34).

Los episodios de tipo GEOM aparecen más puntualmente a lo largo del curso que los dos anteriores. No se presentan característicos de ningún estilo docente particular: aparecen en los episodios *lógico-estructurales* para ilustrar o ejemplificar una definición o proposición enunciada; en los *procedimentales* como complemento, apoyo o incluso guía de los argumentos algebraicos; y en los semánticos para dar sentido a algún concepto (como en la Figura 4. 34) o para establecer conexiones con otras ramas de las Matemáticas (como el episodio sobre las isometrías del cubo, S120110120G). No obstante, se podría afirmar que suelen utilizarse con una intención de conexión con la intuición y creación de significado (ver Figura 4. 35), más claramente vinculado a un estilo semántico. En las clases teóricas, los episodios de razonamiento geométrico casi siempre aparecen subordinados a lo formal, mientras que en las prácticas los argumentos geométricos tienen más peso (ver Figura 4. 35).

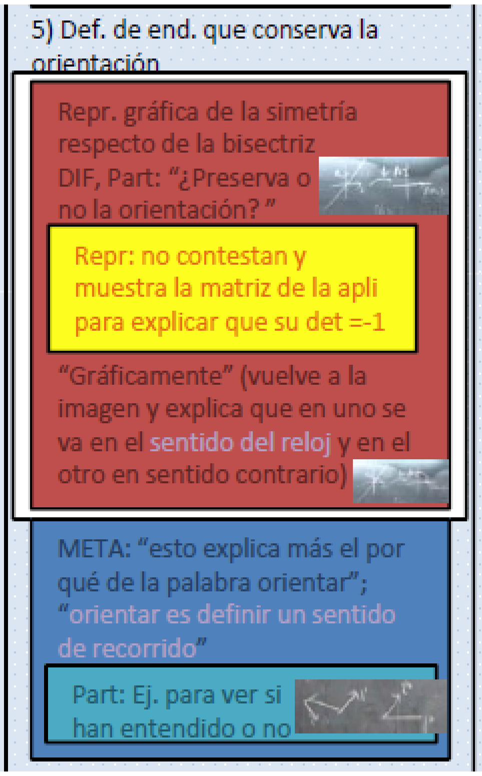


Figura 4. 34: Ejemplo de episodio tipo GEOM (S1620110517G). Se ha clasificado como GEOM porque se utiliza pensamiento geométrico para dar sentido a una nueva definición: la de endomorfismo que conserva la orientación. Para ello, se apoya en una representación gráfica concreta (de una simetría respecto la bisectriz del primer cuadrante) y cuenta con la participación de los estudiantes. Cuando éstos no contestan, G. recurre a una representación matricial de la aplicación, dando lugar a un juego habitual entre los modos de pensamiento algebraico y geométrico. Además, en este caso se aprovecha el episodio geométrico para dar sentido a la palabra 'orientar' (INT) y G. comprueba que lo han comprendido utilizando un dibujo rápido (COM).

El uso de registro gráfico no es condición necesaria de la presencia de pensamiento geométrico. En ocasiones éste se presenta 'de palabra', es decir, a través de gestos y de lenguaje oral natural o matemático. Esto suele ocurrir con ejemplos en IR^3 y dimensiones mayores o con interpretaciones geométricas de endomorfismos de espacios euclídeos (S1820110531G). De hecho, las representaciones gráficas observadas en las clases de teoría son la mayoría en IR^2 (sólo hay un par en IR^3 y una de ellas es una generalización de otra realizada anteriormente en IR^2 en relación a la unión de subespacios, S120110117G y S420110214G). En las clases prácticas hay algunas representaciones más en IR^3 (especialmente en torno a problemas que involucran ortogonalidad). En dimensiones mayores, apenas hay pensamiento geométrico. A raíz del debate en torno a los subespacios de IR^3 (S520110223B) se piensa sobre la pregunta "*¿cómo son los hiperplanos de IR^4?*", pero ésta se contesta de palabra. Y la única representación realizada por el profesor S. en las tres primeras semanas se podría considerar en un espacio abstracto (S320110202S). En las clases de teoría hay mensajes en torno al pensamiento geométrico en IR^n (ver sección 4.2.3.2) pero no se usa de modo concreto. Hay algunas representaciones gráficas en IR pero, salvo en el caso del dual (S820110316B) éstas aparecen casi siempre en relación a contenidos no pertenecientes al AL: explicación de un contenido estricto en espacios de funciones (S120110118G), estudio de signos de un polinomio (S1520110512G) o cálculo de soluciones de desigualdades (S1620110517B).

TEMA	DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS
Esquema formal → geométrico	Lo geométrico aparece subordinado a lo formal (a menudo después en el tiempo): Como ejemplo de representación gráfica (producto cartesiano, S120110117G); comprobación de que han comprendido (intersección de 2 planos) (S420110214G); complementar y convencer del resultado simbólico (ortogonal IR^2, S1620110518G).
Interpretación e ilustraciones geométricas	Similar al anterior, pero se explica como un contenido más del curso: Del determinante (S320110201G); de los EVC (S420110217G); Representación afín para la desigualdad triangular (S1520110512G).
Esquema geométrico → formal	El razonamiento formal aparece motivado o guiado por el geométrico: No ejemplos de subespacios (S1201101217G); motivación geométrica de una definición (suma directa, S420110216G); "*verlo, creerlo y luego explicar bien*" (S1720110525B), (S620110301B).
Argumentos geométricos (para probar)	El razonamiento geométrico se admite como justificación de un enunciado: Relacionados con el Análisis (contenido estricto en espacios de funciones; S120110118G; inversa no buena, S520110224G; signos de un polinomio, S1520110512G; soluciones de desigualdades, S1620110517B); en el debate sobre IR^3 (S520110223B).
Diálogo coordinado geométrico-algebraico (FLEX)	Ambos pensamientos aparecen combinados de forma flexible, a igual nivel: Ecuaciones paramétricas "*inmejorables*" (S220110127G); Definición de L[x] y cálculo sobre repr. gráfica(S420110214G); Proyección y simetría (S620110301G); resolución de problemas (S1820110530G).
No Ejemplos o ejemplos para convencer	Uso de ejemplos gráficos para convencer de la veracidad o falsedad de un enunciado: No ejemplos de subespacios (S1201101217G); Muchos suplementarios (S420110216G), sólo 1 ortogonal (S1620110517B); rebatir un argumento en un debate (S1520110511B); ℂ como IR o ℂ -ev (S220110124G); no hay escritura única (S220110124G).
Concretar para hacerse idea de qué ocurre	Uso de razonamiento geométrico para acercar la situación a los estudiantes y dar sentido: Salir de un bloqueo (S620110301B); explicar qué pide un problema (S1620110517B); Definición de L[X] (S420110214G); mostrar un caso particular (S420110216G); "*esto es verdad porque…*" (S620110301B, S820110315B); Comprobar (S1820110530G).
Para ayudar a la comprensión	Uso de razonamiento geométrico para facilitar la comprensión de conceptos nuevos, difíciles o sutiles: Jordan real (S1620110518G); sistema de referencia adaptado (S220110127G, S320110202S); Ecuaciones paramétricas "*inmejorables*" (S220110127G); relación con cosas del "colegio" (ℂ, S220110124G); "*¿Hiperplano dónde?*" (S420110215G); proyecciones π_i (S720110310G, S820110316B); orientar (S1620110518G).
Para relacionar con otras ramas	Referencias que aparecen en los comentarios EDU o en algunos problemas: Transiciones (Isometrías, S120110120G); Motivar una definición (Parametrización S^1, 420110217G); Recordar algo (hay 3 raíces cúbicas, $\sqrt[3]{1}$, S820110315B); Relacionados con Análisis (arriba).
Explicación de palabra	Razonamiento geométrico sin representación gráfica: Intersección de subespacios en IR^3 (S120110118G; "*¿en qué se cortan dos planos distintos?*", S420110215G); descripción geométrica de endomorfismos en espacios euclídeos (S1820110531G).
Explicitación de representaciones gráficas	Comentarios explicativos de convenciones y de las acciones realizadas en el registro gráfico: Advertencias ("*los vectores no son flechitas*", S120110117G; sobre las clases de equivalencia que son subconjuntos y no puntos, S420110217G; ojo con lo afín, S220110127G) ; Señalar elementos concretos (cuando no contestan, S220110127G); Licencias ("*Las pinto gordas pero las rectas no tienen ancho*", S420110214G).
Explicación motivada por la interacción con los estudiantes	Representaciones gráficas, ejemplos geométricos o comentarios en torno a ellos que surgen a través de la interacción. Constructiva (proyecciones y simetrías, S620110301G), para obtener feedback y ver si están entendiendo (S420110214G); para resolver dudas de estudiantes (S820110315B); relacionar con conocimientos previos (S520110222G); recordar algo (S620110302B); rebatir argumentos en un debate (S1520110511B).

Figura 4. 35: Temas surgidos en torno a las formas de uso de la visualización en los episodios INT, ordenados según frecuencia de aparición.

En los episodios GEOM la interacción con los estudiantes juega un papel muy importante. Esto se hace patente especialmente en las clases teóricas, donde la participación es menor, pero una gran parte de ésta se concentra en torno a este tipo de episodios: el profesor G. introduce explicaciones geométricas a partir de representaciones gráficas, que explica de forma constructiva con ayuda de los estudiantes; así fomenta su participación, comprueba si lo están entendiendo y al mismo tiempo les ayuda a comprender y a relacionar con conocimiento previo (es habitual la coletilla "*en el colegio…*" para introducir este tipo de episodios). Por otro lado, a la vez que sirve de ayuda, el pensamiento geométrico provoca algunas dificultades en los estudiantes, que se observan con más facilidad en las clases prácticas: confunden afín con vectorial (S520110223B); no razonan gráficamente con fluidez (S620110302B); les cuesta distinguir elementos relevantes o imaginar cambios en las imágenes (S620110302B); no suelen invocar el pensamiento geométrico de forma espontánea; al mismo tiempo parece que si no tienen una idea geométrica de lo que ocurre afirman no entender (S820110316B). Por último, la enseñanza del pensamiento geométrico, a través de representaciones gráficas en la pizarra, presenta algunos obstáculos (ver Figura 4. 28), suponiendo un importante reto al que se debe hacer frente si se quiere mejorar la enseñanza de la visualización.

(INT) Desarrollo de la Intuición y las Imágenes Mentales; acercamiento a lo abstracto

Esta categoría se define para registrar todos aquellos comentarios o episodios que tienen como fin ayudar a los estudiantes a desarrollar imágenes mentales ricas y coordinadas en torno a los contenidos que se están explicando. En particular, esto engloba comentarios META que expliciten conexiones entre conceptos (marcados en morado sobre fondo azul) y metáforas o ejemplos de la vida cotidiana que contribuyan al desarrollo de la intuición de los estudiantes. En la Figura 4. 36 se muestra un ejemplo de estas dos formas de codificación. Podemos ver otros ejemplos en los episodios mostrados en GEOM (Figura 4. 34) y EDU (Figura 4. 39). Los episodios bajo este código resultan especialmente relevantes para la investigación pues son los menos estudiados hasta ahora (ver sección 3.3.2).

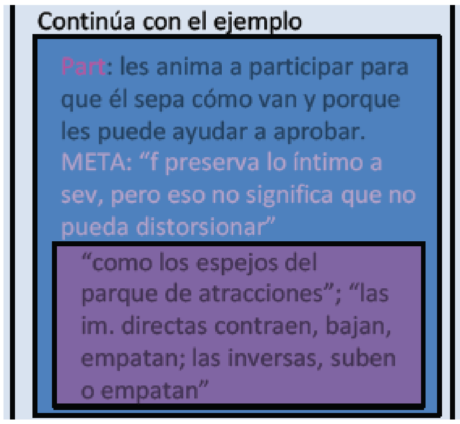


Figura 4. 36: Ejemplo de episodio tipo INT (S520110223G). Se ha codificado como INT porque fomenta la intuición sobre el comportamiento de las aplicaciones lineales. Esto se hace "de palabra" –usando lenguaje oral, matemático para comentarios tipo META y natural para las metáforas y los ejemplos de la vida cotidiana– como es frecuente en este tipo de episodios.

La mayoría de los episodios tipo INT aparecen dentro del estilo semántico de enseñanza. Buscan crear o añadir significados a las explicaciones que se están dando. De forma menos frecuente se hallan algunos episodios dentro de otros estilos, aunque siempre con un carácter semántico: dentro del lógico-*estructural* aparecen para establecer analogías de un enunciado con otros conocidos (S420110215G) o para dar sentido a una definición con algún ejemplo de la vida real (como para la independencia lineal, S120110119G; o para introducir el problema de diagonalización con los "*euracos*", S820110314G, Figura 4. 24); dentro del *procedimental* para explicar de forma intuitiva el manejo de representaciones (por ejemplo, ver las matrices como ristras de chorizos que se enrollan y desenrollan, S120110120G, Figura 4. 14), en una demostración para justificar y dar sentido a algún paso (como los comentarios en torno a demostraciones de teoremas de existencia y unicidad, S320110201) o establecer analogías con demostraciones similares previas (S620110301G), en la resolución de problemas para explicitar conexiones mentales que los estudiantes deben crear en sus cabezas (S1520110511B). En relación a la cantidad de episodios de tipo INT, es superior a la de los episodios tipo GEOM y ya se señaló que hay una diferencia importante entre las teóricas y prácticas, en favor de las primeras (ver sección 4.2.2.4). En la Figura 4. 37 se sintetizan sus formas de uso observadas.

TEMA	**DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS**
Ejemplos de la vida cotidiana y metáforas	**Sin explicitación**: teoremas de ∃!, (“*encontrar un botón rojo*”, S120110126G; aguja en un pajar, S320110201G); Hacer fotos o los espejos del Parque de Atracciones (520110221G); formas bilineales (“*se aparean dos vectores y sale un escalar*”, S1220110414G). **Con explicitación**: escritura única y telegrafía (S220110124G); Ejemplo del súper (S520110221G), del “euraco” (S820110314G); Metáfora hacer bolsas (con diagrama, S620110228G); *hacer Cociente* es ordenar (coordinación alg.-geom., S820110315B).
Conexión entre ideas y conceptos (META)	Relación de dos ideas Matemáticas (ev y linealidad, S220110126S; paramétricas es resolver el sistema, dimensión es nº de parámetros, S320110131G; apl. lineal es multiplicar, S520110222G); Relación de algo matemático con la intuición (“*Una base es una forma de ver las cosas*”; S320110202S); definiciones intuitivas (aplicaciones rígidas, S520110222G; reversibles, S520110224G; “‘*coord.*’ es hacer fotos”, S220110125G); concretar y ayudas a la imaginación (Cómo son las apl. Lineales en IK, S520110224G; “*¿Cómo os imagináis una sucesión?”*, S320110203G; qué se preserva, S520110223G).
Para intuir, entender o recordar procesos (META)	Intuiciones (idea de subespacio, S120110117G; idea de viajar de un sitio a otro y metáfora de la policía, S220110125G; teoremas de ∃!, S120110126G); Contrajemplos (falsa inducción, S120110119S); Analogías (fórmula de Grassmann es cómo se cuenta,S420110215G; entre demostraciones, S620110301G); Generalizaciones (“*Si sé qué pasa en algo pequeño sé lo del grande*”, S520110223G); Puntos de vista (de los sev, S620110303G).
Para mostrar que algo es evidente	*“General non sense”* de las Matemáticas (S420110217G); “*¡Es lógico!*” explica una duda “son gemelos” y con las bolsas (S620110228G); resultado obvio: “*la pantalla siempre es más grande que lo que proyectas*” (S620110301G).
Para explicar manipulación de representaciones	Enrollar y desenrollar matrices (S220110125G); Idea de zoom (S420110216B) de subir y bajar (S420110216B), de niveles MACRO y MICRO (S820110315B); Metáfora de la ferretería para comparar representaciones EVC (S620110302B).

Figura 4. 37: Temas surgidos en torno a las formas de uso de la visualización en los episodios INT.

Las explicaciones de este tipo de episodios suelen ser “de palabra” (Figura 4. 36). Es decir, con lenguaje oral matemático, para comentarios tipo META, y natural, para las metáforas y los ejemplos de la vida cotidiana. A veces, se complementa con uso de gestos (como se observa en el episodio de la pulga, S320110203, ver Figura 4. 18), o con alguna ilustración (como la usada para la metáfora de los tornillos, S620110302B, ver Figura 4. 84) o dibujo rápido (como en la introducción de las aplicaciones lineales, 520110221G, Figura 4. 39) que ayude a la comunicación (COM). Más raro es el apoyo con diagramas, aunque resulta de gran utilidad (idea de viajar de un sitio a otro, S220110125G, ver Figura 4. 16). El nivel de explicitación de los elementos y relaciones que intervienen en este tipo de visualización varía entre los dos tipos de comentarios asociados a esta categoría: (1) los comentarios tipo META son en sí mismos explicitaciones de relaciones o de imágenes mentales, por lo que, en general, se entiende claramente la relación con lo que explican; (2) por el contrario, los ejemplos de la vida cotidiana y las metáforas extablecen conexiones con conceptos familiares, por lo que sus explicaciones suelen ser muy vagas, sin un diálogo coordinado con aquello que se intenta ayudar a imaginar o a intuir. Esta falta de explicitación afecta a la eficacia de estos comentarios en la enseñanza, no contribuyendo plenamente a la construcción de imágenes mentales ricas. Así, se han observado dificultades debidas a una confianza incontrolada en la intuición (Figura 4. 45) que quizá podrían haberse evitado si el grado de explicitación hubiese sido mayor. Para ello, los diagramas pueden resultar de gran ayuda (como se observa en el episodio en el que se precisa la idea de subespacio como algo encerrado en sí mismo, tras haber observado que les condujo a errores en el Examen, S420110216B).

(FLEX) Fomento de la Flexibilidad; creación de conexiones

La flexibilidad es un aspecto de la didáctica del AL muy relacionado con la visualización. Esta categoría se establece para recoger acciones o episodios relevantes que hayan podido quedar fuera de los anteriores, como por ejemplo la flexibilidad entre métodos de resolución, lenguajes, modos de pensamiento o puntos de vista. Así, FLEX sirve para enmarcar procesos contemplados anteriormente que muestren algún rasgo de flexibilidad, por ejemplo cuando se indican diferentes maneras de interpretar una misma representación o cuando hay coordinación de representaciones gráficas. La Figura 4. 29 y la Figura 4. 34 son ejemplos de codificación de este tipo de episodios. En este sentido, FLEX representa un modelo de visualización ligeramente diferente a los anteriores. Hace referencia a una propiedad común y transversal de todos los tipos de visualización en lugar de recoger una combinación concreta de productos, procesos y habilidades de visualización: REPR hace referencia al manejo de los registros simbólico y de tablas; DIAG al de los diagramas; GEOM al uso del pensamiento geométrico y el manejo del registro gráfico; e INT al de imágenes mentales a través de ejemplos, metáforas y explicitación de conexiones entre ideas matemáticas. Por el contrario, FLEX puede darse en relación a cada uno de estos modelos o incluso involucrar a varios de ellos.

Los episodios y aspectos observados con la flexibilidad en el curso son numerosos, pudiendo aparecer en cualquier momento y en cualquier estilo docente: (1) en enunciados mostrando analogías con conocimientos previos (como la Fórmula de Grassmann que se explica como "*una forma de contar*", S420110215G) o como un contenido más del curso (así pasa con todas las proposiciones que "revisitan" algo visto anteriormente, como los sistemas homogéneos revisitados, S120110118G); (2) en ejemplos ayudando a la comprensión de hechos (como que $\mathbb{C}$ puede verse como espacio vectorial sobre IR o $\mathbb{C}$, S220110124G) o hacerse una idea de lo que ocurre a través de una situación más concreta (S320110131G); (3) en demostraciones, empleando diferentes puntos de vista (como en una proposición sobre imágenes directas donde se utilizan dos puntos de vista de *L[S]*, uno para cada contenido, S520110223G); (4) en temas enteros (como el del dual, donde conviven el punto de vista de las coordenadas, el de las formas y el de los hiperplanos); (5) en resolución de problemas dando diferentes representaciones y puntos de vista de los objetos involucrados (como las aplicaciones lineales, S620110302B), usando varios métodos de resolución (por ejemplo para el cálculo de la Matriz de una Aplicación Lineal respecto de la base estándar, S720110308B) o de comprobación (S1320110427B); (6) en debates donde surgen diálogos entre diversidad de argumentos o preguntas de ampliación (como en el de los subespacios de IR^3, S520110223B); (7) en respuesta a dudas de estudiantes (S620110302B). Por tanto, existe una atención y cuidado de aspectos relacionados con la flexibilidad en el curso observado (ver Figura 4. 38).

TEMA	DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS
Uso de diversos puntos de vista del mismo objeto	En enunciados (sistemas homogéneos revisitados, S120110118G); en ejemplos (ℂ como IR o ℂ-ev, S220110124G); en demostraciones (imágenes directas, S520110223G); en temas enteros (dual, al punto de vista con hiperplanos lo llama "*más conceptual*", S720110309J); en resolución de problemas (apl- lineales, S620110302B); en debates (sobre subespacios de IR^3, S520110223B); en respuesta a dudas (S620110302B).
Introducción de un nuevo punto de vista	Sistemas de ecuaciones (revisitado,S120110118G; con dependencia lineal, S320110203S), Subespacios (como imágenes y núcleos, S620110303G); matrices simétricas (como formas bilineales, S1220110414); factorizar (matrices como funciones, S620110301G; con el dual, S720110308J).
Identificación del mismo punto de vista para objetos diferentes	En enunciados (Matriz de Aplicación Lineal, "*esto os tiene que sonar a…*", S620110302G); En demostraciones ("*Se hace similar al cambio de base*" S620110302G; suma directa y espacios isomorfos, S620110301G).
Coordinación flexible de puntos de vista (o repr.)	Para facilitar la comprensión y credibilidad (S220110124G); para construir y explicar un diagrama (Factorización Canónica, S620110228G); para pensar y explicar un problema (S620110301B); para resolver dudas (S820110315B); para dar sentido a un problema resuelto simbólicamente (S1820110530G) (ver temas REPR y GEOM).
Varios métodos o argumentos	Varias soluciones a un problema (de los estudiantes, inducción, S120110118S); Varios métodos (tutoría, S320110203S; rangos, S320110131G); Valor del AL frente a la Geometría (S1620110518B, S1820110530G); Comparación de métodos (uno válido, otro no, S320110202G; S1320110427B; uno mejor que otro, S1820110601B, S1220110414G).
Comprobación	Con regla nemotécnica (S620110302G); con un método alternativo (de los estudiantes, S1320110427B); Valoración ("*Sería bueno*", dual, S720110308J).
Extensión o ampliación	En la corrección de problemas, con preguntas ("*¿será cierto al revés?*", S520110223B); demostrar más de lo que piden (S320110201G)); caso particular (S420110216G).
Generalización/ concreción (ejemplos)	Uso de ejemplos concretos para que se sitúen (3x3,S320110131G); cambio de método general a más concreto (S320110203G); de casos concretos se saca un patrón general (S720110309J); se sintetiza con notación (δ_{ij}, S720110308J); reconocimiento de una proposición como caso concreto de otra (S420110216G) o de una propiedad particular (S620110303G); motivación de una definición con situación concreta (S420110217G).
Conexión con conocimientos previos	De resultados nuevos con conocidos (apl. Lineales y polinomios, S620110302G); a través de la Geometría (ver temas de GEOM) o de metáforas (ver temas de INT).
Motivadas por la participación	en respuesta a dudas para dar sentido a EVC (S620110302B); comprobación gracias a la corrección de un estudiante (S620110302G); la participación da métodos alternativos (al salir a la pizarra, S620110302B; proponen camino más corto, S1820110530G).

Figura 4. 38: Temas surgidos en torno a las formas de uso de la visualización en los episodios FLEX.

La explicitación de estos aspectos conlleva a menudo al desarrollo de una terminología específica. Así se crean modos de referirse a los distintos tipos de representaciones, modos de pensamiento, puntos de vista o métodos. Por ejemplo, el profesor S. utiliza la expresión "*falsa inducción*" para referirse a un método (erróneo) que los estudiantes emplean para resolver problemas sobre matrices de orden *n*. O en el tema sobre el espacio dual, donde conviven diversos puntos de vista, se utiliza los calificativos "*con detalle*" para el punto de vista vectorial, "*en coordenadas*" para el simbólico o "*más conceptual*" para referirse al modo de razonamiento geométrico, con hiperplanos. También se usan expresiones como las que siguen para denotar cambios de puntos de vista: "*así se ve en conjuntos, ahora geométricamente* (S20110217G)", "*gráficamente se suele ver así* (para el diagrama de la Matriz de la Aplicación Lineal, S620110302G, Figura 4. 21)", "*ahora llevo esto a espacios vectoriales*" (para definición simbólica de los EVC, S620110302B), "*lo habéis pensado algebraicamente, vamos a verlo geométricamente*" o "*el dibujo convence*" (para buscar un contraejemplo de propiedades del producto vectorial, S17201105025B). Como estos ejemplos ponen de manifiesto, el lenguaje es variado y su modo de empleo es vago: el mismo término sirve para referir cosas diferentes (como "*gráficamente*", que se usa tanto para diagramas como para representaciones gráficas) o al contrario, distintos términos sirven para referir el mismo tipo de lenguaje (por ejemplo, "*en coordenadas*", "*en conjuntos*" o "*en espacios vectoriales*" para el lenguaje simbólico). Estas ambigüedades podrían explicar que, a pesar de la atención del curso a la flexibilidad, los estudiantes tengan dificultades en pasar de modo flexible de un modo de pensamiento a otro y que en ocasiones den respuestas poco coherentes desde este punto de vista (S120110120G).

(COM) Comunicación a través de las imágenes

Esta categoría se define para estudiar la aparición de ilustraciones o imágenes visuales que tuvieran como único fin servir para una comunicación más eficaz. Inicialmente se consideró como un modelo más, pero finalmente descartamos esta idea. La razón es que esta categoría designa un propósito de la visualización –comunicar– más que distinguir una combinación productos, procesos y habilidades de visualización (como los cuatro primeros códigos) o una propiedad transversal (como FLEX). Los propósitos de la visualización aparecen como temas dentro de cada modelo, no como modelos en sí. Es cierto que hay un tipo de producto de visualización característico de este tipo de código: las ilustraciones o dibujos rápidos aparecen asociados a episodios donde ésta se usa únicamente con el objetivo de comunicar. Estos productos se distinguen de las representaciones gráficas por ser más vagas y no contener ningún tipo de información de naturaleza matemática (se pueden comparar los dos tipos de imágenes en la Figura 4. 34). Suelen borrarse rápidamente después de usarse, a diferencia de las representaciones gráficas que a menudo se dejan en un lado apartado de la pizarra por si es necesario volver a ellas. Sin embargo, el uso de estos dibujos e ilustraciones es muy limitado y de hecho la mayoría de las veces que aparece esta categoría es en combinación con otros modelos de visualización. Por ejemplo, uno de los propósitos principales del uso de diagramas es comunicar ideas tipo META (Figura 4. 32), igual que sucede con algunas imágenes mentales, ejemplos de la vida cotidiana o metáforas (Figura 4. 37). También varios de los usos del pensamiento geométrico están relacionados con facilitar la comunicación como: ejemplos para convencer o para concretar y hacerse una idea de qué pasa. La utilización de este código sirve para detectar episodios interesantes que se usan para profundizar en aspectos relacionados con la función comunicativa de la visualización, más que para representar y dar forma a un nuevo modelo de visualización.

4.2.3.2 Aspectos de Clase más Generales

Las categorías que se describen a continuación las añadimos para recoger información sobre aspectos de clase más generales que también pueden estar afectando a la enseñanza de la visualización. El análisis de estos aspectos–como creencias, normas o mensajes– es relevante para proporcionar explicaciones de algunos de los hechos observados así como para establecer posibilidades y limitaciones de la propuesta de mejora.

*(**EDU**) Aspectos didácticos de la clase*

Esta categoría se identifica con acciones para lograr que los contenidos se enseñen de manera más didáctica (ver Figura 4. 39).

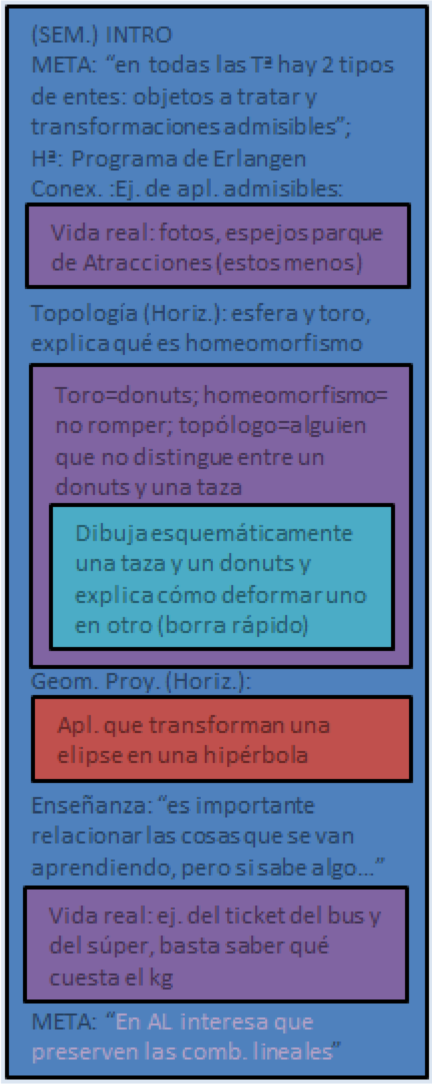


Figura 4. 39: Ejemplo de episodio tipo EDU (S520110221G). Se ha codificado como EDU porque tiene un claro fin didáctico: introducir una unidad (la de Aplicaciones Lineales). Se hacen comentarios tipo META, se hacen comentarios históricos, se establecen conexiones con otras ramas de las Matemáticas y con el horizonte, se explicitan creencias sobre la enseñanza y se incluyen numerosos episodios tipo INT (hecho que se repite en otras introducciones). La comunicación durante los diez minutos largos que dura este episodio es siempre 'de palabra', salvo un dibujo rápido que se usa para complementar una explicación sobre Topología (COM). A veces se observó que lo estudiantes tomaban pocas notas durante este tipo de episodios.

Para hacerla más operativa se subdividió de tal forma que se distinguieran los diferentes contenidos y tipos de acciones que engloba. Incluye: comentarios relacionados con la organización de las clases y del temario (ORG), con el funcionamiento de la clase, convenios existentes en Matemáticas o expectativas que existen sobre ellos (Normas); referencias al Libro de Texto (Libro); notas de humor o sobre la vida cotidiana que producen una cercanía mayor entre profesores y estudiantes (Humor, vida cotidiana); acciones dirigidas a fomentar la participación de los estudiantes en las clases (Part); observaciones guía para el estudio sobre la dificultad de los conceptos que se tratan o sobre qué debían y no debían saber hacer (Val); consejos para el estudio y opiniones sobre la enseñanza en general (Ens); conexiones con conocimientos previos o futuros (Horizonte); notas históricas (Hª); aclaraciones sobre el objetivo de realizar la tarea (Expl.), sobre el proceso seguido en cierta demostración o resultado, sobre conexiones mentales que están actuando (META) o sobre cómo se suele trabajar en Matemáticas (MAT).

Los episodios de tipo EDU, son con diferencia, los más numerosos debido, por un lado, al amplio rango de acciones y comentarios que engloba y, por otro, al énfasis que pone el profesor G. en aspectos de tipo semántico en su docencia (ver sección 4.1.2.3). Los distintos comentarios y episodios recogidos bajo esta categoría se han agrupado en torno a tres temas principales: creencias sobre la enseñanza; recursos didácticos; normas, consejos y recomendaciones. El tema de la participación se trata más adelante, en relación a la aplicación del Primer Principio de Diseño (ver sección 4.2.4.1) y el análisis de los comentarios de tipo META, aunque sería interesante, se escapa del interés de esta investigación (ya se han incluido los relacionados con la visualización en el análisis de cada modelo).

Las creencias sobre la naturaleza de las Matemáticas son importantes porque influyen en la forma de enseñar (Gómez-Chacón, 2012a, 2012b) así como en las creencias sobre la visualización, que afectan a su vez en el uso que los docentes hacen de ella en el aula y en los mensajes que dan sobre ella a los estudiantes (ver Figura 4. 43). En la Figura 4. 40 se muestran los recogidos sobre las creencias de los docentes del curso observado

TEMA	DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS
Sobre aprendizaje	No todos aprendemos como Leonardo da Vinci (a inventar inventando) o como Miguel Ángel (a pintar pintando), algunos no tenemos tanto coraje y/o talento y conviene entonces tener cerca algunos problemas resueltos y bien resueltos."(S120110117G). Memorizar va en detrimento de pensar, que es la labor de quien aspira a ser matemático. (S320110201G). Si se da todo muy masticado, no aprenden (S420110217G). "Hay que aprender de los errores, para destruir la idea que los provocaron" (S420110215B). "La experiencia le dice que luego se les olvida y además en matemáticas se aprende mejor lo que se necesita" (S1220110412G). Se aprende de los errores de los profesores (S320110203G) (S1820110531B).
Sobre enseñanza	A raíz del episodio de la matriz antisimétrica: en un libro de M. de Guzmán leyó que éste había aprendido mucho de enseñar mal, de equivocarse y de discutir con los alumnos buenos (Part.) (S320110203G). Dudas con el ritmo y el grado de detalle con el que debe explicar (S420110214G), (S620110228G), (S820110315G), (S820110316G). "Prefiere pocos estudiantes buenos que muchos y malos" (S420110214G). él no concibe la enseñanza como una tienda de garbanzos (él decide qué enseña y no tiene que convencer a nadie para que le "compre") (S520110223G). Hay que ayudar a los estudiantes a crear conexiones en sus cabezas (S1520110511B). Intenta enseñarles a pensar como matemáticos de acuerdo a cómo es él (S1820110602G). Le gusta dar clase en 1° porque así puede transmitir obsesiones como cómo manejar los teoremas de existencia y unicidad (S320110203G). "Es importante relacionar las cosas que se van aprendiendo (S520110221G)". "Una cosa es cómo se hace, que está colgado en internet, y otra cómo se piensa para que salga" (S420110214G). Distinción ideas y cuentas: "Más que las cuentas, me interesa enseñaros a ser cuidadosos con dónde estamos y qué operaciones aplicar ahí" (S220110125S); "Ahora podemos apagar el cerebro y despertar la mano" (S220110126S); "Esa es la escritura formal, pero intentemos comprender qué pasa" (S220110126S); "Esto no es mecánico, es pensar, observar…" (S320110201S); "Lo difícil ya está hecho, ahora sólo son cuentas"; "me interesa que comprendáis lo que pasa" (S320110202S); Lo importante es "no hacer la cuenta sino caer en que hay que hacerla" y "E/kerf≈Imf". (S620110228G); "hoy no hay ideas, sólo cuentas; se podrían quitar si supiésemos que lo podéis hacer bien" (S820110315G); "los problemas son fáciles, entenderlo no tanto" (S820110316B).

Problemas intrínsecos de la Enseñanza	Uno de los mayores problemas de enseñar es que al profesor no se le ocurre que los alumnos no estén cayendo en la cuenta de ciertas cosas y los alumnos no pueden decirle que no están cayendo en la cuenta de algo que no conocen. La experiencia le ha mostrado que los alumnos tienen dificultades con esta proposición y por eso ahora la incluye. (S120110118G). Es difícil adaptarse a todos los niveles (S420110215G). Dificultad de ponerse en su mente (S120110119S).
Problemas del modelo de enseñanza actual	Antes los suspensos servían como criba, "era higiénico" (ahora ya no) y como consecuencia hay un descenso de nivel de 1°, ahora el salto es en 2° (S420110215G). Los nuevos métodos lo único que consiguen es que se siga sin entender las mismas cosas, pero se den cuenta más tarde (S120110119G). Reducción de las matrículas de honor (S320110202G). "El Grado está descafeinado" (S620110228G). Le preocupa el daño que se hace a los "pocos alumnos buenos", pero éste sería mayor si la Facultad desapareciese porque no hubiera suficientes (S720110310G). "Todo está al revés, los estudiantes que no lo hacen son los que lo deberían intentar" (S420110214G) . "Es importante relacionar las cosas que se van aprendiendo, pero para eso hace falta que sepan algo…" (S520110221G).

Figura 4. 40: Temas recogidos sobre las creencias de los docentes del curso observado.

El tipo de recursos didácticos que se emplean (ver Figura 4. 41), como los comentarios personales o humorísticos que dan cercanía al docente, influyen sobre factores relevantes en la enseñanza de la visualización, como la participación.

TEMA	DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS
Fuerte apoyo en el Libro de Texto	Habla de la utilidad del libro como guía (S120110117G). Continuas referencias al Libro de Texto, para indicar qué va a ver, qué se salta (S520110222G). Hay partes que no le gusta cómo están escritas o explicadas, muchas veces prefieren empezar con un ejemplo (S120110118G), (S320110131G) (S620110303G), cambiar el orden (S620110302G), (S1220110414G) o demostrar por otro camino (S720110310J). En el libro está claro, pero no sabe si para ellos. No se explica algo con más detalle porque cae por su propio peso (S220110127G) o se supone que el lector lo tiene en la cabeza (S320110131G) Hace ejemplos diferentes a los del libro para que tengan más (S520110221G). Hace los que no están en el libro (recorren todo el tema). (S520110222B).
Valoraciones sobre lo que estudian y sobre cómo van	"Lo único difícil del AL es el empeño de querer ahorrar papel y poner traspuestas" (S320110203G) "No hay que hacer nada, es importante que veáis que es transparente; si habéis entendido eso, ya el curso está 'chupao', si no es mejor que os vayáis" (S220110125G). Después de las entregas del examencillo "vais muy mal" (S220110125G). "Es un problema si no sabéis contestar a esto" (S220110126G). "Este tipo de cosas se os tienen que ir ocurriendo" (S1820110531B).
Atención a la diversidad	"Para los más ilustrados o los que quieran aprender más. Para espacios de tipo no finito, también hay bases, pero se definen de otra forma. Pueden pedirme bibliografía" (S220110124G). "Lo explico de palabra para el 6% y lo escribo para el 90%" (S1820110602G).
Comentarios humorísticos y de la vida cotidiana	Sobre churras y merinas ("El Intermedio") (S120110117G). "No todo lo prescindible hay que eliminarlo, si no la carrera de Matemáticas desaparecería" (S120110117G). Chiste y noticia sobre los mudos; "lo importante no es quien eres sino qué lugar ocupas; eso extrapolado es dramático pero es lo que nos dice la sociedad en que vivimos" (S320110203G). "Es más útil saber para qué sirves que quién eres" (S320110203G). Sobre la palabra kernel y que los españoles nunca inventamos nada (S520110223G). "Se lee como los árabes", y hace comentario sobre los árabes (S620110228G).
Comentarios personales	Habla de su experiencia de investigador, "si con las cuentas sale algo coherente, no lo toques" (S620110303G). Recuerda su época de estudiante, habla sobre Reválida y Selectividad (S320110201G).

Figura 4. 41: Temas sobre los recursos didácticos observados.

Por último, para poder entender mejor la enseñanza de la visualización observada es importante poseer una idea de las normas, consejos y recomendaciones que se dan en el curso (Figura 4. 42). Así mismo, este análisis sirve de panorama general en el que situar los mensajes que se dan sobre la visualización (detallados a continuación).

TEMA	DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS
Normas generales	Cuando se queda algo sin hacer a veces lo manda de tarea para casa (S120110117G). El Examen no lo pone él (S320110131G); explica qué entra y cómo deben contestar: “explicaciones claras y concisas”; Advierte sobre copiar (S320110201G). Evaluación contínua: completad los detalles del libro y entregar como ej. (cuenta como el “examencillo”) (S620110302G). En general no recomienda copiar en clase, sino escuchar (S620110302G). No da tiempo a hacer los problemas previstos y entrega la solución por escrito (S620110301B). Se admite salir a contar respuestas no del todo correctas: “Podéis salir a contar dónde os habéis atascado” (S620110301B). Hay dudas con el 7.15, las deja para tutorías. Prefiere ver resumen tipo META: “¿qué hemos aprendido en la hoja 7?”. (S620110301B). Disponibilidad para los estudiantes: Se ofrece a corregir problemas a la vuelta de S.Santa (S1220110413B); Ofrecen clases extras antes de los exámenes. Explica una solución errónea para que piensen por qué está mal (S1320110427B). A partir de una propuesta de un estudiante explica un camino que sabe que lleva a bloquearse. Después de que pase eso es cuando explica el otro camino.
Normas socio-matemáticas	Hay que escribir todo y explicar a dónde se va: prueba de palabra; “Si hace falta que escriba me decís” (S220110124G), (S220110125G). “Tenéis que ser cuidadosos en revisar las pruebas” (S220110126G). “Al: Cuando hace falta un lema anterior, ¿hay que demostrarlo?”→ “G: No, pero sí citarlo con detalle. En el libro da asco como está citado” (S320110203G). Explica cuándo demostrar o buscar un contraejemplo (S320110203S). “¿Cuál es la respuesta? → Todas son válidas.” Las repasa una a una resaltando qué han hecho y qué faltaría. Creencias: “¿Cuál es más matemática?”→ Al: la 2. (S520110223B). Pensamiento crítico: “¿Te lo dijeron o te lo crees? Hay que buscar un contraejemplo.” (S1220110412S), “¿Se puede hacer lo que nos piden? Preguntaros eso siempre” (S1820110531B) Escribe el enunciado en pasos (S1520110511B). Ángel dice que no sabe explicarlo matemáticamente, B. dice que lo explique como pueda “Bien visto, Ángel, pero había que justificar mejor” (S1720110524B). “Para que aprendáis de mis errores” les muestra un camino que no lleva a nada y cómo se le ocurrió el bueno (S1820110531B).
Consejos	“Todavía no se os ha quitado lo de operar…”; “En la vida real no sé , pero en la académica, si las cosas se van complicando cada vez más, es que hemos elegido un camino malo.” (S220110125G). “En el libro está hecho para antisimétricas; podéis ver si lo habéis entendido” (S320110131G). “Tenéis que aprender a distinguir cuántas cosas os piden, aquí 2 (lin. e iny.)” (S1520110511B).
Comportamiento de los profesores (Modelo de cómo proceder)	Hay que acostumbrarse a dejar las cosas terminadas, por eso hace este ejemplo (S120110117G). “Hago este problema, que es un poco largo y aburrido, para que veáis lo cuidadoso que se debe ser en comprobaciones de este tipo” (S220110125S). “Pienso cómo hacerlo trabajando poco” (S320110203G). Se está toda una hora pensando en el problema de la matriz antisimétrica (Hay que ser tenaz en la resolución de problemas) (S320110202G). Como no responden a una pregunta; les lleva a ver el libro (S1220110413B).
Comportamiento de los estudiantes	No suelen escribir en las explicaciones más semánticas, cuando relaciona con otras ramas de las Matemáticas o en las transiciones a otros temas (S120110120G). S. dice que han copiado en las entregas (S520110223G). Poco trabajo previo antes de las clases: ¿Los habéis mirado, cuál os es difícil?”→Y: 3 y 8 (los demás nada)→ B: “Tenéis que trabajar” (S720110308B). Corrigen errores en la pizarra (S1220110412G).

Figura 4. 42: Temas sobre las normas, consejos y recomendaciones generales dadas en el curso observado.

(SMS) Normas, recomendaciones y mensajes sobre visualización

Esta categoría está en estrecha relación con el anterior, pero se limita a aspectos didácticos relacionados con la visualización. Esto incluye comentarios de tipo EDU sobre cuestiones como rigor o flexibilidad o consejos sobre cuándo usar el pensamiento geométrico. Se puede ver un ejemplo de este tipo de mensajes en la Figura 4. 31. Durante la codificación se detectaron algunos matices a las que se nombró en ese momento (rigor, mensaje positivo (+) o negativo (-), normas, consejo, obstáculos) que sirvieron como punto de partida para el análisis posterior que se muestra a continuación. En la tabla de la Figura 4. 43 se recogen las normas, recomendaciones y mensajes positivos, negativos o neutros que se dan en las clases respecto al uso de la visualización.

TEMA	**DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS**
Fomento del pensamiento geométrico (GEOM) para pensar o demostrar	Importancia: "*La visualización es muy importante, pero no dibujo porque no lo hago bien. Vosotros podéis hacerlos. […] Con los problemas difíciles lo 1° que hago es un dibujo; pero no uno bonito, si no algo que me sirva para pensar*" (S420110216G); "*es imperdonable no haber contado la interpretación geométrica del determinante*" (S320110201G). Necesidad: "*Si no dibujo, no puedo calcular la parte entera*" (S120110117G). Demostración: función derivable de derivada no contínua (S120110118G). Recomendación:" *Conviene que representéis gráficamente, sobre todo en Álgebra y Geometría que son más abstractas*" (S120110117G).
Uso de la visualización para demostrar, ayudar a entender o a recordar	Lo visual no se olvida: no hace la demostración del libro, sino la que le hicieron a él que no se le ha olvidado. (S1520110512G). Visión global: "*es buena para hacerse una idea*" (S120110117G); "La buena visualización es la que se ve y ya está todo hecho" (S320110201G). Apoyo: "*se ve muy bien en el dibujo*" (escritura única, S220110124G); la representación gráfica muestra que es partición (S420110217G). Contra el aprendizaje mecánico: "Antes olía mal; os aprendéis las cosas de memoria, pero sale todo de manera natural de la definición" (S1020110330S); Se lía con estas cosas (orden cambio de base) y lo tiene que mirar, pero va a enseñarles a pensarlo para no mirarlo (S220110126G).
Importancia de utilizar varios puntos de vista (FLEX)	"*Es importante ver las dos caras de la misma moneda. Nada es superfluo*" (S520110223G); "*Quizá os viene bien ver un subespacio como núcleo y aplicar sus propiedades.*" (S620110303G); Da dos métodos para calcular las bases del Cociente: "*En cada situación elegid el método que prefiráis*" (S520110221G); "*Esa es la escritura formal , pero intentemos comprender qué pasa*" (S220110126S) .
Puesta en valor de la intuición como fuente de inspiración o de comprensión	En problemas: "*¿Alguien sabe sacar algo que huele mal?*" (S1220110412S); "*Deja volar tu imaginación*" (S10201103330S); "*¿No os suena una campana de alarma en la cabeza? Los cuadrados y cubos suelen estropear la linealidad, Pero lo hacemos limpio. Ya que esto huele mal desde el principio voy a intentar ver cómo falla.*" (S220110126S). Después de demostración formal: "*Como la intuición decía*" (S420110214G).
Valoración positiva del aspecto (superficial)	"*Ahí tenéis unos dibujos que son preciosos*" (S1620110518G); "*Al final saldrá un precioso diagrama*" (S620110228G).
Consejos, normas y creencias sobre el manejo de representaciones y su explicitación	Manejo: les recomienda pensar en las matrices como ristras de chorizos que se pueden enrollar y desenrollar (S120110120G); Conducta de abducción (S120110119S); "*Usad la base que mejor se adapte al problema y al final expresáis respecto a la base que os pidan* [Normas]" (S220110126G); (ver temas de REPR). Explicitación: "*Escribid sobre la implicación, así no sólo doy la solución, sino también sus motivaciones*"(2120110118S); "*Ningún libro se esfuerza tanto como yo en llamar de una manera al vector y de otra a sus coordenadas, porque son cosas distintas; y que en realidad lo que obtienes son relaciones de las coordenadas*" (S220110127G); "*En Matemáticas intentamos que la notación nos de pistas del objeto*" (S420110214G) "*Las notaciones son muy importantes: las buenas ayudan a pensar, las malas complican mucho*" (S420110217G); P. opina que explicitar más las representaciones en el Examen de Febrero es "*¡lo que faltaba!*" (S320110202G).

	Son evidentes: "A mí esto [qué va en los … de las matrices nxn] nunca me lo han explicado, pero nunca me equivoqué. Será un don" (S220110125G); "Pero ¿cómo va a ser esto igual que esto (gestos, trasponer)?" (S220110125G); "Quien no se de cuenta de que esto [expresión simbólica del producto de matrices] es un producto es tonto" (S220110126G); "Dimensión es el nº de parámetros cuando no eres tan tonto de haber puesto de más" (S320110131G); "¿Qué es lo más natural? La Matemática es naturalidad. De los v_i no sé nada, pero sí de los u_i. Pues sustituyo" (S220110126S); general non sense (S420110217G); [En contra] "*El del elemento neutro es menos intuitivo, porque estáis acostumbrados a que sea (0,0,0)*" (S220110125S).
Formal = pedante	(Dos veces el S120110117G); "(el Tª de Equicardinalidad de las bases*) llamado así pedantemente*" (S220110125G).
Mensaje a favor del rigor y la formalización	La intuición vale, pero después hay que formalizar: "*Esto es muy intuitivo pero se puede formalizar*" (S220110125S); "*Esa intuición puede ser útil pero lo vamos a hacer probando todos los casos*". (S120110119S); "*Hay que comprobar las cosas, a veces el sentido común no funciona, es magia*" (S120110118S). Formal=limpio: "*¿No os suena una campana de alarma en la cabeza? Los cuadrados y cubos suelen estropear la linealidad, Pero lo hacemos limpio. Ya que esto huele mal desde el principio voy a intentar ver cómo falla.*" (S220110126S). Hay que escribir todo: no deja nada sin probar, sino al menos da la idea y se excusa por ello (S320110201G); "*Habría que comprobar que las propiedades de ev se cumplen*" (S120110117G); "*Hay que explicar qué es 'de hecho*'" (S120110120G); [En contra] "*No pruebo todas las propiedades de Espacio Vectorial, no tiene sentido*" (S720110307J). "*Esquizofrenia entre probarlo todo y los argumentos plausibles. Las Matemáticas son lo 1º y lo demás son tonterías.* " (S120110120G).
Lo visual (GEOM) es del colegio	"Como hacían en el colegio" (S420110217G).
Advertencia sobre el uso de la visualización	"*Ya os dije que los vectores no son flechitas*" (S120110117G).
Inutilidad de la visualización (GEOM)	"*No sirve para nada, pero creo que hay que hacerlo*" (EVC, S420110217G); "*poco interesante*" (S120110120G); "*Visualizar en IR^3 es trivial, así que es perder el tiempo. En n sí es importante, pero ahí no sabe dibujar*" (S120110118G); "*Para eso no hace falta el dibujo*" (S420110216G). "*Este ejemplo es muy pobre porque es 2x2*" (S320110201G). "*Casi todo en AL con n=2 o 3, tiene un reflejo geométrico evidente. Pero a mí esto que acabo de explicar nunca en mi vida me ha ayudado a entender nada sobre las matrices 2x2. Pero a lo mejor es un problema mío.*" (S320110201G). "*Pues ya hemos acabado, no hay nada que imaginar*" (S120110118G).
Limitaciones de la Geometría frente al AL	AL más general: "*aquí se podía haber hecho por semejanza de triángulos pero me interesa hacerlo de la forma más general posible. Así este raz. sirve en IR^7*" (S1820110530G).

Figura 4. 43: Temas surgidos en los mensajes, normas y creencias durante el curso (exceptuando las de B. que se analizan después, ver Figura 4. 44).

Las normas, recomendaciones y mensajes que se dan en clase respecto al uso de la visualización son muy contradictorios. El siguiente fragmento lo refleja bien, sirviendo de complemento a la síntesis ofrecida por la tabla. Es de la transcripción de una clase en la que se explica que la intersección de subespacios también es subespacio (S120110118G). Además, en este comentario se hace patente la influencia de la investigación sobre los mensajes dados en clase (ver sección 2.5.2):

G: #00:01:40-0# Dice, pon, pon ejemplos... Se nos acusa mucho a los profesores de Matemáticas de la facultad de no hacer Matemáticas más visuales. Y digo, yo estoy encantado de hacer Matemáticas visuales pero tiene que ser de cosas que se vean. Si tuviera una asignatura que se llama papiroflexia (risas), tendría unas tijeras, unas hojas, doblaríamos... A ver cómo vas a *explicar papiroflexia sin... Pero, "hazlo también en esto" y digo, pues mira el único sitio donde se puede ver es IR^3, ya en IR^4... Ya no se ve. IR^3. ¿Qué ejemplo puedo poner? Pues los únicos subespacios de IR^3 son el 0, las rectas y los planos. Si corto dos rectas... Bueno, cortar es intersecar. Si corto dos rectas se cortan en el cero, porque las dos pasan por el cero y las dos rectas tienen un punto en común, pues tiene que ser el cero. Ya, mira, mira qué bien. La intersección de dos rectas es un subespacios. ¡Pero si ya lo sabías hacer! #00:02:31-8#*

La intersección de recta y plano. Digo si la recta está contenida en el plano la intersección es la recta, que ya sé que es subespacio. Y si no, como los dos pasan por el cero, una recta y un plano, cuando la recta no está contenida en el plano, dan un punto. ¿Quién? El cero. #00:02:49-7#

El caso más complicado, intersección de dos planos. La intersección de dos planos es una recta que pasa por el cero. Pues ya sabemos que las rectas que pasan por el cero son espacios vectoriales. ¡No puedo poner nada...! ¡Es perder el tiempo visualizar! ¿Qué hay que visualizar? Narices. (Vuelve hacia el ejemplo, escribe y lee "En efecto"). Pero sin embargo tiene mucha importancia. Tiene mucha importancia, incluso... En IR^3 no, pero en IR^n sí. Pero como en IR^n yo no sé dibujar... #00:03:22-2# (S120110118G).

Otro fragmento de transcripción interesante que muestra la estrecha relación que hay entre los mensajes que se dan de la visualización y las creencias sobre la naturaleza de las Matemáticas:

G: Pero lo que no puede pasar, creo yo. Es que en una asignatura haya que hacer 0+0=0. Demostración. Y en otra valga el teorema de malamente. [...] Tú te vuelves esquizoide. [...]¿Qué sí y qué no? ¿Cuáles son las reglas del juego? Eso son las reglas del juego. Algunos hablan de los postulados de Euclides. No son una cosa clara. Pero Hilbert definió los postulados en los que se apoya la Geometría. Y si quieres enseñar a la gente a discurrir, pues tienes que decirle primero cuáles son los axiomas y luego usarlos. #00:21:59-4# Como decía Hilbert en una frase bastante famosa... Mira, la intuición nada. Hay unas reglas de juego. Por ejemplo: por dos puntos pasa una única recta. Hay unas cuantas. Y ahora en cualquier argumento que hagas si cambias punto por ratón, recta por agujero y plano por pollo, tiene que seguir siendo verdad porque se está rigiendo por las reglas que dicen que por cada dos ratones hay un único pollo que pasa por ahí (Risas). No sé lo que he dicho... Claro. Es así, es así. Las Matemáticas son así, lo demás es una tontería. #00:22:47-6# (S120110120G).

4.2.4 Experimentación en el curso

En esta sección reflexionamos sobre la experimentación: la aplicación de los principios de diseño y las dificultades y percepciones de los estudiantes.

4.2.4.1 Aplicación y Valoración de los Principios de Diseño

La interacción entre los tres principios de diseño es fundamental y, a veces, casi inevitable. A pesar de ello, para facilitar el análisis, a continuación se reflexiona separadamente sobre cada uno de ellos. En particular se detallan: acciones a las que llevó cada principio de diseño, dificultades en su aplicación y reflexión sobre las causas de dichas dificultades, valoración de su eficacia en la mejora de la enseñanza de la visualización.

Primer Principio de Diseño: Aumento de la participación

El Primer Principio de Diseño es el siguiente:

> *Para favorecer la construcción individual y colectiva de significados se deben buscar otras formas diferentes de organizar la clase que aumenten la interacción social y la participación (como son el trabajo cooperativo y el debate científico), pues así se acercan las prácticas y el lenguaje del matemático experto a los estudiantes y en particular se posibilita la comunicación con y sobre la visualización.*

Este Principio de Diseño implica un cambio en la cultura de clase (Presmeg, 2006a). En la Narrativa (ver sección 4.2.1) se han explicitado indicadores de la cultura establecida. Para generar un cambio de cultura se usan las siguientes estrategias: (1) debates (preguntando por sus soluciones y pidiendo a un representante de cada tipo que diera un argumento); (2) elección de problemas mediante votación de los estudiantes y establecimiento previo del día en que los estudiantes saldrían a la pizarra a corregir (ver Semanas 5 y 6[79]); (3) trabajo en grupo (ver Semana 5, sección 4.2.1.2); (4) discusión colectiva previa a la resolución de los problemas, etecétera.

Aunque se establecen estas estrategias, crear un ambiente de participación no es fácil. Hay resistencias a salir a la pizarra el día preestablecido, provocadas por no haber realizado la tarea (Semana 5). Como consecuencia se modifica la estrategia dejándoles unos minutos de trabajo en clase (Semana 8 o 13). El trabajo en grupo se suprime después de la Semana 7, bien por razones de falta de tiempo o por influencia del número de estudiantes que asistían a clase.

Un aspecto que se observa que funciona es encargar apartados concretos a cada uno y que se comprometan a hacerlos para sus compañeros (Semana 16-17). También resulta positiva una actuación cercana y no dominante del profesor. A pesar de los obstáculos, se van consolidando dinámicas de participación importantes: las clases terminan convirtiéndose en espacios de discusión en torno a los problemas, donde todos pueden opinar y pensar en alto, y donde la profesora no es más que una mediadora de esa comunicación.

[79] Hace referencia a la Narrativa, sección 4.2.1.

En relación al objeto de estudio –la enseñanza de la visualización– este tipo de prácticas, más participativas, dan lugar a normas de clase que resultan favorables para el desarrollo de la flexibilidad cognitiva y, en particular, de la visualización:

1. El aumento de la participación favorece la aparición de mayor *diversidad de métodos de resolución*, especialmente cuando los estudiantes terminan adquiriendo las prácticas fomentadas por el profesor (buscar soluciones alternativas y hacer preguntas del tipo "*¿y si...?*"). En particular, surgen respuestas más intuitivas o incluso incorrectas ofreciendo la posibilidad de reflexionar sobre por qué unos métodos resultan más adecuados que otros. Si esto se hace aclarando adecuadamente las soluciones válidas, los estudiantes terminan siendo capaces de manejar sus intuiciones (ver Semana 17).
2. La interacción con los estudiantes a menudo desemboca en una *mayor explicitación*, obligando a hacer ostensibles más representaciones (a veces gráficas, para que lo entendieran mejor) o a explicar en voz alta las reglas de manipulación o las motivaciones que llevan a realizar una transformación determinada o a elegir cierto modo de pensamiento. Este es un hecho importante que también se observa en las clases más tradicionales (Figura 4. 17. b).

Segundo Principio de Diseño: Uso de diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento y atención explícita a su manejo

El Segundo Principio de Diseño lo formulamos como sigue:

> *Para favorecer la coordinación y la conexión de la diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento característicos del AL, éstos se deben utilizar y manejar flexiblemente comunicando explícitamente las relaciones existentes entre ellos; pues así se favorece su incorporación en la mente de los estudiantes facilitando la comprensión de la disciplina.*

Con objeto de desarrollar este principio en la experimentación se realizaron las siguientes acciones:

1. Presentación de los conceptos involucrados en diferentes formas explicando cómo pensar con cada una. Una oportunidad interesante para ello son los inicios de los temas, apoyados de un resumen en la pizarra, o los problemas basados en la aplicación de una definición formal (un ejemplo de ello ocurrió en la Semana 4 con el concepto de Aplicación Lineal, ver Figura 4. 23, o en la Semana 8 en el resumen sobre los espacios duales).
2. Atención especial al enunciado, interpretando sus elementos separadamente u observando las representaciones y el lenguaje con que está formulado (Semana 8). Se observa que la mayoría de las respuestas de los estudiantes utilizan el mismo registro del enunciado, generando bloqueos. Como estrategia se puede aludir a lo geométrico preguntando "*¿cómo sería geométricamente?*" (Semana 18).
3. Mostración simultánea de distintas representaciones y procesos de tratamiento y conversión de las representaciones comparándolas y prestando atención a aspectos técnicos mediante tablas, metáforas, diagramas, etcétera. Ejemplos

significativos de este uso de las tablas se observan en la Semana 5 (sobre el manejo de ecuaciones paramétricas e implícitas, Figura 4. 20) o en la Semana 6 (con la comparación del lenguaje conjuntista y de espacios vectoriales, Figura 4. 23). En otros casos se utilizaron metáforas (como para los Cocientes, ver sección 4.3.1.2).

4. Establecimiento de un lenguaje específico para hablar de las representaciones y de sus transformaciones: "*escritura matricial*", "*representación gráfica*", "*expresión algebraica*", "*ecuaciones implícitas o paramétricas*", "*coeficientes*", "*parámetros*", "*coordenadas* ($coord_{BE}$)", etcétera. Como se observa en estos ejemplos, la mayoría de términos empleados vienen de las Matemáticas. Sin embargo, en ocasiones es de utilidad adaptar conceptos provenientes de las investigaciones en EM sobre representaciones como "*registros*", "*conversión*" o "*representación* MACRO/MICRO (zoom)" (esta idea resulta especialmente útil para hablar de las diferentes representaciones de las matrices la Semana 4, para el Cociente la Semana 6 y 8 y para las formas del dual, las Semana 8 y 9).
5. Acompañamiento durante las partes más procedimentales de la resolución: aclarando notaciones, explicitando reglas de transformación, guiando la conducta de abducción ("*si hiciéramos esto, ocurriría ... y por tanto mejor hago...*"), explicitando procesos de tratamiento y conversión de las representaciones. Para ello son de utilidad los diagramas (Figura 4. 15. b), además del lenguaje específico mencionado anteriormente. Esto hay que tenerlo especialmente presente cuando sale algún estudiante a la pizarra, pues su capacidad para la explicitación del manejo de representaciones es menor.
6. Ejercitación de la flexibilidad mediante:
   - La comprobación de resultados (son útiles las representaciones gráficas y los diagramas, como se ve en el *Problema 8.12* en la Semana 8 y en el *Problema 7.7.* de la Semana 6 respectivamente).
   - El establecimiento de conexiones (por ejemplo, "*pasar de implícitas a paramétricas es resolver el sistema de coordenadas*", en la Semana 5, o varios métodos de probar igualdades en la Semana 15).
   - La reflexión sobre lo aprendido (Semana 5, tabla de cálculo de intersecciones y sumas según las ecuaciones que nos den los subespacios o varios métodos de probar igualdades en la Semana 15).

La explicitación del manejo de la visualización es compleja y supone algunos obstáculos. Entre ellos destacamos: (1) el consumo de tiempo , mayor que si se resuelve el problema de un único modo y no se explicita nada; (2) la inercia a utilizar siempre el mismo estilo de visualización, influenciada por la preferencia visual del profesor y las características homogéneas de los problemas Dichos obstáculos conducen a proponer dos acciones más:

7. Explotación de la reificación de procesos y visualizaciones para facilitar el aprovechamiento futuro del tiempo empleado en la explicitación de la visualización (por ejemplo, la Semana 16 se dedica un tiempo a la resolución gráfica de la desigualdad del *Problema 13.2* que después se aprovecha para el siguiente diciendo únicamente "*como antes*").

8. Realización de problemas variados, que incluyan actividades específicas de visualización (la homogeneidad de los problemas del curso conduce a reducir el nivel inicial de reflexión sobre los tipos de representaciones y el espíritu innovador en este sentido).

Tercer Principio de Diseño: Legitimación de la visualización.

El Tercer Principio de Diseño es:

> *Para lograr que la visualización sea una herramienta válida para razonar y que sirva de camino a la intuición, ésta debe legitimarse adecuadamente (cuidando mensajes y acciones en torno a ella), ya que permite el acercamiento a los estudiantes posibilitando su posterior desarrollo.*

Las acciones encaminadas a valorizar la visualización realizadas en la experimentación en las clases prácticas y en las tutorías son de distintos tipos: (1) uso deliberado de argumentos visuales e intuitivos; (2) explicitación de aspectos necesarios para la coordinación de representaciones y la construcción de imágenes mentales bien articuladas; (3) desarrollo de la flexibilidad a partir de diversos métodos de resolución y de comprobación; búsqueda del sentido de lo que se está haciendo; (4) y, sobre todo, planteamiento de actividades en las que se admite o incluso se pide el uso de la visualización (como el debate sobre los subespacios de IR^3 en la Semana 5 o el "Problema 7 con Ampliación", ver sección 4.3.2).

Fomento del pensamiento geométrico para resolver problemas	"Lo habéis pensado algebraicamente, vamos a verlo geométricamente."; "El dibujo convence de que no es cierto y ayuda a coger vectores"; "Pero este es un caso en el que viene bien pensar geométricamente." "Tenemos que verlo, creérnoslo y luego explicarlo bien" (S1720110525B). Noelia explica qué no entiende de un problema y B. traduce en un gráfico (IR^3) (S620110301B). "B: Hasta que no vi el dibujo no se me ocurrió, cuéntanoslo" (S620110301B).
Uso de la visualización para demostrar, ayudar a entender o a recordar	"Imaginaos una caja aquí (en la esquina de la clase)", luego dibuja para explicar que los conjuntos acotados no son subespacios". Usa razonamiento geométrico para demostrar (S520110223B). Explica qué van a usar del dual, "se va a usar de forma más bien mecánica", Pero decide explicar más conceptualmente con un diagrama (MICRO Y MACRO); "los problemas son fáciles, entenderlo no tanto" (S820110316B). Contra el aprendizaje mecánico: "No os lo aprendáis de memoria. Aquí no vale la regla nemotécnica, se mantiene el orden" (S1520110510B); "Esto os lo podéis aprender de memoria pero yo me lo escribo así y me acuerdo" (S1620110517B)..
Puesta en valor de la intuición como fuente de inspiración	"Nos lo podemos creer por lo que decía Ángel; suena razonable" (S1720110524B). *Problema 8.1* ¿son aplicaciones lineales? "¿qué os dice la intuición?" (S620110302B). "Según la intuición inicial, se demuestra (si creéis que es verdad) o se busca un contraejemeplo (si creéis que es falso)" (S420110215B).
Mensaje a favor del rigor y la formalización	"Eso sería tu intuición, ¿sabrías demostrarlo?" (S620110301B). Pequeño debate sobre si algo es lineal o no, una alumna razona geométricamente "es proyección" y B. dice "bien, ahora hay que comprobar" (S620110302B). "Os puede parecer un poco absurdo hacer esto, pero hay que demostrar" "Porque imaginaos..." e interpreta la situación geom. para mostrar cómo la intuición puede fallar (S520110222B).
Advertencia sobre el uso de la visualización	"No os fieis de la vaguería y la intuición con las cuentas" (S420110215B). OBS: "En IK^2 se puede dibujar, en otros mundos no" Rigor: "la formal es la importante"-:"El gráfico os puede engañar" (S620110302B).
Limitaciones de la Geometría frente al AL	*Problema 13.6* (IR^2). B. se detiene en medio del problema para explicar cómo se podría haber hecho un cambio de base mediante razonamiento geométrico (con Pitágoras) pero dice "es un rollo, fijaros qué bien nos ha venido tener matrices". (S1620110518B).

Figura 4. 44: Temas surgidos en los mensajes, normas y creencias de las clases de prácticas.

Estas acciones se acompañan de mensajes que incluyen normas y creencias en torno a la visualización (ver Figura 4. 44). Pese a ser intencionada la experimentación de una enseñanza de la visualización, el mensaje resultante de las clases de prácticas no difiere mucho del del curso (Figura 4. 43): aunque en la forma es algo más positivo (pues utiliza más argumentos visuales), el fondo es el mismo y el argumento implícito imperante es "*la visualización está bien, pero al final hay que demostrarlo formalmente*".

Esta tensión generada por equilibrar lo formal y lo intuitivo se hace patente en la clase con mensajes a veces contradictorios ("*está bien tener la idea intuitiva, pero luego hay que justificar*", Semana 4). Hay varias razones concienciadas en esta tensión. Primero, elementos institucionales como la evaluación (ver narración sobre la *Tutoría Final*, sección 4.2.1.5, y los resultados a la "*Cuestión 6*", 4.2.4.2). Segundo, las propias creencias sobre qué son las Matemáticas, según se recoge en el Diario de Observación de la Semana 6:

> *A mí misma me ocurre que no sé hasta dónde vale la pena ser formal o no. De tanto visualizar, intuir, etcétera, siento que eso es lo importante, y no tanto probar cada implicación. Esto, en parte, es justo lo contrario a lo que hace G. ¿Estoy siendo poco matemática? ¿Poco rigurosa? ¿Qué significa ser matemática? A veces, por miedo a pecar de ser demasiado intuitiva y no rigurosa, hago a Ana demostrar lo del v_1+w_1 [que si los dos no están en un subespacio, su suma tampoco] pero ¿es realmente necesario? ¿No bastaba con verlo como ella lo ha dicho? ¿Qué mensaje he dado con eso?*

Un tercer motivo proviene de los obstáculos del uso y la explicitación de la visualización, mencionados anteriormente. Por último, hay un cuarto motivo ligado a las dificultades de los estudiantes generadas por el exceso de confianza en la intuición. Por ejemplo, en el examen del primer parcial confunden la idea intuitiva que se les había dado en las clases prácticas sobre los subespacios, como algo "*encerrado en sí mismo*", con algo "*contenido*" dentro de un espacio vectorial (Semana 4). Hechos como este ponen de manifiesto que realmente es necesaria una buena reflexión previa tanto sobre qué necesitan los estudiantes para comprender la visualización como sobre los mecanismos de control necesarios para utilizarla con éxito.

4.2.4.2 Dificultades y Percepciones de los Estudiantes

La afirmación anterior dirige la atención de nuevo hacia los estudiantes. En esta sección se revisan los datos recogidos durante la experimentación que aportan información sobre sus dificultades y percepciones en torno a la misma. Ésta es especialmente relevante para revisar la mejora de la enseñanza de la visualización

Dificultades de los estudiantes y visualización

Las dificultades que se describen proceden de la observación de las clases, principalmente de las prácticas, así como de los datos de las tutorías. Se han agrupado en cinco categorías (Figura 4. 45). La primera y la tercera categoría son las relacionadas con la falta de visualización. Estas dificultades podrían explicar: a) el rechazo de los estudiantes a los problemas abstractos, reconociendo en varias ocasiones que les parecían más difíciles los problemas teóricos planteados en el registro simbólico (Semana 15); b) o el rechazo del formalismo en favor de la visualización cuando se les da oportunidad (Semana 8).

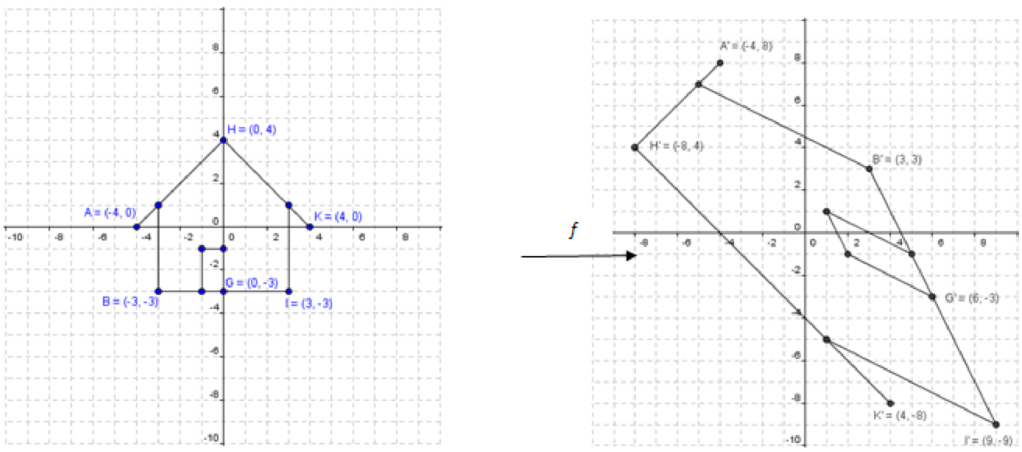
Dificultades con el manejo de representaciones	Desconocen notaciones, malinterpretan representaciones como las matrices con puntos o algunas gráficas, hacen las manipulaciones de forma mecánica cometiendo errores, no saben cómo pasar de un tipo de ecuaciones a otro, dudan sobre cómo hallar la matriz de una aplicación, no son capaces de invocar nuevas representaciones, identifican objetos diferentes que tienen representaciones parecidas, etc.
Dificultades con el PMA	No saben distinguir cuándo hay que demostrar o buscar contraejemplos, usan de forma incorrecta las leyes de la lógica, utilizan afirmaciones sin haberlas demostrado, dudan en el manejo de las definiciones, hacen conexiones intuitivas entre conceptos que no son capaces de justificar.
Dificultades con la intuición	Afirman no entender algo porque no son capaces de imaginarlo, responden incorrectamente guiados por una intuición vaga, no son capaces de traducir formalmente una metáfora, confunden conceptos similares a otros guiados por imágenes mentales poco definidas (unión con $\oplus$).
Dificultades con las normas	Preguntan qué hay y qué no hay escribir (cuantificadores), dudan de si deben demostrar o explicar "de palabra", no distinguen qué contenidos son más importantes.
Dificultades con la autonomía	Su trabajo depende mucho de los encargos del profesor, uso desmedido de las tutorías.

Figura 4. 45: Categorías de dificultades observadas en los estudiantes ordenadas por frecuencia (arriba las más frecuentes).

Otro tipo de dificultades son las que surgen cuando se introduce visualización en la actividad de los estudiantes. Un buen ejemplo de ello lo ofrecen las respuestas al "*Problema 7 con Ampliación*" (ver sección 4.3.2.1) y a la "*Cuestión 6*" (ver Metodología, sección 2.4.3.1, Figura 4. 46). Éstas últimas se revisan a continuación.

Responde a la siguiente cuestión por detrás y en hojas independientes a las respuestas de las otras cuestiones.

(6) **(0.6 puntos)** Sea el espacio euclídeo IR^2 con el producto escalar usual y sea el siguiente endomorfismo $f: IR^2 \to IR^2$ que envía el primer conjunto de vectores en el segundo:



a) Diagonaliza gráficamente el endomorfismo, esto es, encuentra y dibuja una base $B = \{u_1, u_2\}$ tal que $M_f(B)$ es diagonal y escribe dicha matriz. Explica el procedimiento seguido para encontrar ambas, la base y la matriz.
b) Escribe la matriz de f respecto de la base canónica $\mathcal{E}$ de IR^2 y encuentra una matriz P invertible tal que $P^{-1} \cdot M_f(\mathcal{E}) \cdot P$ sea diagonal.
c) ¿Es f un endomorfismo autoadjunto? ¿Por qué?

Figura 4. 46: Enunciado de la cuestión de visualización incluida en el Examen Final.

De los 27 estudiantes que se presentaron al Examen Final sólo 12 responden esta pregunta. Los resultados de sus respuestas no son muy exitosos (Figura 4. 47). El apartado que obtiene resultados más bajos es el a)[80], correspondiente al pensamiento visual (se pide "*diagonalizar gráficamente*"), y el que más altos es el b), relativo al pensamiento algebraico. Este hecho pone de manifiesto la falta de comprensión y la dificultad de los estudiantes en construir un esquema conceptual rico y bien articulado (pues en los dos apartados se pedía lo mismo –diagonalizar– pero desde dos puntos de vista diferentes). Gran parte de los estudiantes responden primero el apartado algebraico, invirtiendo el orden natural del enunciado. Este resultado evidencia una preferencia por el modo de pensamiento algebraico, confirmado por las respuestas del apartado c) que admite una respuesta tanto visual como algebraica (ver Figura 4. 46). Sólo tres estudiantes llegan a responderlo y todos ellos lo hacen de forma correcta utilizando el argumento algebraico. Esta preferencia se puede explicar de dos formas diferentes: (1) el modo de pensamiento algebraico es el que resulta más fácil o natural a los estudiantes (quizá por estar más acostumbrados a él); (2) los estudiantes evitan intencionadamente el uso del pensamiento visual porque creen que es lo que se espera de ellos o incluso les han penalizado anteriormente por utilizarlo en situaciones similares de evaluación

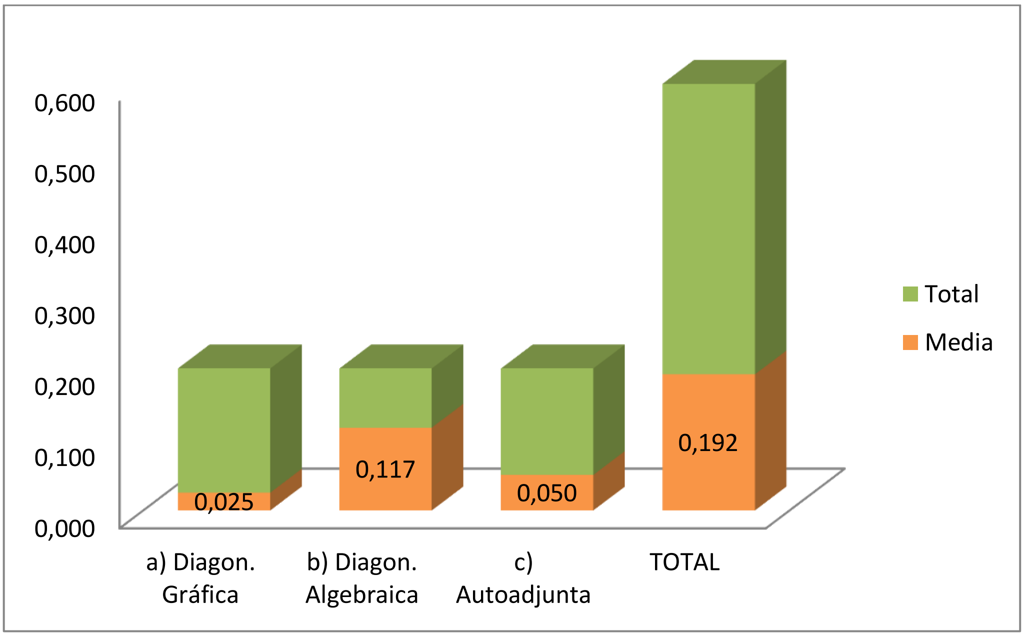


Figura 4. 47: *Resultados a la pregunta de visualización incluida en el Examen Final*. De los 27 estudiantes que se presentaron sólo 12 la intentaron (hacemos notar que, algunos con mejor rendimiento no están incluidos, al aprobar el curso por parciales y no presentarse al Examen Final). La pregunta, voluntaria, califica con un 0,6 puntos adicionales sobre la nota de la parte teórica del Examen (ver Anexos), por lo que cada apartado son 0,2 puntos (en verde). Las tres primeras columnas muestran los resultados medios por aparatados y la última la calificación media global (en naranja).

Estos resultados muestran dificultades con el uso de la visualización, debidas a deficiencias en el manejo del registro gráfico y al rechazo de los métodos visuales. Además apuntan otra cuestión crucial en la mejora de la enseñanza de la visualización: la inclusión de la visualización en la evaluación debe hacerse con precaución. En caso contrario, puede resultar perjudicial para los estudiantes (como hubiera sucedido con la Cuestión 6 si hubiese sido obligatoria).

[80] Sólo tres estudiantes dan una respuesta que se considere visual (ninguno correcta). De éstos, dos habían participado en algún momento en el Grupo de Prácticas.

Percepciones de los estudiantes

En la influencia de estas dificultades sobre el aprendizaje de los estudiantes es importante tener en cuenta su percepción de la visualización, ligada al perfil visualizador. Por ejemplo, en la tutoría de la Semana 9 una estudiante pregunta por las proyecciones y las simetrías en respuesta a una tarea de la clase de teoría. Se trató de orientarla mediante una representación gráfica, pero ella reaccionó diciendo que "*eso le liaba más*". En cambio, otros estudiantes piden "*tutorías visuales*", afirmando que éstas les resultan de ayuda a la comprensión. Estos diferentes comportamientos ante la visualización se constatan en las tutorías sobre el "*Problema 7 con Ampliación*" (ver sección 4.3.2). No obstante, el rechazo a lo visual no era lo más habitual en las clases (en contraste con lo observado en las respuestas de los exámenes, ver sección anterior). En general, los estudiantes acogen bien e incluso agradecen el uso de la visualización (ver Figura 4. 48), incorporándola ellos mismos en sus respuestas.

Pregunta	*"¿Crees que sería interesante incorporar al curso de Álgebra Lineal actividades del tipo que acabas de realizar en este cuestionario, incluyendo los applets para el ordenador? ¿Por qué?"*
Respuestas	*No estoy muy seguro, supongo que hay dibujos que quedan demasiado mal a mano, aunque lo que hacía este applet lo puedo ver igual de bien dibujándolo yo.* *Creo que además de interesante sería muy útil, ya que nos podrían ayudar a entender mejor ciertos conceptos.* *Si podría ser interesante hacer de vez en cuando algún ejercicio de estos para ver cómo va uno y saber si está estudiando bien las cosas o le tiene que dar un giro radical a la forma de estudiar. Respecto a los applets, ha buscado información pero no me enteraba de mucho porque no estoy muy puesto en esto del ordenador, solo sé lo justo*[81]*.* *Si, pues ayuda a comprobar la asimilación de conceptos así como a hacer más visual la asignatura.* *No sé, creo que hay material de sobra, y además, ya hay mucho temario y muchas actividades que realizar durante el curso, como para cargar más a los alumnos.* *Sí, porque sirven para aclarar conceptos que simplemente con la teoría no quedan muy asentados.*

Figura 4. 48: Respuestas a una de las preguntas finales de los estudiantes del Gran Grupo al "Cuestionario de Moodle" (ver el diseño en la sección 2.4.3.2 y el enunciado en los Anexos). Aunque la pregunta era amplia y las respuestas son diversas, se pueden encontrar apoyos a la enseñanza de la visualización (marcados en rojo).

Finalmente, se recoge una reflexión de un alumno del Grupo de Prácticas un año después de la experimentación. Nos encontramos en la Facultad y dijo "*¡ya he entendido por qué decías de que la visualización es tan importante en Matemáticas!*". Ante esta exclamación tan positiva se le solicitó que pusiera sus pensamientos por escrito. El resultado es un breve ensayo sobre lo importante que es para él la visualización como ayuda a la comprensión y sobre el papel que debía tener en la enseñanza, teniendo en cuenta sus "*peligros*". El análisis que hace de diversos ejemplos muestra no sólo una habilidad visual considerable sino también un elevado grado de conciencia sobre su manejo (ver Anexos).

[81] Este estudiante tuvo dificultades para abrir y manipular el applet.

4.2.5 Resumen e Implicaciones para la Investigación. Primeras Conclusiones

La enseñanza de la visualización es un fenómeno complejo, transversal y situado en un contexto y momento determinado. Depende de factores como: el contenido; los agentes (con un conocimiento previo determinado y con un perfil visualizador marcado por sus creencias sobre las Matemáticas, la Educación y la visualización); el medio con que se visualiza; el propósito y estilo docente; y la cultura y las prácticas de clase (las normas, el grado de participación fomentado). También hemos detallado posibilidades y obstáculos de la enseñanza de la visualización. Gracias a la observación de las clases se han detectado cinco modelos de visualización: manejo y coordinación de representaciones, pensamiento diagramático, desarrollo de la intuición y las imágenes mentales, uso de la Geometría y fomento de la flexibilidad. Los modelos se han enumerado según su frecuencia de aparición en el curso, aunque el último modelo es más difícil de cuantificar porque involucra a los demás. Los temas relativos a cada modelo sirven para describir su forma de uso en el curso. En general, el modelo más explicitado es el de manejo de representaciones seguido del pensamiento geométrico. El resto se utiliza de modo más vago, a menudo con fines comunicativos.

La experimentación gira en torno a los tres principios de diseño formulados en la fase anterior de investigación y ha posibilitado recoger información sobre las dificultades y percepciones de los estudiantes. Éstas varían según el perfil visualizador de los estudiantes. Se han detectado dificultades relacionadas con la visualización debidas a: deficiencias en el manejo de los registros (del gráfico en particular); al uso incontrolado de la intuición; y al rechazo de la visualización (bien por falta de costumbre o por no considerarla válida). Las acciones promovidas por los principios de diseño son adecuadas para hacer frente a estas dificultades, pues fomentan: (1) la habituación de los estudiantes a los métodos visuales (a través de los cambios de cultura de clase derivados del primer y el Tercer Principio de Diseño); (2) un entrenamiento específico que les ayude a controlar las dificultades con el manejo de dichos métodos (contemplado en el Segundo Principio de Diseño); (3) una legitimación de la visualización que muestre a los estudiantes la validez de los métodos visuales y les ayude a discernir cuándo es conveniente usarlos (como la propuesta por el Tercer Principio de Diseño). A pesar de ello, a la luz de los resultados de la experimentación, los principios pueden revisarse y reformularse de modo que se adecúen mejor al contexto.

La aplicación del Primer Principio de Diseño da lugar a las siguientes recomendaciones:

- Para lograr unas prácticas participativas eficaces (que sean favorables para enseñar a visualizar) es importante hacer una buena anticipación de los problemas que se van a discutir (métodos de resolución, posibles dificultades de los estudiantes) porque así se aumenta la seguridad sobre el problema, la capacidad para mediar (sin ser protagonista) y el aprovechamiento del tiempo.
- Para favorecer la flexibilidad cognitiva en clase es interesante fomentar la búsqueda de diversidad de métodos y representaciones (no necesariamente correctos o rigurosos), favorecer reflexiones en torno a ellos y terminar

formalizando bien la o las respuestas válidas porque los estudiantes aprenden a imitar este tipo de prácticas adquiridas en clase.

- Para enseñar a visualizar es importante estar presente en la interacción con los estudiantes pues en ella surgen muchas oportunidades de explicitación de elementos relevantes (obligando a exhibir más representaciones, a explicar reglas de manipulación o a exteriorizar motivaciones para realizar una transformación determinada o a elegir cierto modo de pensamiento).

La aplicación del Segundo Principio de Diseño hace recomendables las siguientes prácticas y acciones

- Para dotar a los estudiantes de múltiples representaciones y mostrar cómo pensar con cada una de ellas es útil aprovechar los inicios de tema y la lectura de los enunciados porque en este momento es cuando se presentan los conceptos que se van a manejar.
- Para evitar que los estudiantes utilicen siempre el mismo tipo de representación es importante plantear actividades con diversidad de representaciones y motivarles a cambiar de punto de vista ya que éstos tienden a repetir el lenguaje que ven en los enunciados; así también se evita caer en la inercia que puede surgir en torno al manejo de representaciones en clase.
- Para ayudar a los estudiantes a elegir qué representación es más adecuada hay que compararlas, distinguir sus elementos y resaltar las relaciones relevantes representadas en ellas (resultando de utilidad las tablas, metáforas y diagramas) porque así además se les enseña prácticas necesarias para la resolución de problemas.
- Para explicitar aspectos del manejo de representaciones es crucial desarrollar un lenguaje específico (inspirado en las Matemáticas o en las investigaciones de EM), adaptado al contexto y compartido por todos los componentes de la clase, porque sólo así se puede hablar, comprender y compartir conocimiento sobre ello; y, a través de la reificación de procesos y visualizaciones, aprovechar para ocasiones futuras el tiempo empleado en ello.
- Para hablar de transformaciones de representaciones, en las partes más procedimentales de la resolución de problemas, este lenguaje específico también es útil y necesario pues, junto a los diagramas, ayuda a distinguir procesos y representaciones (unas de otras).
- Para terminar el problema se puede proponer la búsqueda de otros métodos de resolución o de comprobación, aprovechar para dar sentido (resultando útiles las interpretaciones gráficas y los diagramas), explicitar conexiones o plantear actividades de reflexión porque así se favorece la comprensión y la flexibilidad cognitiva.
- Para que la preferencia visual del profesor no domine el manejo de representaciones de la clase es necesaria una reflexión previa por su parte y sobre todo la interacción con los estudiantes, pues éstos tienen perfiles que

complementan las explicaciones del profesor y sacan a la luz dificultades que de otro modo podrían pasar desapercibidas.

- Para que las explicaciones de los estudiantes sean suficientemente completas es necesaria la mediación del profesor, pues de lo contrario sus explicaciones son pobres en términos de explicitación de manejo de representaciones pudiendo resultar perjudicial para los demás.

Por último, los obstáculos y las tensiones expresadas en torno al Tercer Principio de Diseño indican la complejidad de plantearlo para mejorar la enseñanza de la visualización en un contexto de investigación como el nuestro. No obstante, nos parece pertinente reseñar algunas acciones intermedias irrenunciables:

- Para lograr cambiar la visión sobre la visualización dominante en el curso habría que plantear una reflexión colectiva (involucrando las actividades que se plantean y la evaluación) para no entrar en contradicción con aspectos institucionalizados.
- Para conseguir una actitud coherente en la enseñanza de la visualización es importante que los docentes tengan en cuenta sus creencias sobre las Matemáticas y la visualización, pues de lo contrario se corre el riesgo que la concepción epistemológica del docente se imponga.
- Para enfrentar un manejo “naif” de la visualización (tanto por parte de estudiantes como de docentes) es importante documentar su complejidad porque así se enfrenta el rechazo que ésta puede generar y su inclusión en explicaciones de forma inútil.
- Para saber cuándo y cómo utilizar con éxito la visualización en clase es crucial anticiparse al conocimiento teórico y procedimental que los estudiantes necesitan, así como sobre los mecanismos de control necesarios en su manejo porque sólo así se podrán explotar al máximo sus posibilidades tanto matemáticas como didácticas.

4.3 FASE III: EL CASO DE LOS ESPACIOS VECTORIALES COCIENTE

En las secciones anteriores hemos visto los resultados de la investigación centrados en el tipo de imágenes que surgen en clase y a las acciones docentes realizadas para ayudar a los estudiantes a incorporar dichas imágenes en sus esquemas mentales. Pero bajo esta perspectiva global, las relaciones entre la enseñanza de la visualización y la comprensión de los conceptos quedan ocultas. Para estudiarlas es preciso fijar un contenido específico, pues sólo así es posible construir el esquema conceptual asociado, herramienta clave para explorar dicha interacción entre visualización y comprensión (ver Metodología, sección 2.3.2.3).

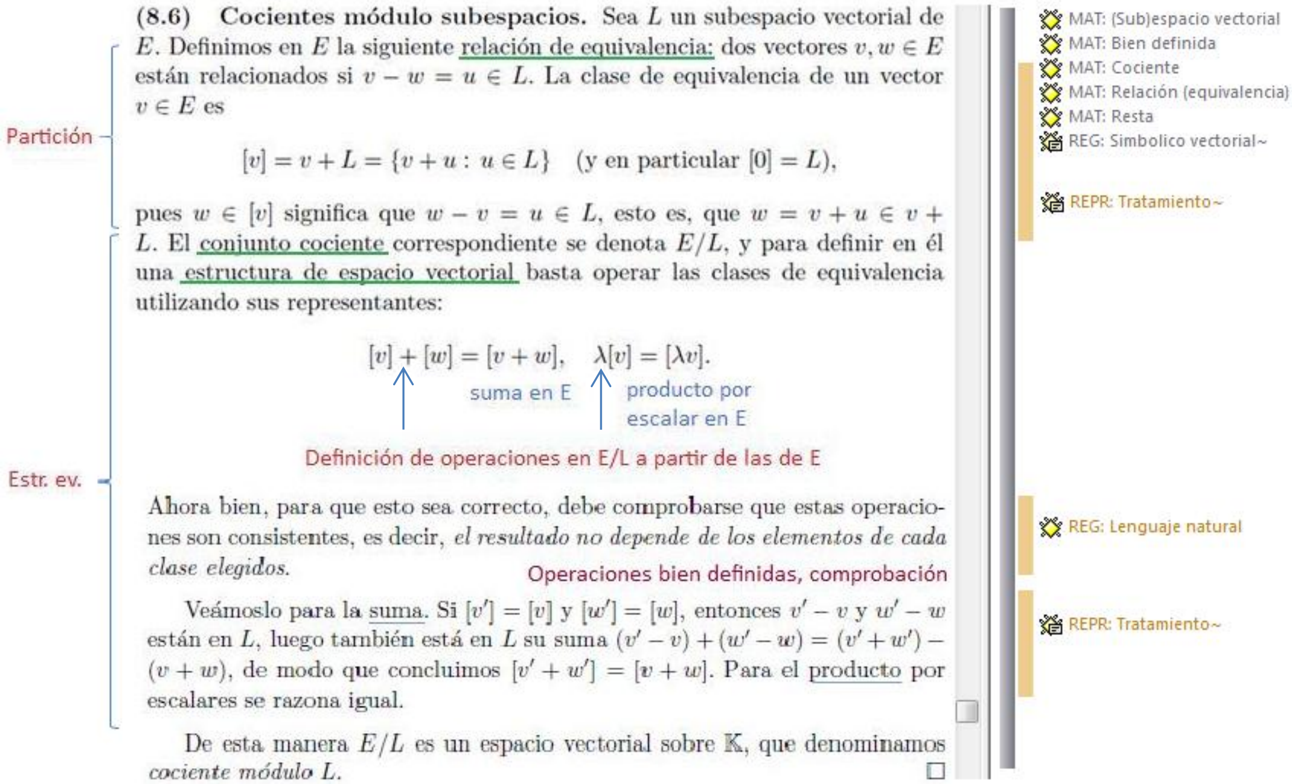
Elegimos los Espacios Vectoriales Cociente (EVC) por diversas razones: (1) los EVC son un concepto clave en la trayectoria de formación de los estudiantes pero, junto a los espacios duales, son uno de los conceptos que más dificultades les provoca; (2) los EVC es el concepto que acumula un mayor número de episodios visuales (tanto en las clases teóricas como en las prácticas) ofreciendo un entorno rico de análisis; (3) la inestabilidad puesta de manifiesto entre comprensión y visualización en el aprendizaje de este concepto (aunque se enseña con visualización los estudiantes tienen muchas dificultades con su comprensión), aparentemente contradictoria con la postura teórica inicial que suponía que a más visualización le debería corresponder una mejor comprensión. Estas razones nos llevan a tratar de responder a las siguientes preguntas: *¿Qué hace de los EVC un concepto tan difícil de enseñar y de aprender? ¿Cómo lograr una enseñanza más eficaz de este concepto?*

Este capítulo se estructura en tres secciones: la primera presenta el concepto matemático de los EVC así como su enseñanza y aprendizaje en el curso observado; la segunda, trata sobre la actividad experimental, describiéndose su proceso aplicación y evaluación; y por último, en la tercera, se trata de dar respuesta a las cuestiones planteadas sobre el concepto. En particular, se establece el conocimiento que necesita el profesor (ver Marco Conceptual, sección 3.2.1.3) para enseñar a visualizar los EVC y se reflexiona sobre los principios de diseño de actividades o materiales.

4.3.1 Los EVC como Concepto Matemático: su Enseñanza y Aprendizaje

Para responder las preguntas anteriores, los Estudios Epistemológico e Institucional se amplían y los datos recogidos durante la Fase II se releen, focalizando en los EVC (ver Metodología). La triangulación de todos estos datos permite: detectar concepciones, representaciones y modelos de visualización relativos a los EVC; analizar cómo éstas se emplean en el curso para enseñar el concepto; contrastar estos resultados con las dificultades de aprendizaje observadas en los estudiantes. A continuación se revisa cada uno de estos aspectos en detalle, siguiendo una evolución lógica de los contenidos matemáticos: definición formal de los EVC, otros puntos de vista y concepciones de los Cocientes en AL y los Cocientes en el horizonte.

4.3.1.1 La Definición Formal de EVC



(8.6) Cocientes módulo subespacios. Sea L un subespacio vectorial de E. Definimos en E la siguiente relación de equivalencia: dos vectores $v, w \in E$ están relacionados si $v - w = u \in L$. La clase de equivalencia de un vector $v \in E$ es

$$[v] = v + L = \{v + u : u \in L\} \quad \text{(y en particular } [0] = L),$$

pues $w \in [v]$ significa que $w - v = u \in L$, esto es, que $w = v + u \in v + L$. El conjunto cociente correspondiente se denota E/L, y para definir en él una estructura de espacio vectorial basta operar las clases de equivalencia utilizando sus representantes:

$$[v] + [w] = [v + w], \quad \lambda[v] = [\lambda v].$$

Ahora bien, para que esto sea correcto, debe comprobarse que estas operaciones son consistentes, es decir, *el resultado no depende de los elementos de cada clase elegidos.*

Veámoslo para la suma. Si $[v'] = [v]$ y $[w'] = [w]$, entonces $v' - v$ y $w' - w$ están en L, luego también está en L su suma $(v' - v) + (w' - w) = (v' + w') - (v + w)$, de modo que concluimos $[v' + w'] = [v + w]$. Para el producto por escalares se razona igual.

De esta manera E/L es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, que denominamos *cociente módulo* L. □

Figura 4. 49: *Análisis epistemológico de la Definición Formal de los EVC tal y como aparece en el Libro de Texto de la asignatura* (Fernando et al., 2010, pp. 175–176). La Definición Formal del Cociente se introduce dentro del Capítulo II en la Unidad 8 sobre *Operaciones con subespacios* (Figura 4. 5) con la siguiente frase: "*Nos queda por introducir una última operación, que es de naturaleza algo más abstracta* (p.175)" En cuanto al tipo de representaciones utilizadas para referir esta definición se observa un predominio del registro simbólico mezclado con lenguaje natural. Se introducen nuevos símbolos o notación como *E/L* y, para las clases de equivalencia, *[v], v+L* que se explican a través de $\{v + u : u \in L\}$. Por tanto, las clases de equivalencia se describen con tres representaciones simbólicas diferentes. Hay tratamiento del registro simbólico en las comprobaciones para: mostrar la equivalencia de las tres representaciones, comprobar que la suma de clases está bien definida.

Los EVC no siempre forman parte de los temarios de AL. De los 20 **libros analizados** (ver los criterios de selección en Metodología, sección 2.4.2.1), sólo 8 los explican de forma explícita, dedicándoles una sección específica (Castellet & Llerena, 1996; Chevallet et al., 1984; Lin, 2005; Lipschutz, 1996; Merino & Santos, 1999; Robinson, 2006; Rojo, 2001; Sernesi, 1993). De los 12 restantes, la mitad no tratan el Cociente en absoluto (Banchoff & Wermer, 1992; Farin & Hansford, 2005; Fletcher, 1972; Pedoe, 1963; Strang, 2005; Uhlig, 2002) y la otra mitad o bien los trata de forma muy escueta como nota al margen junto a los apartados de Variedades Afines y preimágenes de una Aplicación Lineal (Burgos, 2006) o bien trata conceptos relacionados con los EVC pero sin hacer mención directa de éstos: Envoltura Lineal o Base Módulo un Subespacio (Smith, 1998) (ver Figura 4. 74. 1), conjunto de soluciones de Sistemas no Homogéneos (Hernández, 1998; Lay, 1994; Shifrin, 2002) (ver Figura 4. 60. 3), Relaciones de Equivalencia, Particiones y Representantes (Hefferon, 2008) (ver Figura 4. 81). Los libros que explican los EVC (la mayoría del Bloque I, ver sección 2.4.2.1), lo hacen mediante dos tipos de presentaciones formales: una más *algebraica*, dentro de la teoría axiomática de Espacios Vectoriales; otra más *geométrica*, dentro de la teoría de los Espacios Afines. Se ha tomado como ***Definición Formal de los EVC*** la aproximación más algebraica (Figura 4. 49), ya que es la que sigue el curso observado. La aproximación más geométrica se explica más adelante, junto a otras posibles concepciones y representaciones de este concepto (ver sección 4.3.1.2).

Conocimiento matemático necesario para comprenderla

En estudios previos sobre el concepto de *Grupo Cociente*, desarrollados dentro de la teoría APOS, se señala que este concepto se adquiere como resultado de la coordinación de tres esquemas: el de las *Clases de equivalencia*, el de las *Operaciones Binarias* y el de *Grupos* (Asiala et al., 1997, p. 279). Estos resultados se pueden extrapolar al contexto de los EVC. En la Figura 4. 49 se muestra la definición moderna acordada actualmente para este concepto tal y como aparece en el Libro de Texto de la asignatura. Ésta se basa en dos ideas fundamentalmente: (1) construcción de un Conjunto Cociente a partir de una relación de equivalencia definida en este caso por un subespacio vectorial dado; (2) dotación de una estructura de Espacio Vectorial al definir operaciones heredadas del espacio vectorial de partida. Así, los EVC se introducen en el Libro de Texto del curso observado (Fernando et al., 2010) como un ***Conjunto Cociente o Partición con una Estructura Heredada de Espacio Vectorial***, concepción que se puede generalizar para definir cocientes en relación a cualquier otro tipo de estructura algebraica como los Anillos, los Ideales, los Módulos, los Cuerpos, las Álgebras, etcétera. A continuación se profundiza en cada una de estas dos ideas, prestando especial atención a su desarrollo histórico.

Noción de Partición y de relación de equivalencia. Relación con la Teoría de Conjuntos.

El primer paso que se da en la definición es establecer una *Relación de Equivalencia*. Actualmente se definen las *relaciones de equivalencia en un conjunto* como aquéllas que cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Pero esto no siempre ha sido así. Según Bourbaki (1972) uno de los primeros ejemplos de "Cociente" de una ley de composición por una relación de equivalencia aparece en los *Elementos de Euclides*, dentro del desarrollo de la teoría de magnitudes, cuando éste demuestra que el producto de dos razones de magnitudes es conmutativo y que además es independiente de la forma en que aparezcan estas razones (p. 75). También aparece la noción de relación de equivalencia en torno a las formas cuadráticas con Lagrange (p.79). No es hasta finales del s. XIX cuando se empieza a entender la utilidad del concepto de *equivalencia* (Nicholson, 1993).

Esta comprensión proviene de diferentes contextos. En torno al 1884, Frege contempla la igualdad de números como una correspondencia uno a uno y, aunque no define una relación de equivalencia como tal, sí que es consciente de su importancia. Cantor, en su estudio de los números transfinitos, que culmina con dos publicaciones de memorias en 1895 y 1897, obtiene una idea similar que sirve para definir una equivalencia de conjuntos (la cual utiliza para establecer los números cardinales). Dedekind llega al concepto en un trabajo sobre la naturaleza y el significado de los números reales, publicado en 1888 como parte de sus investigaciones en torno a las fundaciones del Análisis. En él, este autor define dos sistemas como *equivalentes* cuando existe una biyección entre ellos, permitiéndole separar todos los sistemas en *clases* (Nicholson, 1993, pp. 75–76). Así se observa que la idea de *relación de equivalencia* surge esencialmente como una extensión de la idea de igualdad, pensamiento que puede utilizarse actualmente en la enseñanza para complementar a la Definición Formal (Hamdan, 2006). Una vez introducida esta idea para la noción de equivalencia, se puede esperar que, como le ocurre a Dedekind, no cueste demasiado darse cuenta de que ésta establece un criterio válido para realizar una clasificación en un conjunto en lo que actualmente se denominan *Clases de Equivalencia* (ver definición de la Figura 4. 50)

Sea S una relación en el conjunto A. Se dice que S es *reflexiva* cuando para cada $p \in A$ se verifica pSp. (Es decir, el par (p,p) está en el subconjunto $S \subset A \times A$). Se dice que S es una relación *transitiva* cuando se cumple: si mSn y nSp entonces mSp. Se dice que S es una relación *simétrica* cuando se cumple: si mSn entonces nSm. Se dice que S es una relación *de equivalencia* cuando es reflexiva, transitiva y simétrica.

Si en un conjunto X se tiene una relación de equivalencia, que denotaremos por $\mathcal{R}$, para cada $m \in X$ el subconjunto $[m] = \{p \in X \mid m\mathcal{R}p\}$ de todos los elementos que se relacionan con m se denomina *clase de equivalencia de m*. En el ejercicio anterior has determinado, para la relación dada, las clases de equivalencia de algunos enteros.

Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre el conjunto X, el conjunto de las clases de equivalencia se denomina *conjunto cociente*. Lo escribiremos $X/\mathcal{R}$. Para la relación de los dos ejercicios precedentes, $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\mathcal{P}, \mathcal{I}\}$, donde $\mathcal{I}$ es el conjunto de los números enteros impares y $\mathcal{P}$ el de los enteros pares.

Figura 4. 50: *Definición formal de Relación de Equivalencia, Clase de Equivalencia y Conjunto Cociente* (no se refiere como Partición) dada en las hojas de problemas de la asignatura de Matemáticas Básicas[82].

Sin embargo, el siguiente paso es más complicado y de hecho fue y es, junto a la noción de equivalencia, uno de los problemas principales para avanzar en la comprensión de la definición (Nicholson, 1993). Consiste en reconocer el resultado de esa clasificación como un nuevo conjunto al que se da el nombre de *Partición* o *Conjunto Cociente* (ver Figura 4. 50). La dificultad radica en que es necesario comprender que los elementos en la partición tienen diferente naturaleza que los elementos en el conjunto inicial: son subconjuntos de elementos originales. Así una ***Partición*** es un ***conjunto de conjuntos obtenido como resultado de una clasificación definida a través de una relación de equivalencia***. Recíprocamente, una partición de un conjunto determina en él una relación de equivalencia. Este resultado lo demuestra Van der Waerden (1950), en el primer capítulo de su *Álgebra Moderna* habla en términos de particiones (no utiliza el de "conjunto cociente") y prueba sus tres propiedades clásicas: (1) las particiones son conjuntos divididos en clases mutuamente excluyentes; (2) las clases cubren por completo la partición; (3) todos los elementos de una clase son equivalentes entre sí y así pueden elegirse indistintamente como *representantes* de toda la clase (p.9-10).

Dotando de estructura a un conjunto cociente. Analogía con la Teoría de Grupos.

Una vez construida la partición anterior, según el subespacio L, la segunda gran idea detrás de la definición de EVC es la de ser consciente que el nuevo conjunto cociente hereda estructura de Espacio Vectorial del espacio original. Para ello es clave tener familiaridad con la noción de Espacio Vectorial en un sentido abstracto. Hay que percatarse de la posibilidad de definir las operaciones características de los espacios vectoriales sobre las clases de equivalencia. Además, es preciso plantearse la necesidad de

[82] http://www.mat.ucm.es/~angelin/labred/Hojas_de_problemas/conjuntos.pdf

demostrar que están bien definidas. Para profundizar en cómo estas ideas se desarrollan para los EVC se toman como referencia publicaciones relativas a los Grupos Cocientes, ya que no se han encontrado fuentes específicas sobre el desarrollo histórico y epistemológico de los EVC.

2.2.5 Subgrupos normales. El grupo cociente

Dado $H \leq G$, consideremos la relación de equivalencia dada por

$$x\,{}_H\!\sim y \;\Leftrightarrow\; xy^{-1} \in H.$$

La clase de equivalencia de x sería

$$Hx = \{hx : \; h \in H\},$$

pues

$$y\,{}_H\!\sim x \;\Leftrightarrow\; yx^{-1} = h \in H \;\Leftrightarrow\; y = hx \text{ con } h \in H.$$

Cada una de estas clases de equivalencia tiene exactamente $|H|$ elementos. En efecto, la aplicación

$$\begin{aligned} H &\to Hx \\ h &\mapsto hx \end{aligned}$$

es, por una parte, trivialmente sobreyectiva; por otra parte, si $hx = h'x$, entonces $(hx)x^{-1} = (h'x)x^{-1}$, y por tanto, $h = h'$.

Puesto que G es la unión disjunta de sus clases de equivalencia, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.24 (Teorema de Lagrange) *Sea G un grupo finito, y H un subgrupo suyo. Entonces, $|H|$ divide a $|G|$.*

DEMOSTRACIÓN. Si llamamos G/H al conjunto cociente de G por la relación de equivalencia ${}_H\!\sim$,

$$G/H = \{Hx : \; x \in G\},$$

como los Hx son una partición de G, cada Hx tiene $|H|$ elementos, y hay $|G/H|$ de ellas, tenemos que $|G| = |G/H||H|$. □

Definición 2.2.25 $H \leq G$ se llama *subgrupo normal* (y se escribe $H \lhd G$) si se verifica que

$$ghg^{-1} \in H \text{ para todo } g \in G,\; h \in H. \quad \square$$

Observación 2.2.26 Lo interesante es que si $H \lhd G$, entonces la operación de G le da estructura de grupo a G/H. En efecto, podemos definir el producto de dos clases mediante

$$(Hx)(Hy) = Hxy$$

sin que la definición dependa del representante elegido, ya que

$$(hxh'y)(xy)^{-1} = hxh'yy^{-1}x^{-1} = hxh'x^{-1} = h(xh'x^{-1}) \in H,$$

por ser H normal. □

Proposición 2.2.27 *Si $f : G \to G'$ es un homomorfismo, entonces* $\ker(f) \lhd G$.

DEMOSTRACIÓN. Para todo $x \in \ker(f)$ y $z \in G$ se verifica que

$$f(zxz^{-1}) = f(z)f(x)f(z)^{-1} = f(z)f(z)^{-1} = e',$$

luego $zxz^{-1} \in \ker(f)$. □

Figura 4. 51: *Introducción y definición de Grupo Cociente* (extraído de los apuntes de la asignatura de Elementos de Matemáticas).

En Teoría de Grupos, la definición estándar de *Grupo Cociente* (Figura 4. 51) aparece a finales del s. XIX en el trabajo de Hölder (Nicholson, 1993), aunque algunos autores como Bourbaki (1972) consideran que es Jordan quien la introduce. En cualquier caso, no fue el resultado del trabajo de una única persona, sino de diversos matemáticos de la talla de Galois, Betti, Jordan, Frege, Dedekind, Dyck, Fröbenius y Hölder. Según Nicholson (1993) la causa principal de este desarrollo tan tardío es precisamente la estrecha relación con la abstracción de la Teoría de Grupos, sin la cual resulta casi imposible concebir el Conjunto Cociente con una estructura de Grupo. Otra causa influyente es el desarrollo de una notación adecuada. Se pueden trasladar estas observaciones al contexto del AL y conjeturar el nacimiento de la *Definición Formal* de EVC (Figura 4. 49) entre finales del s. XIX y principios del s. XX, momento en que se establece definitivamente la teoría axiomática de los EVC y la notación está suficientemente desarrollada (ver Estudio Epistemológico, sección 4.1.1). Para dar sentido al concepto de Grupo Cociente conviven diversas aproximaciones, junto a la ya descrita de las particiones. Por ejemplo, el estudio de las acciones de un grupo sobre otro grupo (ver sección 4.3.1.3). En el caso de los EVC, a este panorama se le añade el desarrollo de los Grupos Cociente.

If $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$ are cosets (of $\mathcal{M}$), we write $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ for the set of all sums $u + v$ with u in $\mathcal{H}$ and v in $\mathcal{K}$; we assert that $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ is also a coset of $\mathcal{M}$. Indeed, if $\mathcal{H} = x + \mathcal{M}$ and $\mathcal{K} = y + \mathcal{M}$, then every element of $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ belongs to the coset $(x + y) + \mathcal{M}$ (note that $\mathcal{M} + \mathcal{M} = \mathcal{M}$), and, conversely, every element of $(x + y) + \mathcal{M}$ is in $\mathcal{H} + \mathcal{K}$. (If, for instance, z is in $\mathcal{M}$, then $(x + y) + z = (x + z) + (y + 0)$.) In other words, $\mathcal{H} + \mathcal{K} = (x + y) + \mathcal{M}$, so that $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ is a coset, as asserted. We leave to the reader the verification that coset addition is commutative and associative.

If $\mathcal{H}$ is a coset and if α is a scalar, we write $\alpha\mathcal{H}$ for the set consisting of all the vectors αu with u in $\mathcal{H}$ in case $\alpha \neq 0$; the coset $0 \cdot \mathcal{H}$ is defined to be $\mathcal{M}$. A simple verification shows that this concept of multiplication satisfies the axioms **(B)** and **(C)** of § 2.

Figura 4. 52: *Definición de las operaciones de suma* (arriba) *y de producto por escalar de clases* (abajo) *por el método global* (Halmos, 1974, pp. 33–34). Para la suma se comprueba que está bien definida, esto es que la operación es cerrada, y se señala la necesidad de realizar otras comprobaciones como la de cumplir las propiedades conmutativa y asociativa. A continuación, aunque no se muestra en la imagen, se demuestra la existencia de elemento neutro y opuesto. Para el producto únicamente se da la definición y se indica que se cumplen las propiedades conmutativas, asociativas, existencia de elemento neutro y opuesto (referidas en la imagen como B) y distributiva respecto de la suma (referida como C) (p.1, 2).

Según Asiala et al. (1997), para dotar de estructura (ya sea de Grupo o de Espacio Vectorial) al Conjunto Cociente es necesario poseer la concepción de objeto sobre sus clases de equivalencia, pues sólo en ese caso es posible definir operaciones sobre ellas (en el caso de los grupos el producto y en el de EVC, la suma y el producto por escalar de clases). Se puede hacer de dos modos: *utilizando representantes* o definiendo operaciones sobre toda la clase considerada de *forma global*. El *primer método* es más fácil y el más empleado por estudiantes que conocen los dos (p. 285). También es el usado en el curso observado (Figura 4. 49). El *segundo método*, menos común, lo encontramos en Halmos (1974)(Figura 4. 52). Asiala et al. (1997) han hallado en sus datos un método intermedio: una estudiante, para multiplicar clases de equivalencia fija un representante en una y lo multiplica por todos los elementos de la segunda. En el caso de los EVC, este es el método que aparece de forma más natural si se piensa en sumar clases a partir de la representación gráfica (Figura 4. 61).

Como ocurre con la definición dada en el Libro del curso (Figura 4. 49), el siguiente paso natural es plantearse la cuestión de si dichas operaciones están bien definidas. Según el método escogido esta cuestión se plantea de forma diferente. Para el método de los representantes esta cuestión se reduce a la pregunta *¿si cojo dos representantes distintos de una misma clase para operarla saldrá el mismo resultado*? Para que la respuesta sea afirmativa, en el caso de los grupos basta con asegurarse de que el subgrupo *H* sea normal. Para los EVC basta con que *L* sea un subespacio vectorial, como ya intuía Grassmann (1995) en su trabajo sobre la Teoría de Extensiones (ver Estudio Epistemológico, sección 4.1.1) al afirmar: "*El cociente es una extensión sí y sólo si el divisor está subordinado y es de menor dimensión que el dividendo* (p.115)". En ese caso se puede comprobar, como se indica en el Libro de Texto (Figura 4. 49), que si se escogen dos representantes diferentes para realizar una operación, los vectores resultantes están relacionados y por tanto definen la misma clase de equivalencia. Para el método global, la pregunta sería *¿si opero todos los representantes de una clase con los de otra, y los agrupo, lo que se obtiene es de nuevo una clase de equivalencia del conjunto cociente*? Esta última pregunta permite establecer una relación con la propiedad cerrada de las operaciones (Figura 4. 52), resultando más profunda que la anterior pero probablemente menos familiar para los estudiantes.

CONCEPTO	ACCIÓN	PROCESO	OBJETO	DIFICULTADES
CLASE DE EQUIVALENCIA	Formar una clase de equivalencia en una situación familiar en la que pueden utilizarse fórmulas o recetas (como múltiplos de 3 en Z) (u_1Ru_2)	Pensar en todos los elementos de una clase a la vez, sin necesidad de calcularlos cada vez (*u*+*V*).	Pensar, nombrar, manipular una clase sin necesidad de pensar cómo se ha formado. Formar una partición como conjunto de clases *[u]*.	La mayoría de estudiantes son capaces de ver las clases como objetos. De hecho, lo más difícil parece ser desencapsular en el proceso de formación de clases.
PARTICIÓN	Identificar las clases de equivalencias agrupando elementos que están relacionados (caso finito).	Identificar las clases de equivalencia de una vez (caso infinito, no se pueden efectuar todos los cálculos).	Agrupar todas las clases en un solo conjunto y darse cuenta de que esto dota de una estructura al conjunto inicial (dividiéndolo en partes disjuntas compuestas por todos los elementos relacionados entre sí).	Un error posible es trabajar con representantes ignorando las clases a las que representan. Algunos estudiantes denominan partición a cada clase de equivalencia.
GRUPO COCIENTE	Realizar operaciones entre dos representantes de clases, pero no darse cuenta necesariamente de que eso es válido para toda la clase.	Realizar operaciones con representantes de clases dándose cuenta de que de esa forma se obtiene una operación entre clases.	Aplicar el esquema de operación binaria a las clases; darse cuenta de que de este modo se consigue dotar a la partición de estructura de Grupo. Coordinar tres esquemas: Clases de Equivalencia, Operación Binaria y Grupo.	Muchos estudiantes consideran sólo la partición olvidándose de las operaciones. En general, falta de coordinación de los tres esquemas (sobre todo en relación al uso de representantes para operaciones) Bloqueo en la concepción de acción para las operaciones.

Figura 4. 53: *Niveles conceptuales y dificultades de los estudiantes con los conceptos de Clase de Equivalencia, Partición y Grupo Cociente* (Asiala et al., 1997; Chin & Tall, 2001; Hamdan, 2006).

Las investigaciones previas sobre los Cocientes, que incluyen análisis –cognitivos y epistemológicos– similares al realizado (a menudo realizados bajo la perspectiva de la teoría APOS y tomando forma de descomposiciones genéticas) apuntan a la complejidad y el nivel de abstracción de este concepto como fuente principal de las dificultades en su aprendizaje (Figura 4. 53)[83].

Conocimiento matemático de los estudiantes al enfrentarse al concepto

Los primeros contactos de los estudiantes con el concepto de Cociente son en relación a la ***operación de división*** como aquella contraria a la de la multiplicación y en problemas sobre ***comparaciones*** y ***repartos***, involucrando respectivamente conceptos como restos, proporcionalidad, ratio o razón y fracciones. Los más trabajados inicialmente son las *proporciones* y las *fracciones*, conceptos generalmente muy difíciles para los estudiantes (Charles & Nason, 2000; Confrey & Carrejo, 2005).

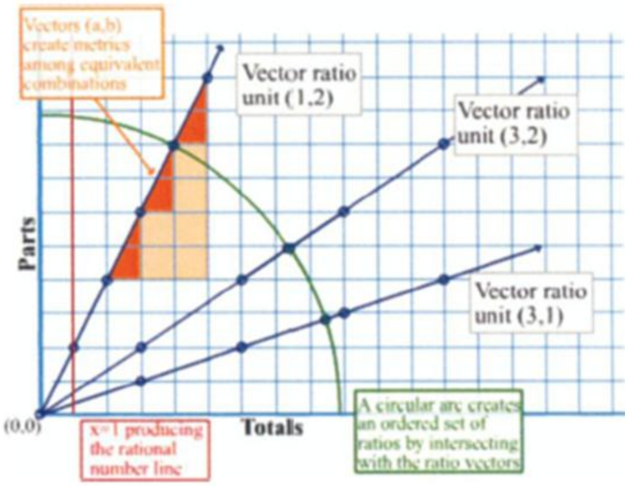


Figura 4. 54: *Dos métricas para el plano bidimensional.* A través de esta representación puede verse al mismo tiempo: la noción de ratio y la de fracción. Por un lado, la noción de ratio se entiende como la invariancia a lo largo de un conjunto de proporciones. Se representa por la pendiente de cada recta que pasa por el origen y se denota a través del vector ratio unidad *(a,b)*. Por otro lado, la noción de fracción se entiende como un elemento de un conjunto de números que reflejan particiones de la misma unidad. Se representa en la recta x=1 y se denota por la fracción *b/a* (Confrey & Carrejo, 2005, p. 8).

Entre las causas de estas dificultades se señalan: la escasa comprensión conceptual de las mismas; el énfasis de la enseñanza en la construcción de las fracciones como una parte del todo descuidando la atención a otras estrategias de reparto de los estudiantes, siendo algunas muy poco aptas para su generalización (Charles & Nason, 2000); el conflicto epistemológico que puede surgir entre las nociones de ratio y fracción con prácticas de enseñanza habituales como (a) simplificar demasiado el espacio matemático permitiendo que un concepto domine sobre el otro, (b) esconder el papel de un concepto en la construcción del otro o (c) aislar los dos conceptos en espera de que surjan conexiones de forma espontánea (Confrey & Carrejo, 2005). Como alternativa a esta última dificultad se propone un modelo de enseñanza basado (no en el conflicto epistemológico) sino en la complementariedad de los dos conceptos, la cual se hace patente gracias a la introducción

[83] Para la elaboración de la tabla se ha empleado el marco ofrecido por la teoría APOS –acción, proceso y objeto– aunque no todas las investigaciones referidas lo usan.

de una representación gráfica en el plano (Figura 4. 54). Este modelo resulta interesante desde el punto de vista de esta investigación porque muestra cómo, a partir de una representación gráfica, se pueden explicitar dos modos distintos de pensar sobre el Cociente. Aunque se sospecha que sólo es válido a estos niveles elementales (no resultando generalizable fácilmente al caso de los EVC) esta es una cuestión no trivial que necesita de mayor análisis.

Los conceptos de la *división como operación* y la *noción de resto*, que se manejan esencialmente de forma operativa en estos cursos elementales, son los que primero se extienden al llegar a la Universidad, aunque se introducen de modo más conceptual. Dan lugar al estudio de congruencias y de ejemplos particulares de grupos como Z_n dentro de una introducción a la Teoría de Números que se enseña en la asignatura de Elementos de Matemáticas. En dicha asignatura también se enseñan contenidos de Geometría[84]. En particular se estudian los grupos de simetrías de figuras planas (polígonos y teselaciones), contexto en el que se introduce la noción de Grupo Cociente (Figura 4. 51). Así, se ofrecen ámbitos diferentes para situar los Cocientes: Clasificaciones, Acciones de Grupos (ver sección 4.3.1.3).

Hacemos notar que estas nociones guardan cierta relación con los contextos en los que surgieron históricamente las ideas de *relación de equivalencia* y de *Grupo Cociente*, respectivamente. Pero, aunque dichas nociones extienden conocimientos vistos en cursos más elementales hacia otros de carácter más conceptual y general, aún permanecen en un contexto concreto. La primera aparición en el curso de Grado de un concepto abstracto relacionado con el Cociente tiene lugar un poco antes la segunda parte de la asignatura Matemáticas Básicas, sobre Teoría de Conjuntos, titulada "*Conjuntos. Relaciones. Aplicaciones. Matemática discreta*"[85]. Es en ese momento cuando se explican por primera vez las Relaciones de Equivalencia, las Clases de Equivalencia y el Conjunto Cociente (Figura 4. 50). Se introducen como ejemplo de relación, junto a otras como las de Orden.

Según Chin y Tall (2001) este enfoque puede provocar dificultades a los estudiantes en la formación de una idea coherente de las relaciones de equivalencia así como del concepto más general de *relación*. Por un lado, las relaciones de equivalencia tienen muy pocas propiedades en común con las de orden. Por otro, existe un gran salto entre las relaciones en general y las relaciones de equivalencia en particular: las primeras se conciben como subconjuntos del producto cartesiano de un conjunto mientras que las segundas suelen concebirse de forma más verbal a través de sus tres propiedades (reflexiva, simétrica y transitiva). Esto implica que las primeras se dibujen fácilmente mientras que las segundas resultan más difícil de representar visualmente (Figura 4. 55). En contraste, entre las imágenes mentales de los estudiantes para la noción de *partición* es mucho más habitual encontrar visualizaciones y explicaciones en el lenguaje propio que definiciones formales (p.7). De hecho, los participantes en el estudio de Chin y Tall (2001) afirman que les es mucho más fácil entender el concepto de partición que el de relación de equivalencia,

[84] Esta asignatura tiene un fuerte carácter aplicado e interdisciplinar, dentro de las Matemáticas, como refleja su principal objetivo de objetivo "*iniciar al estudiante en algunas disciplinas de las Matemáticas, haciendo especial incidencia en las aplicaciones en distintos aspectos de las ciencias, la tecnología o el arte*" (https://matematicas.ucm.es/estudios/2012-13/grado-matematicas-plan-800574)

[85] http://www.ucm.es/?a=estudios&d=titasignatura&anyo=2011-12&plan=0803&asig=800582

aunque después en los cuestionarios muestran un mejor manejo de este último concepto que de las particiones. En cualquier caso es raro encontrar estudiantes que hayan logrado combinar ambos conceptos en una unidad cognitiva coherente (Chin & Tall, 2001; Hamdan, 2006, p. 129).

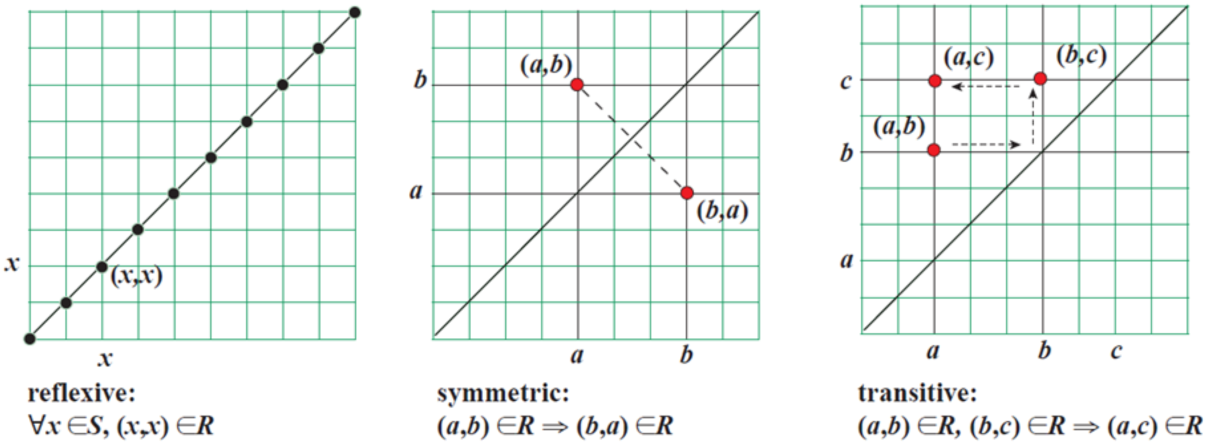


Figura 4. 55: *Representación visual de los axiomas para una relación de equivalencia R en un conjunto S.* La complejidad de esta representación es tal que no se suele enseñar en los cursos universitarios, al contrario de lo que ocurre con otras (como las de orden) que sí se suelen representar (Chin & Tall, 2001, p. 5).

En relación a estas dificultades hay que señalar que en la asignatura de Matemáticas Básicas se pide representar gráficamente tanto relaciones de equivalencia como conjuntos cociente. En la definición de relación de equivalencia dada (Figura 4. 50) se señala que es un subconjunto del producto cartesiano del conjunto original. Es presumible que estas consideraciones ayuden a los estudiantes a evitar algunas de las dificultades referidas en el párrafo anterior. Sin embargo, el profesor responsable del curso de AL opina (en una conversación informal) que, en general, los estudiantes no llegan con una comprensión suficiente de las nociones de relación de equivalencia y Conjunto Cociente como para entender sin dificultades la Definición Formal de los EVC.

Enseñanza de la definición de EVC en el curso y dificultades de los estudiantes para comprenderla

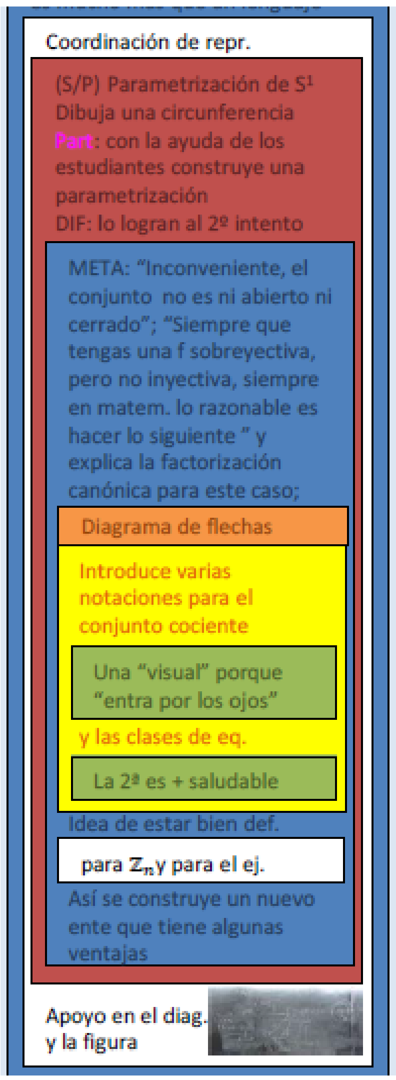
El análisis de los **problemas** de las 14 hojas propuestas para las clases prácticas y los de los exámenes de Febrero, Junio, Julio y Septiembre del curso 2010-2011[86] muestra que hay un total de 13 enunciados que hacen referencia de algún modo a los EVC (11 de los 13) o a los Cocientes (2 de los 13). Entre todos ellos, únicamente en el *Problema 13.8* (Figura 4. 79) es necesario aplicar algunas de las ideas que se acaban de explicar para entender la definición moderna. En particular, se define un producto escalar sobre un EVC y se debe comprobar que está bien definido.

El primer **episodio clase** en el que se habla de los EVC ocurre el jueves de la Semana 4. Para motivar el concepto, G. utiliza el ejemplo de los ***enteros módulo n,*** Z_n, ya que lo considera un antecedente conocido para los estudiantes y trata de establecer conexiones con lo explicado en otras asignatura. Lo usa para justificar la utilidad de los Cocientes:

[86] Se ha tomado como referencia las Hojas de Problemas del curso 2010-11, aunque los resultados son extensibles al curso anterior pues los problemas referentes a los EVC son prácticamente idénticos en ambos cursos.

> *#00:13:43-5# G: ¿Para qué? ¿Por qué? ¿Por qué nacen los Cocientes? [...] Bueno, habréis visto que los Z_n estos son verdaderamente útiles para razonar con simplicidad en cuestiones relacionadas con la divisibilidad. [Pone ejemplos en Z_8] Luego, es un lenguaje adecuado. [...] En el Álgebra Lineal es poco más que un lenguaje. Y en otras partes de la Matemática es muchísimo más que un lenguaje, muchísimo más #00:14:59-3#. (S420110217G).*

Esta explicación se complementa con el episodio sobre la ***parametrización de la circunferencia***. Éste se introduce con la frase "*yo creo que el Cociente, los Cocientes nacieron en Matemáticas por cosas como esta. ¿Cómo parametrizarías...? Se llama S^1...* [escribe su expresión algebraica a la vez que la lee]" Tras advertir a los estudiantes que esto no tiene nada que ver con el AL y explicarles qué es parametrizar (a partir de la dimensión), les pide que piensen en cómo hacerlo. Primero, los estudiantes proponen obtenerla "despejando una de las incógnitas" en la ecuación de S^1. G. escribe esta propuesta en la pizarra sólo para mostrarles que "es una cerdada". Con ayuda de una representación gráfica, les convence de que de este modo sólo se parametriza media circunferencia (Figura 4. 56). G. explica que para parametrizarla entera habría que utilizar dos parametrizaciones y relaciona este hecho con un resultado de curvas algebraicas. Los estudiantes proponen una segunda parametrización con seno y coseno, que es única y cubre toda la circunferencia. G. les da la razón explicando sobre la representación gráfica. También de este modo apunta un nuevo inconveniente: no es inyectiva. Les ayuda a resolver este problema, que solucionan modificando el dominio a *[0,2π)*.



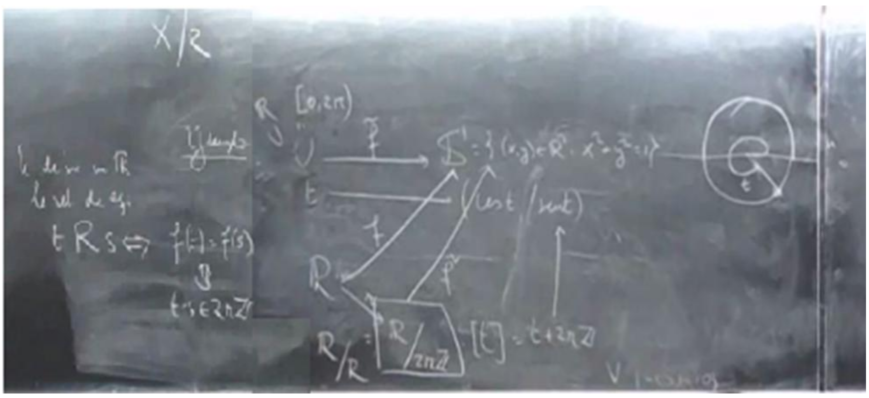


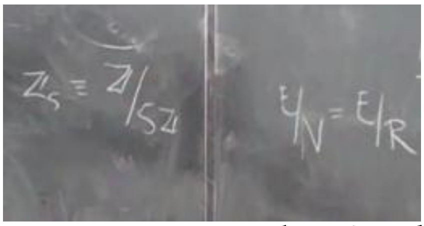
Figura 4. 56: A la izquierda, resumen en el poster del episodio de la parametrización de la circunferencia (S420110217G). Encima, un acercamiento de la imagen de la pizarra tras la explicación de este ejemplo con el que se motiva la definición de los EVC.

G. argumenta que, aunque esta solución es mejor, aún tiene el inconveniente de no tener un dominio ni abierto ni cerrado. Da una alternativa diciendo "*siempre que tengas una f sobreyectiva, pero no inyectiva, siempre en Matemáticas lo razonable es hacer lo siguiente*": hace una construcción, con un diagrama de flechas, similar al de la Factorización Canónica (ver Figura 4. 56). De este modo se introduce una relación de equivalencia en *IR* y por tanto un

Espacio Cociente (Figura 4. 56). Se introducen varias notaciones: para el conjunto cociente (una de ellas "más visual" porque recuerda la relación de equivalencia) y dos para las clases de equivalencia ("*Una es esta* (escribe *'[t]'*)*, poner t entre corchetes. Y otra, más saludable, que es poner t más 2piZ. Porque esta te recuerda en quién consiste la clase de t*." Llegado a este punto retoma el ***ejemplo de los enteros módulo 17*** para explicar que hay que comprobar que la aplicación definida no depende del representante escogido (lo relaciona con el diagrama). G. concluye:

> *#00:26:08-8# G: Entonces encontramos unos nuevos entes, estos (recuadra el IR/2piZ). Ya no son cachos de IR, en eso hemos salido perdiendo (señala a Noelia). La solución de Noelia... (escribe una tilde sobre la aplicación inicial de la parametrización de la circunferencia). Llamemos a esto f tilde. ...era bastante buena. Porque el dominio de la aplicación era un cacho de IR, que se ve bien. Aquí (señala al cociente que recuadró) en este sentido, el dominio de la aplicación es un cociente, que alguna gente lo ve mal. Pero tiene ciertas ventajas. Y es que esto no era ni abierto ni cerrado (señala mientras [0,2pi) agitando la mano arriba y abajo), es una mierda. Y esto (el cociente) se le puede dotar de estructura de espacio topológico muy agradable. Con la definición de agradable que no puedo dar en este momento porque no sabéis lo suficiente, la mayoría. # 00:26:42-5# (S420110217G)*

Hecho esto, ya se introduce formalmente la definición de EVC. Mientras escribe el enunciado, siguiendo el del Libro (Figura 4. 49), hace algunas aclaraciones (sobre la dimensión, sobre el uso de 'si y sólo si' para las definiciones) y comprueba que es relación de equivalencia (con tratamientos del registro simbólico). De nuevo recurre al ejemplo de ***los enteros módulo 5*** para mostrar la definición y la notación empleada como algo familiar (Figura 4. 57).

 Figura 4. 57: explicación de notaciones en la pizarra con ayuda del ejemplo de los Z_n. (S420110217G).	*#00:30:48-1# G: 'Dos vectores están relacionados exactamente cuando su resta está en V'. Es muy parecido a lo que habéis visto con los números enteros. Los números enteros estaban relacionados si su diferencia pertenecía al subgrupo de los múltiplos de 5. Pues aquí, si su diferencia pertenece al subespacio vectorial V. #00:30:59-5# […] #00:32:48-7# ¿Cómo se llama al Cociente? Pues al Cociente no se le llama E sobre R (escribe 'E/R'). […] A este cociente se le llama así. (Escribe 'E/V'). Porque así es fácil acordarse de cuál es la relación de equivalencia. 'Dos vectores de E están relacionados, si su resta está en V'(señala la pizarra, el V del cociente). Igual que escribes, Z sobre... (Escribe 'Z/Z') Por lo menos inicialmente os habrán escrito así, ¿no? Z sobre 5Z. Dos números enteros están relacionados si su diferencia es múltiplo de 5. Aunque luego esto se abrevia poniendo así, ¿no? (Escribe Z_5) No sé cómo lo pondréis. Esto ya no se abrevia más. Se pone E/V y ya está. # 00:33:35-0#* (S420110217G).

El siguiente paso realizado en clase es describir las clases de equivalencia. De modo similar al Libro de Texto, se hace primero simbólicamente, de tres modos diferentes (ver Figura 4. 56) y después gráficamente (ver Figura 4. 56). Puesto que este episodio hace referencia a otra concepción diferente de los EVC, se cuenta más adelante. Tras la descripción de las clases de equivalencia de diversos modos, G. dice:

> *#00:41:43-0# G: Pero esta vez, no hemos terminado aquí. Igual que no terminaron aquí los que aquella vez os explicaron los grupos. ¿Por qué? Ahora qué hace falta. A este Conjunto Cociente, dotarle de estructura de Espacio Vectorial. Veámoslo. Borro, ¿eh? (Habla mientras borra). Y esto también se hace por lo que ya os he dicho alguna vez del "general non sense" de las*

Matemáticas en las que la mano, escribe sola. No tienes que pensar nada. #00:42:16-2# (S420110217G).

G. se refiere de este modo al proceso que él llama "*transportar la estructura*" (Figura 4. 58). Esto está estrechamente relacionado con el proceso de viajar de un sitio desconocido a otro conocido al que ya se había referido en varias ocasiones en relación a la aplicación "*coord.*" (Figura 4. 16). Inicialmente explica la idea de forma oral, pero cuando pregunta a los estudiantes si entienden y estos no contestan, se ayuda de un diagrama (Figura 4. 58). Basándose en esta idea de "***transportar la estructura***" G. define dos operaciones en E/V a partir de las de V (simbólicamente) y pregunta *"¿qué es lo que hay que comprobar para estar seguro de que esto va bien?"*. Les explica de nuevo (porque no contestan) que hay que ver que las definiciones no dependen del representante, y que "*a eso se le llama en Matemáticas 'estar bien definida'*". Lo hace para la suma y les deja a ellos la comprobación del producto, "*para que entrenen*".

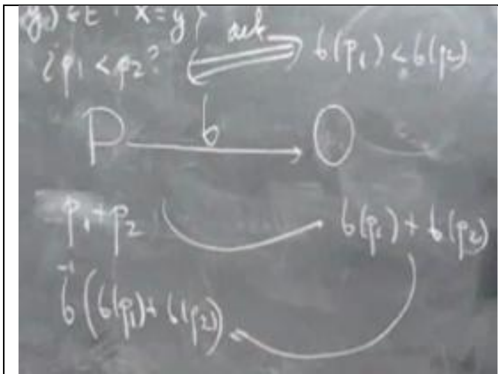


Figura 4. 58: Diagrama empleado para explicar la idea de "transportar la estructura" a través de una biyección *b* que viaja desde un subespacio *P* (de "pobre", que se conoce poco) a otro *O* (de "organizado", que se conoce bien) (S420110217G).

#00:43:18-6# G: Tengo pobre. (Escribe una 'P') Desorganizado. Pero encuentro una biyección con un tío O, organizado. (Escribe una 'O'). Y la biyección se llama b. Este está desorganizado. (Señala al 'P') Quiere decir que no hay definidas operaciones, no hay definido qué es menor... Y el otro está muy organizado. Se sabe sumar, se sabe multiplicar, se sabe comparar... Se sabe la "reostia". Entonces, ¿qué se hace para dotar a esto (señala el P) de estructura de organizado? Por ejemplo, ¿cómo se suman dos cosas de aquí? (Escribe 'a+b'). a+b no está muy bien elegido. p1+p2, para que se vea que viven en p. ¿Cómo se sumarían cosas en P si aquí (señala O) se sabe sumar? Pues ya os lo imagináis. Venís aquí (pinta una flecha), hacéis b(p1), hacéis b(p2) . Aquí, como es organizado. Organizado significa que aquí sé sumar. Y ahora este resultado me lo traigo aquí (hace una flecha de vuelta) y hago b-1(b(p1) +b(p2)). Si en vez de más pone por, pues lo mismo. Eh, imagínate que aquí (señala 'O'), esto está ordenado y aquí (señala 'P') no. Pues ¿cómo decido si a1 es menor que a2 (escribe '¿a1<a2?')'. Oh, perdón. ¿p1 es más pequeño que p2? (Borra y escribe '¿p1<p2?'). Pues me vengo aquí. Hago b(p1) y lo comparo con b(p2). Digo, ¿sí? Pues si pasa esto, por definición (escribe un sí y sólo si con 'def' encima) digo que p1 es más pequeño que p2. A esto se le llama transportar la estructura. #00:44:48-6# (S420110217G).

Por otro lado están los episodios, relacionados con las clases de prácticas, que muestran las **dificultades de los estudiantes** con este concepto. El miércoles de la Semana 5, quizá a raíz de la explicación del *Problema 7.13* sobre Cocientes, después del debate sobre los subespacios de IR^3, varios estudiantes se acercan a preguntar por los EVC, declarando que "*no lo entendían*" en parte porque "*no lo veían bien*". En la Semana 16 se resuelve el *Problema 13.8*, pero ningún estudiante cae en la cuenta de la necesidad de comprobar que una aplicación definida sobre un cociente está bien definida. Finalmente, en una tutoría individual de la Semana 13, un estudiante alude a los EVC mientras hablaba de las dificultades que tenía para distinguir en el Libro de Texto lo que era importante de lo que no: "*en Bachillerato, a algo como el* ***Cociente*** *le habrían dedicado 3 páginas, ahí aparecía muy poco. Pero a mí me costó mucho más y me parece más importante que lo del principio, por ejemplo, a lo que dedican más páginas*".

Por otro lado, los episodios de las clases de prácticas también muestran las **dificultades de los estudiantes** con este concepto. El miércoles de la Semana 5, quizá a raíz de la explicación del *Problema 7.13* sobre Cocientes, después del debate sobre los subespacios de

IR[3], varios estudiantes se acercan a preguntar por los EVC, declarando que "*no lo entendían*" en parte porque "*no lo veían bien*". En la Semana 16 se resuelve el *Problema 13.8*, pero ningún estudiante cae en la cuenta de la necesidad de comprobar que una aplicación sobre un cociente está bien definida. Finalmente, en una tutoría individual de la Semana 13, un estudiante alude a los EVC mientras habla de las dificultades que tiene para distinguir en el libro de texto lo que es importante de lo que no: "*en Bachillerato, a algo como el **Cociente** le habrían dedicado 3 páginas, ahí aparecía muy poco. Pero a mí me costó mucho más y me parece más importante que lo del principio, por ejemplo, a lo que dedican más páginas*".

4.3.1.2 Otros Puntos de Vista de los EVC en AL

Además de la definición moderna de EVC (Figura 4. 49), se han encontrado otros puntos de vista o concepciones del concepto que son importantes para su comprensión. Como la definición moderna no los encapsula necesariamente de forma evidente, es necesario explicarlos aparte, de forma explícita. Esto es lo hacemos a continuación, incluyendo dentro de la descripción de cada punto de vista los siguientes aspectos: una breve descripción epistemológica (que en los tres primeros casos viene acompañada de una introducción histórica , pues se ha encontrado información en los libros clásicos de AL); un análisis del tratamiento institucional tanto en los materiales del curso (Libro de Texto y Hojas de Problemas) como en otros libros de texto de AL; un examen de los episodios de enseñanza relacionados recogidos durante la Observación Participante. Se atiende especialmente al tipo de contenidos tratados sobre EVC, al uso de representaciones, al modo en que se movilizan en clase los distintos modelos de visualización y a las dificultades de los estudiantes.

Las Extensiones Cociente en la obra de Grassmann

En su trabajo sobre Teoría de la Extensión, considerado como el comienzo del desarrollo de la teoría axiomática del AL (ver sección 4.1.1), Grassmann (1995) introduce una nueva operación (*conjuntion*) que denomina 'división exterior' (*outer division*). Ésta se define en oposición al producto exterior (*outer multiplication*) del siguiente modo: "*outer division thus consists in seeking one factor in terms of the outer product and the other factor* (Grassmann, 1995, p. 113)". El equivalente a los EVC en el trabajo de Grassmann serían las *Extensiones Cociente*, que se conciben como el resultado de realizar la operación de división exterior entre dos extensiones. Aunque la visión proporcionada por las Extensiones Cociente difiere de la de la definición moderna de los EVC, se pueden encontrar proposiciones próximas a ésta:

> *If the divisor (B) is subordinate to and of lower than the dividend (A), the quotient is only partially defined, and in fact, if one knows a particular value (C) of the quotient, one finds the general value by adding to that particular one of the magnitudes dependent on the divisor (B) in the undefined expression, or A/B.=C+0/B (Grassmann, 1995, p. 116).*

O proposiciones sobre la dimensión (*order*):

> *[T]he order of the quotient is the difference between the orders of the dividend and the divisor (Grassmann, 1995, p. 115).*

La exposición de los contenidos sobre la *Extensión Cociente* ofrece un claro ejemplo de cómo Grassmann utiliza la Geometría en su trabajo: tras una introducción abstracta de las

Extensiones Cociente (que incluye la primera de las proposiciones anteriores) podemos encontrar una aplicación de ésta a la Geometría. Para facilitar su comprensión se acompaña de la Figura 4. 59.

> *Applied to the theory of space, this theorem expresses, first, that if the base and the area (including the plane to which it belongs) of a parallelogram are given, then the other side, which we have called the elevation, is only partially defined, and that if its initial point is fixed, the position of its final point is on a straight line parallel to the base. Second, if the base plane and the volume of a parallelepiped are given, the other side (the elevation) is only partially defined, and the position of its final point with respect to a fixed initial point is on a plane parallel to the base surface. And finally, if the elevation and the volume of a parallelepiped are given, the base surface is only partially defined, since it appears as the variable plane intersection of a prism whose edges are parallel to the elevation (Grassmann, 1995, p. 116).*

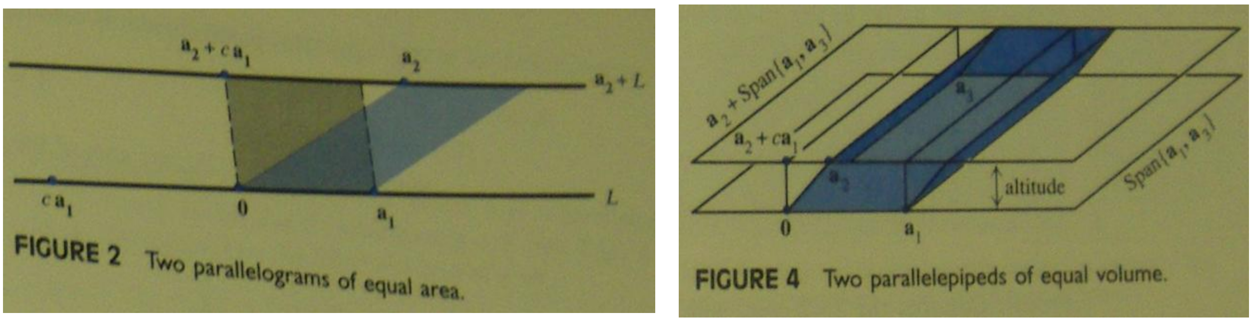


Figura 4. 59: *Representaciones gráficas que ilustran las ideas de Grassmann sobre el Cociente en extensiones de dos* (izquierda) *y tres dimensiones* (derecha). Estas figuras pertenecen a uno de los libros de texto de AL analizados (Lay, 1994, p. 181) y surgen en un contexto completamente distinto: la interpretación geométrica de los determinantes como áreas o como volúmenes.

Esta cita presenta diversas características típicas en el pensamiento y la escritura de Grassmann: la dificultad del lenguaje, razón que dificulta la expansión de sus ideas (ver Estudio Epistemológico, sección 4.1.1); su idea del *n*-espacio construido paso a paso por la evolución de un elemento (Dorier, 2000, p. 20). También sirve como preámbulo de las dos siguientes concepciones de los EVC. Primero, la 'elevación' (*elevation*) hace referencia a una dirección que no está incluida en la base del paralelogramo, recordando a la noción de subespacio suplementario[87] presente en la demostración sobre la dimensión del Cociente y en el enfoque del libro de texto de Halmos. Segundo, esta elevación no está completamente determinada. Pero si el punto inicial está fijo, el extremo final debe caer en una recta paralela a la base. Cada recta paralela define así una colección de vectores que se puede llamar *clase de equivalencia* bajo la siguiente relación: dada una base, dos vectores son equivalentes si determinan con ella un paralelepípedo del mismo volumen. Esta idea está próxima a la interpretación geométrica de los EVC y a la aproximación del concepto presente en la obra de Dieudonné, que se revisa a continuación.

Sin embargo, la concepción grasmanniana de los EVC no está presente en el curso. El único episodio relacionado es el de la interpretación geométrica del determinante (ver

[87] Se dice que U y V, subespacios vectoriales de E, son suplementarios si cumplen que $U \oplus V = E$ (esto es, $U+V=E$ y $U \cap V=0$).

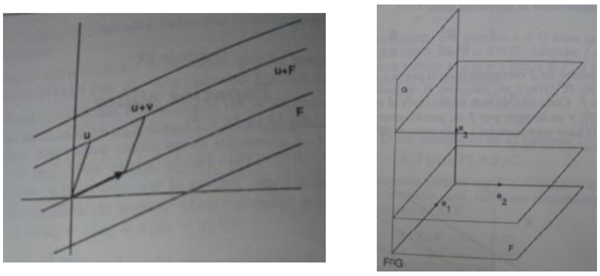
Figura 4. 18), pero no se explica en relación con los Cocientes. Consideramos que ésta podría ser una aproximación a los EVC, diferente a la del curso, que tuviera más en cuenta el contexto histórico.

Los EVC como Familia de Traslaciones de un Subespacio. Interpretación Geométrica de los EVC

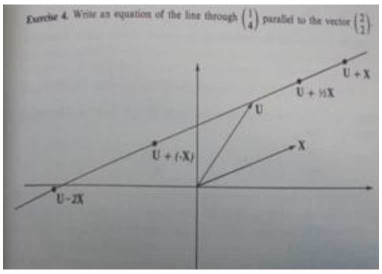
Dieudonné (1971), en su prefacio de *Algèbre Linéaire Elementaire*, resalta como una de las principales características de las Matemáticas Modernas: su "*capacidad para disociar lo que estaba indebidamente mezclado* (p.8)". Por ejemplo, desde el comienzo de la Geometría Euclídea las propiedades de naturaleza *afín* y *métrica* aparecen mezcladas "*poniendo sobre el mismo plano conceptos tan diferentes como los de paralela y perpendicular*". El AL logra separar debidamente y de forma sencilla ambos tipos de propiedades geométricas, ya que dependen respectivamente "*de dos grupos de axiomas que están separados desde el principio* (p.8)". Esta observación, junto a la fuerte inclinación de Dieudonné por el uso de la intuición geométrica (ver Estudio Epistemológico, sección 4.1.1.2), puede explicar el hecho de que en su libro los espacios afines tengan un papel tan destacado frente a los espacios vectoriales. Éstos se presentan como un caso particular de aquéllos: los espacios vectoriales son las variedades afines que pasan por el cero (p. 34). La conexión entre ambos espacios –afines y vectoriales– se realiza a través de las *traslaciones*, contexto en el que surgen de forma natural nociones próximas a los EVC:

> *[3.1.10] La imagen por una traslación t_a de un subespacio vectorial V de E es el conjunto de todos los vectores a+x, con x ϵ V; se la denota por a+V y se dice que es una variedad lineal afín (o simplemente una variedad lineal) de E. Es evidente que si a ϵV, se tiene a+V=V, puesto que para todo y ϵV, y-a ϵV. Los subespacios vectoriales son las variedades lineales que contienen al vector 0 (o, como suele decirse "que pasan por 0")(Dieudonné, 1971, p. 34).*

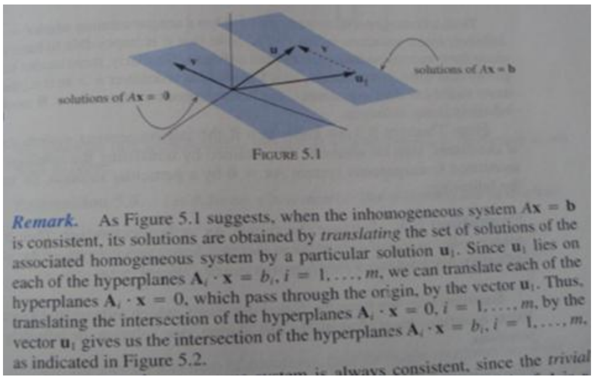
En la primera sección del capítulo sobre Espacios Vectoriales, Dieudonné estudia estos nuevos conjuntos, *a+V*, demostrando que cumplen la mayor parte de las propiedades de una partición de *E* (aunque no se hace referencia directa a este término en ningún momento). Esta partición, formada por todas las variedades paralelas a un subespacio vectorial dado, es la misma que la establecida por la definición moderna de los EVC (Figura 4. 49). Este hecho permite reinterpretar la relación de equivalencia definida en aquel momento, dando lugar a una nueva concepción de los EVC como la ***colección de todas las Traslaciones de un subespacio vectorial dado***: dos vectores están relacionados sí y sólo si sus extremos finales caen en la misma variedad afín de la partición; y las clases de equivalencia se pueden identificar con cada una de las variedades paralelas. Esta concepción es la que referimos con anterioridad como "más geométrica".



1. Muchas de las representaciones geométricas de este libro son para los EVC, y hay en 2D y 3D (Castellet & Llerena, 1996, pp. 82, 102). La de 2D es idéntica a la que se utiliza para acompañar la explicación de los espacios afines (p.184), haciendo patente la relación entre ambas nociones.



2. Representación geométrica de una recta en ecuaciones paramétricas (Banchoff & Wermer, 1992, p. 9 (foto); Lay, 1994, p. 57) . Es similar a las que aparecen al representar una clase de equivalencia de los EVC.



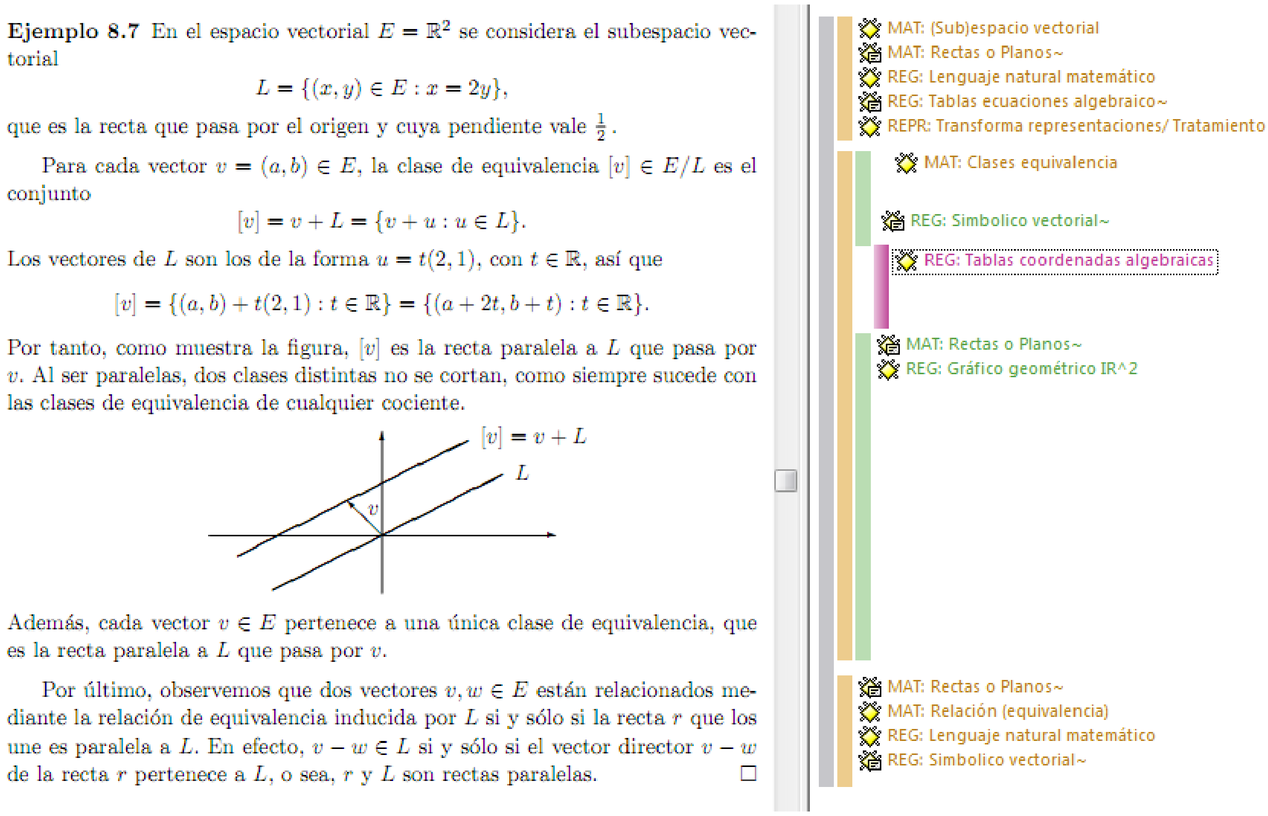
Remark. As Figure 5.1 suggests, when the inhomogeneous system $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent, its solutions are obtained by *translating* the set of solutions of the associated homogeneous system by a particular solution $\mathbf{u}_1$. Since $\mathbf{u}_1$ lies on each of the hyperplanes $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, we can translate each of the hyperplanes $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = 0$, which pass through the origin, by the vector $\mathbf{u}_1$. Thus, translating the intersection of the hyperplanes $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = 0$, $i = 1, \ldots, m$, by the vector $\mathbf{u}_1$ gives us the intersection of the hyperplanes $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, as indicated in Figure 5.2.

3. Representación geométrica (en color y en dimensión 3) de los conjuntos de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo a partir de las soluciones del sistema homogéneo asociado (Shifrin, 2002, p. 71) . Es similar a las representaciones con motivo de los EVC y de hecho a menudo ambos contextos aparecen relacionados, aunque no es el caso de este texto en el que no se define el Cociente en ningún momento.

Figura 4. 60: *Representaciones geométricas relacionadas con la concepción de los EVC como colección de Trasladados de un subespacio.*

Esta concepción aparece en 7 volúmenes del grupo de **libros analizados** (Burgos, 2006; Castellet & Llerena, 1996; Lin, 2005; Lipschutz, 1996; Robinson, 2006; Sernesi, 1993; Smith, 1998). En otros ejemplares se introducen las variedades afines pero no se establece ninguna relación con los EVC (Merino & Santos, 1999). Como ocurre en el Libro de Texto del curso, a menudo esta concepción de los EVC aparece combinada con representaciones geométricas, tanto en dos como en tres dimensiones (Figura 4. 60. 1), siendo uno de los conceptos que acumula más representaciones de este estilo (Castellet & Llerena, 1996). Otros contextos diferentes en los que surgen representaciones geométricas similares a las de los EVC son los siguientes: la representación geométrica de las ecuaciones paramétricas (Figura 4. 60. 2) y el estudio de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos a partir del conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado (Figura 4. 60. 3). Esta última idea a veces aparece junto a los EVC, concebidos como colección de subespacios paralelos. Esta aproximación es menos abstracta que la de Dieudonné, quien introduce las variedades afines directamente como objetos de trabajo sin explicación alguna. Puede utilizarse con anterioridad a la definición del concepto como motivación (Lipschutz, 1996, pp. 444–445) o con posterioridad como un ejemplo para ilustrar su importancia (Robinson, 2006). La relación entre ambas ideas no se indica de forma tan clara a veces (Lin, 2005; Smith, 1998) y otras es directamente imposible (Hernández, 1998; Lay, 1994; Shifrin, 2002), pues sí aparece esta idea pero no se define el concepto de EVC (como mucho se llegan a probar algunas propiedades de las particiones, pero nunca se le dota de estructura de Espacio Vectorial).

Entre los **problemas** de la asignatura no hay ninguno que refiera –menos aún que trabaje explícitamente– esta concepción de los *EVC como Colección de las Variedades Paralelas a un subespacio dado.*



Ejemplo 8.7 En el espacio vectorial $E = \mathbb{R}^2$ se considera el subespacio vectorial

$$L = \{(x, y) \in E : x = 2y\},$$

que es la recta que pasa por el origen y cuya pendiente vale $\frac{1}{2}$.

Para cada vector $v = (a, b) \in E$, la clase de equivalencia $[v] \in E/L$ es el conjunto

$$[v] = v + L = \{v + u : u \in L\}.$$

Los vectores de L son los de la forma $u = t(2, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$, así que

$$[v] = \{(a, b) + t(2, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(a + 2t, b + t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, como muestra la figura, $[v]$ es la recta paralela a L que pasa por v. Al ser paralelas, dos clases distintas no se cortan, como siempre sucede con las clases de equivalencia de cualquier cociente.

Además, cada vector $v \in E$ pertenece a una única clase de equivalencia, que es la recta paralela a L que pasa por v.

Por último, observemos que dos vectores $v, w \in E$ están relacionados mediante la relación de equivalencia inducida por L si y sólo si la recta r que los une es paralela a L. En efecto, $v - w \in L$ si y sólo si el vector director $v - w$ de la recta r pertenece a L, o sea, r y L son rectas paralelas. □

Figura 4. 61: *Ejemplo 8.7 sobre la Interpretación Geométrica de las Clases de Equivalencia de un cociente de IR^2 con una recta L* (Fernando et al., 2010, p. 176). La concepción de los EVC como familia de traslaciones de un subespacio dado aparece en el Libro de Texto del curso como un ejemplo justo a continuación de la definición formal mostrada en la Figura 4. 49. Este ejemplo es mucho más rico que la definición formal en cuanto a las representaciones empleadas. Se comienza definiendo el subespacio vectorial *L* con el que se va a cocientar, en este caso una recta, de dos formas: por un lado, como un conjunto de vectores de IR^2 cuyas coordenadas deben cumplir una ecuación implícita, por tanto se utiliza el registro de tablas algebraico; por otro lado, mediante lenguaje natural matemático se describe como "*la recta que pasa por el origen y cuya pendiente vale 1/2*". A continuación, se inicia un proceso de transformación de representaciones de las clases de equivalencia que tiene como objetivo obtener una descripción fácilmente representable de forma gráfica, es decir, una conversión al registro gráfico. Así se logra describir y representar geométricamente las clases como las "*rectas paralelas a L*", afirmación que se puede considerar un poco inexacta pero que se aclara en el último párrafo donde el lenguaje natural se usa mezclado con el simbólico para, además de expresar las observaciones realizadas sobre la representación gráfica (se señalan dos propiedades de las particiones), describir las relaciones de equivalencia de forma geométrica.

Tanto el análisis del libro de texto del curso como de los episodios de clase ponen de manifiesto que esta concepción debe manejarse con cuidado. A menudo ésta conduce a referir las clases de equivalencia directamente como las variedades paralelas. Así ocurre en la **explicación del texto** donde aparece dicha concepción de los EVC, el Ejemplo 8.7 (Figura 4. 61): "*[v] es la recta paralela a L* (Fernando et al., 2010, p. 176)". Si no se añade ninguna explicación más existe el peligro de que los estudiantes no se den cuenta del cambio de punto de vista sobre la representación gráfica que se está haciendo –de flecha a punto– y que confundan la clase de equivalencia –formada por los vectores que caen en la variedad paralela– con la propia variedad paralela. Gueudet (2004, pp. 492–493) y Hillel (2000, pp. 196–297) mencionan la existencia de este tipo de dificultad entre sus estudiantes (ver Marco Conceptual, sección 3.3.2.3, Figura 3. 40). El Libro de Texto del curso es sensible a ella, como pone de manifiesto la descripción geométrica de la relación de equivalencia del último párrafo del ejemplo (ver Figura 4. 61). Pero se podría haber explicitado mejor esta confusión advirtiéndola directamente, como se hace en las **explicaciones de clase**. La representación gráfica que acompaña al ejemplo (la única en todo el primer volumen) lejos de ayudar a evitar esta la dificulta, la refuerza. En ella se combinan, sin ningún tipo de aviso, los dos tipos de representación de vectores: flecha (para *v*) y punto (para los vectores de la clase de equivalencia *v+L*). Antes de describir los episodios de clase relacionados, se analiza el uso de representaciones del libro de texto en torno a este ejemplo (Figura 4. 61).

En los *episodios de las clases teóricas*, esta concepción aparece en medio de la definición formal (jueves de la Semana 4) como un modo de visualizar las clases de equivalencia, que ya se habían descrito simbólicamente de varias formas (Figura 4. 62). G. introduce la representación gráfica del Cociente con el siguiente mensaje negativo:

#00:35:50-1# G: Porque creo que hay que hacerlo y porque está [la investigadora], pues voy a hacer un ejemplo. A mí ¿sabes lo que me pasa? Durante la carrera, algunos me hacían ejemplos, ¿no? Pocos, pocos. Alguno. Los que me hacían no me servían para nada, porque eran todos triviales. Y los que yo quería, no me los querían hacer. Entonces... Tengo una mala experiencia de eso. Claro, esto que voy a hacer ahora, a cualquier persona que esté en sus cabales no le sirve para nada. Pero bueno, como siempre hay alguno que no está en sus cabales, pues esa es la esperanza. #00:36:38-6# (20110227G).

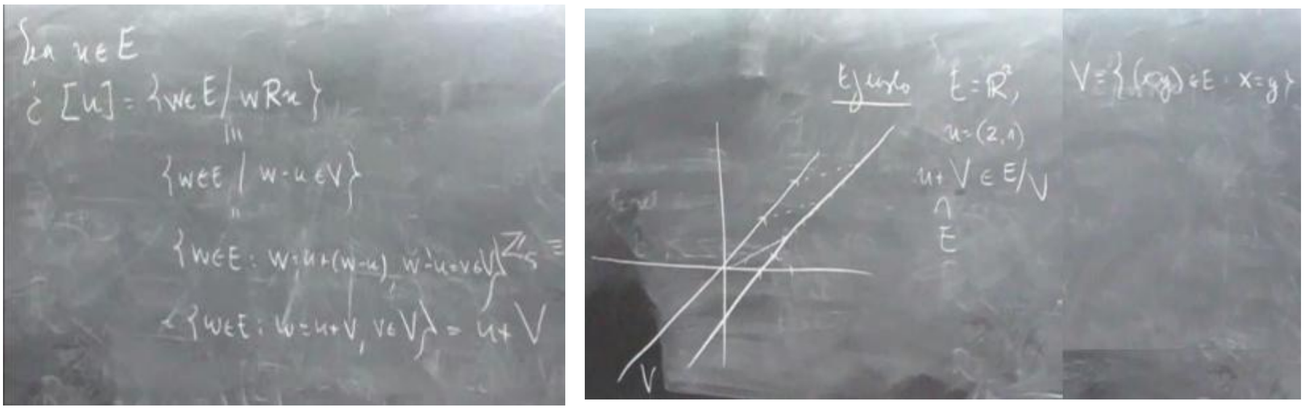


Figura 4. 62: Representaciones simbólicas (a la izquierda) y gráficas (a la derecha) para las clases de equivalencia (S420110217G).

Además G., consciente de la confusión a la que puede conducir este tipo de concepción (descrita anteriormente) califica el ejemplo de "*antipedagógico*". Explica así a los estudiantes el por qué de este calificativo:

#00:37:05-0# G: Porque lo importante del Cociente es que tiene por puntos, por elementos subconjuntos de un conjunto original. Bueno, eso no lo representa ni Dios. Entonces, ¿qué voy a hacer? Representar esos conjuntos. ¿Cómo qué? Como subconjuntos del espacio original.

> *Justo lo contrario de aquello en lo que quiero poner énfasis. No puedo hacer otra cosa. #00:37:34-0# (S420110217G).*

Dicho esto, se vuelve a la pizarra y escribe la ecuación de *V* subespacio vectorial de IR^2 (elige un espacio diferente al del texto para que tengan dos distintos). Representa gráficamente el subespacio y un vector *u = (2,1)*. Antes de seguir, insiste en el problema de representación de los Cocientes: "*Como punto del Cociente no lo puedo representar, porque ese es el problema que tienen los Cocientes. Que no son representables... Pero, lo que sí puedo es ver esto como cacho de E. [...] ¿Por quién está formado?*". Para que lo deduzcan los estudiantes va añadiendo vectores de *V* a *u*, uno a uno, por la regla del paralelogramo y pregunta: "*Conclusión, ¿quién es V?*" Muchos responden que una recta paralela (Figura 4. 62). Entonces, G. la dibuja advirtiéndoles, una vez más, sobre el problema de representar gráficamente los Conjuntos Cocientes:

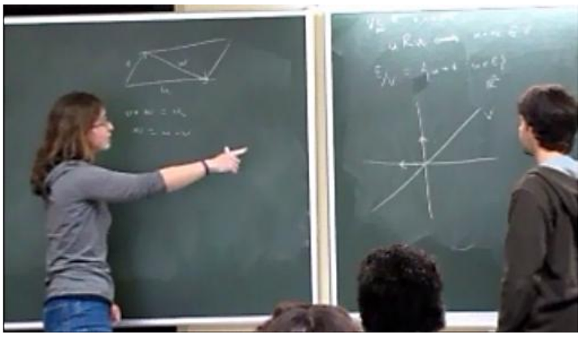
> *#00:40:27-6# G: Acabo de dibujar, como subconjunto de E, esta recta paralela (la sigue con una mano). ¿Vale? Como subconjunto de E. Como punto del Cociente, ¡no hay tu tía! Yo no lo sé pintar. Como elemento del Cociente no lo sé pintar. #00:40:48-2# (S420110217G).*

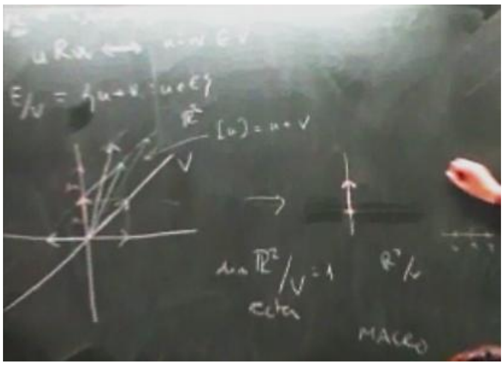
Antes de terminar y seguir con la definición formal de los EVC, G. reconoce una ventaja de la representación gráfica (también presente en el Libro de Texto). Señala que ésta es útil para ver que se cumplen las propiedades de las particiones (ver sección 4.3.1.1). La explicación, que utiliza como base la representación gráfica, viene acompañada de un mensaje que explicita su carácter concreto:

> *#00:41:24-7# G: Estas rectas paralelas (hace el gesto de rectas paralelas en el aire con la mano izquierda), cumplen esa propiedad. Dos cualesquiera o son la misma o no se tocan, por definición de paralelas. Y la unión de todas esas paralelas, shuummm (hace un gesto con la izquierda de barrer las rectas paralelas). Así barriendo, pues cubre todo el plano. Claro que sí. No puede ser de otra manera. Sería una sorpresa inimaginable que pasara lo contrario. Es un caso particular. #00:41:40-6# (S420110217G).*

Un par de semanas después (el miércoles de la Semana 6), B. decide ofrecer una explicación sobre los EVC en las **clases prácticas** motivada por las dificultades de los estudiantes (ver sección 4.3.1.1). Comienza con la ***metáfora de los tornillos***, que se explica más adelante. Después, "*para llevar este ejemplo a los espacios vectoriales*" recuerda la definición simbólica y dice "*vamos a ver esto en* IR^2". Así comienza una explicación de la ***representación gráfica*** muy similar a la de G., pero ahora con la participación directa de los estudiantes. En lugar de ser B. quien encontrase la clase de equivalencia de un *u* dado (gráficamente), pregunta "*¿Quién sabe pintar un vector que esté relacionado con este* [el u] *vía la relación de equivalencia definida por V?*" y un estudiante (Juan) sale a la pizarra. La idea con esta pregunta era incitarles a usar la definición explicada (que usa la resta de vectores), en lugar de la descripción *u+V* empleada en las clases teóricas. De este modo, podría quedar más clara la conexión entre ambos puntos de vista. Sin embargo, la necesidad de utilizar la interpretación geométrica de la resta (menos familiar para los estudiantes que la regla del paralelogramo) hace que esta aproximación no les resulte tan transparente.

Juan tiene dudas sobre la representación gráfica de la resta de dos vectores, por lo que B. la recuerda (ver Figura 4. 63). Utiliza la regla del paralelogramo, pero en ese caso sale un vector afín, cuyo origen no es el *(0,0)*. Juan propone otro método –sumar el opuesto– que resulta más adecuado, para el contexto vectorial, al evitar ese paso por una representación afín. Tras dar un primer vector, Juan ya no es capaz de encontrar otro vector más que estuviera relacionado con *u* y se sienta. Nadie en la clase sabe calcular otro más, a pesar de ser conscientes de que hay infinitos. Este episodio pone de manifiesto que la conversión del registro simbólico al gráfico es una tarea difícil desde el punto de vista cognitivo. La dificultad varía según el punto de partida que se elija: la resta gráfica involucra más dificultades que la suma y por tanto es más fácil partir de la descripción aditiva de las clases de equivalencia, *u+V*. Al mismo tiempo se debe tener en cuenta que esto puede ocultar la conexión de la representación gráfica de los EVC con su definición formal.





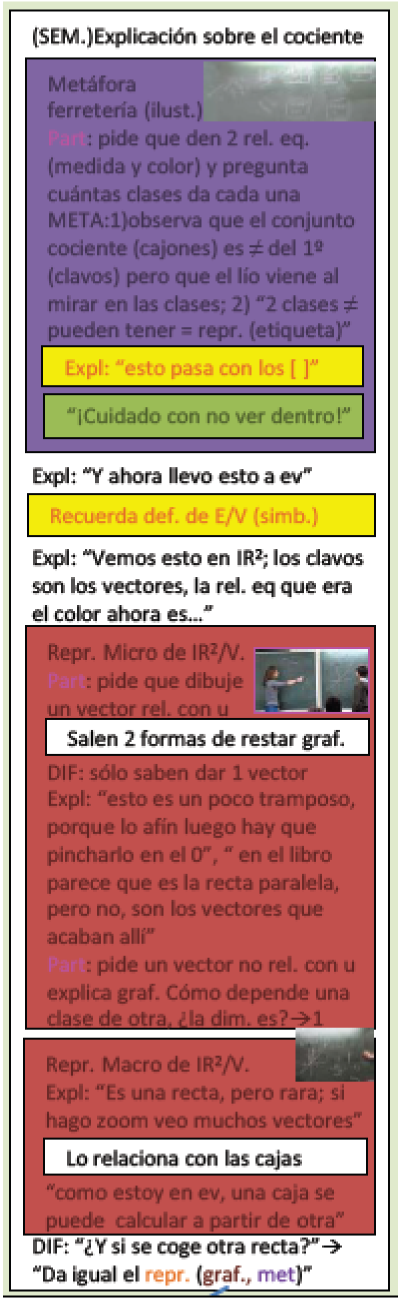


Figura 4. 63: A la izquierda, resumen en el poster del episodio de la parametrización de la circunferencia (S620110302B). Encima, un acercamiento de la imagen de la pizarra tras la explicación de este ejemplo con el que se motiva la definición de los EVC: arriba, la aclaración sobre la representación gráfica de la resta; abajo las representaciones MICRO y MACRO de los EVC.

B. explica cómo calcular otros vectores relacionados con *u* y también no relacionados. Muestra gráficamente la dependencia de las clases de equivalencia tratando de convencerles de que el cociente tiene dimensión uno y por tanto es una recta vectorial: "*Entonces una representación del cociente que tiene dimensión 1...*". Así, introduce una nueva ***representación gráfica para los EVC*** a la que llama ***MACRO***, basada en un trabajo sobre espacios duales (De Vleeschouwer & Gueudet, 2011). La motivación para introducirla es dar una respuesta al problema de representación de los Cocientes expuesto por G. en las clases teóricas. Como en explicaciones previas en las que ya se emplea la distinción MICRO/MACRO (ver Narrativa, sección 4.2.1), el término MACRO hace referencia a la idea de que esta nueva representación resulta de alejarse de la representación gráfica anterior. Así, cada recta paralela a *V* se convierte en un vector y el Espacio Cociente resultante se puede representar como una recta vectorial (Figura 4. 63). Esta representación permite ver aspectos de los EVC como su estructura de Espacio Vectorial, una base[88] o la dependencia de las clases. Sin embargo, al mismo tiempo esconde el subespacio *V*, las propiedades de las particiones y el hecho de cada elemento del Cociente es un subconjunto de vectores del espacio original. En la explicación del episodio descrito se intenta solucionar este último inconveniente afirmando que los vectores en la representación MACRO eran "gordos" (formados por muchos vectores), marcándolo también sobre la representación gráfica (Figura 4. 63). Para que se comprenda mejor, se establece una conexión con la metáfora de los tornillos:

> *#02:08:21-3# B: ¿Qué está pasando? Que es una recta muy rara. Desde aquí no hay ningún problema. Esto es IR^2/V y es un espacio vectorial de dimensión 1 como cualquier otro que hemos visto. Pero ¿cómo son sus elementos? Sus elementos ahora ya no son los reales de toda la vida que aquí tengo un 1, un 2, un 0, lo que sea... Sus elementos son, esto es como mirarlo... ¿Os acordáis del zoom? Lo miro en macro y me parece una recta normal de toda la vida. Lo miro en micro, ¿y qué pasa? ¿En cada vector de este tipo qué tengo? Un mogollón de vectores relacionados con él. Que es lo mismo que pasaba aquí (se va hacia la parte de la pizarra en la que dibujó los cajones con los tornillos). Aquí tengo mi u y aquí tengo todo el mogollón de vectores relacionados con él. O sea mis cajas son todos los vectores que acaban en esta recta. Otra caja distinta es esta, pero como esto es un espacio vectorial la puedo calcular a partir de la primera caja. ¿Qué tal? ¿Mejor? #02:09:09-3# (S620110302B).*

Por tanto, si se quieren recuperar las propiedades de los EVC que no se ven en la representación MACRO basta con acercarnos y deshacer la transformación que nos lleva hasta ella. Esto recupera la representación geométrica inicial a la que ahora llamamos ***MICRO***. Como pone de manifiesto este fragmento de transcripción, el lenguaje MACRO/MICRO permite comunicar de forma efectiva una transformación del registro gráfico y explicitar un cambio de punto de vista sobre los EVC.

La representación gráfica de los EVC también presenta dificultades a los estudiantes. Después de esta explicación sobre el cociente, hacen varias preguntas relacionadas con la elección del representante de la clase de equivalencia. Una estudiante pregunta: "*a otra recta ¿le pasaría lo mismo? [...] Si coges otro punto será otra clase ¿no?*". Y otro dice: "*Entonces todos están relacionados con u, ¿no? ¿Cualquiera que dibujases estaría relacionado con u?*". Para responderles son útiles tanto las representaciones gráficas como la metáfora de los tornillos. Además de estas preguntas surgidas en las clases prácticas, un par de semanas más tarde (el lunes de la Semana 8) dos estudiantes vienen a mi despacho a preguntar específicamente por el "dibujo del Cociente" del Libro de Texto, no ven quién es *v* en ese dibujo (Figura 4. 61). Toda la tutoría trata sobre los EVC y de nuevo resultan útiles las diversas representaciones gráficas y metáforas que utilizo en el episodio descrito anteriormente. En esta ocasión soy más cuidadosa con la conexión de lo gráfico con lo

[88] De hecho, la transformación a la representación MACRO exige la elección de un representante para cada clase de equivalencia, y por tanto una base del cociente.

algebraico y para facilitarla voy dando coordenadas (Figura 4. 64). Así queda más clara la no dependencia del representante al hacer la representación MACRO. Al final de esta tutoría también surge la cuestión de la ***representación gráfica de EVC en IR³***, comentan que les parecía más difícil de imaginar. Pensando en las representaciones MICRO, una de las estudiantes distingue dos casos: cocientar con un plano (situación análoga al libro de texto) y cocientar con una recta (situación que le parece más difícil porque el cociente tendría dimensión 2).

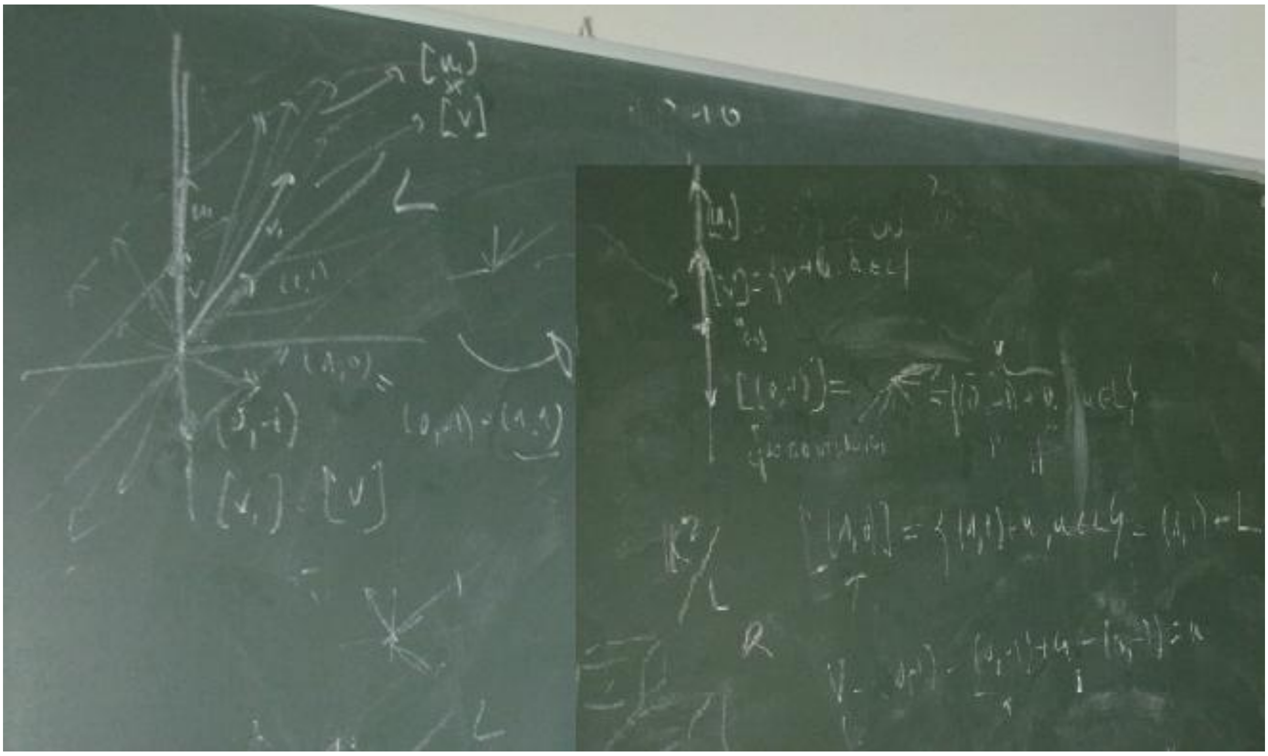


Figura 4. 64: Representaciones empleadas durante la tutoría con las dos estudiantes (S820110314B)

Los EVC como un tipo de Suplementario. Base y Dimensión de los EVC

En su libro de texto sobre AL titulado *Finite-dimensional vector spaces*, Halmos (1974) utiliza una representación gráfica MICRO, similar a la de la Figura 4. 61, aunque en su caso las rectas son horizontales y no se exhibe explícitamente. Aparece como una imagen mental ("*picture in mind*") que sirve para ilustrar su construcción de los EVC que, a pesar de la semejanza de representaciones, se hace de un modo diferente a los descritos hasta ahora.

Halmos (1974) presenta los EVC como una alternativa al problema de elegir de forma natural un suplementario entre todos los que posee un subespacio (p.33). Para este autor los EVC son una "construcción natural" que asocia de forma única a cada subespacio vectorial *L* de *E* un nuevo espacio vectorial que, a efectos prácticos, juega el papel de suplementario de *L* en *E*. Es decir, los EVC se conciben como un ***tipo especial de Suplementario de L en E***. Estas ideas le llevan a definir las clases de equivalencia $H=x+M$ como el conjunto de todas las sumas $x+y$ con $y \in M$ (Figura 4. 52) y a formular el siguiente teorema (Figura 4. 65).

§ 22. Dimension of a quotient space

THEOREM 1. *If $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ are complementary subspaces of a vector space $\mathcal{V}$, then the correspondence that assigns to each vector y in $\mathcal{N}$ the coset $y + \mathcal{M}$ is an isomorphism between $\mathcal{N}$ and $\mathcal{V}/\mathcal{M}$.*

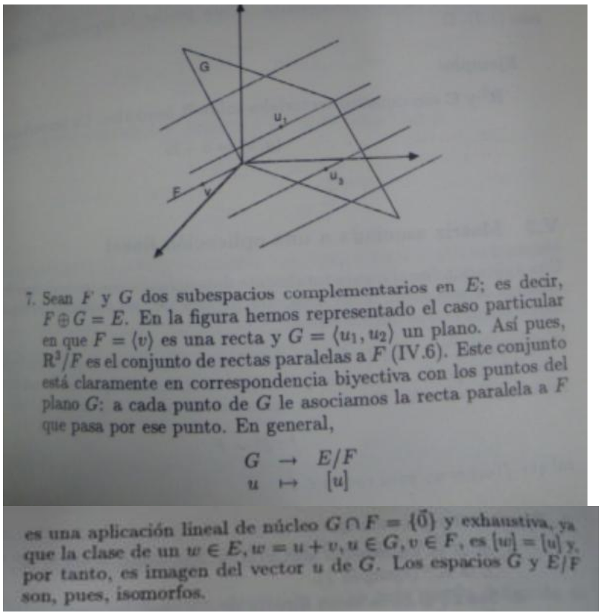
PROOF. If y_1 and y_2 are elements of $\mathcal{N}$ such that $y_1 + \mathcal{M} = y_2 + \mathcal{M}$, then, in particular, y_1 belongs to $y_2 + \mathcal{M}$, so that $y_1 = y_2 + x$ for some x in $\mathcal{M}$. Since this means that $y_1 - y_2 = x$, and since $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ are disjoint, it follows that $x = 0$, and hence that $y_1 = y_2$. (Recall that $y_1 - y_2$ belongs to $\mathcal{N}$ along with y_1 and y_2.) This argument proves that the correspondence we are studying is one-to-one, as far as it goes. To prove that it goes far enough, consider an arbitrary coset of $\mathcal{M}$, say $z + \mathcal{M}$. Since $\mathcal{V} = \mathcal{N} + \mathcal{M}$, we may write z in the form $y + x$, with x in $\mathcal{M}$ and y in $\mathcal{N}$; it follows (since $x + \mathcal{M} = \mathcal{M}$) that $z + \mathcal{M} = y + \mathcal{M}$. This proves that every coset of $\mathcal{M}$ can be obtained by using an element of $\mathcal{N}$ (and not just any old element of $\mathcal{V}$); consequently $y \to y + \mathcal{M}$ is indeed a one-to-one correspondence between $\mathcal{N}$ and $\mathcal{V}/\mathcal{M}$. The linear property of the correspondence is immediate from the definition of the linear operations in $\mathcal{V}/\mathcal{M}$; indeed, we have

$$(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + \mathcal{M} = \alpha_1(y_1 + \mathcal{M}) + \alpha_2(y_2 + \mathcal{M}).$$

Figura 4. 65: *Los EVC como un tipo de Suplementario en la obra de Halmos* (1974).

En los **libros de texto analizados** esta concepción de los EVC como un tipo de suplementario aparece de forma explícita en cuatro textos y lo hace de diversas formas (Figura 4. 66). En Castellet y Llerena (1996) se acompaña de representaciones geométricas (ver Figura 4. 66. 1). En Lipschutz (1996) la aproximación es similar a la del libro del curso, aunque aparece como un problema en el que se pide probar que si $V=U\oplus W$ y $\{u_1,..., u_n\}$ es base de U entonces $\{u_1 +W..., u_n+W\}$ es base del cociente V/W (p. 466). En Rojo (2001) se enuncia como un teorema que se usa para demostrar que todos los suplementarios a uno dado son isomorfos (ver Figura 4. 66. 2). En Lin (2005), antes de definir formalmente los EVC para espacios vectoriales abstractos (p.694-695), se introduce en dimensión 2 el cociente $IR^2/ker\, f$ (para un homomorfismo f dado) combinando la concepción anterior con esta (ver Figura 4. 66. 3).

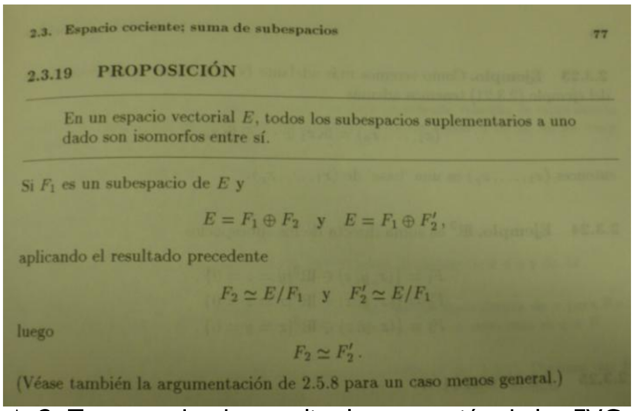
Para Halmos (1974) esta construcción de los EVC tiene la ventaja teórica de no depender de elección alguna, ni de una base de particular ni de cualquier otra cosa. La generalidad de los argumentos es importante para este autor (ver Estudio Epistemológico, sección 4.1.1.2). Esta aproximación al AL, muy diferente al espíritu de Dieudonné, también afecta al tipo de representación y lenguaje que Halmos (1974) escoge para redactar su libro. Se eligen los métodos "*algebraicos y libres de coordenadas*" frente a un "*tratamiento clásico con coordenadas*" ya que, de este modo, se mantienen el poder y la elegancia (que se pierden al especificar un número finito de dimensiones) y son, desde su punto de vista, igual de elementales (p.v). Sin embargo, esta última afirmación es discutible desde un punto de vista didáctico.



7. Sean F y G dos subespacios complementarios en E; es decir, $F \oplus G = E$. En la figura hemos representado el caso particular en que $F = \langle v \rangle$ es una recta y $G = \langle u_1, u_2 \rangle$ un plano. Así pues, $\mathbb{R}^3/F$ es el conjunto de rectas paralelas a F (IV.6). Este conjunto está claramente en correspondencia biyectiva con los puntos del plano G: a cada punto de G le asociamos la recta paralela a F que pasa por ese punto. En general,

$$\begin{array}{ccc} G & \to & E/F \\ u & \mapsto & [u] \end{array}$$

es una aplicación lineal de núcleo $G \cap F = \{\vec{0}\}$ y exhaustiva, ya que la clase de un $w \in E$, $w = u + v$, $u \in G$, $v \in F$, es $[w] = [u]$ y, por tanto, es imagen del vector u de G. Los espacios G y E/F son, pues, isomorfos.



2.3. Espacio cociente; suma de subespacios 77

2.3.19 PROPOSICIÓN

En un espacio vectorial E, todos los subespacios suplementarios a uno dado son isomorfos entre sí.

Si F_1 es un subespacio de E y

$$E = F_1 \oplus F_2 \quad \text{y} \quad E = F_1 \oplus F_2',$$

aplicando el resultado precedente

$$F_2 \simeq E/F_1 \quad \text{y} \quad F_2' \simeq E/F_1$$

luego

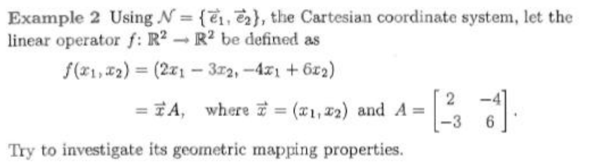
$$F_2 \simeq F_2'.$$

(Véase también la argumentación de 2.5.8 para un caso menos general.)

▲ **2.** Teorema donde se aplica la concepción de los EVC como un tipo de suplementario para deducir que todos los suplementarios son isomorfos entre sí (Rojo, 2001, p. 77)

◄ **1.** Los EVC como un tipo de suplementario, representación geométrica (Castellet & Llerena, 1996, pp. 93–94).

Dado un homomorfismo f de IR^2 se pide investigar sus propiedades geométricas

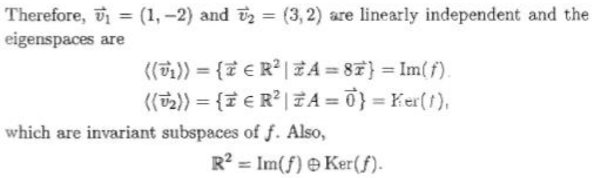


Example 2 Using $\mathcal{N} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, the Cartesian coordinate system, let the linear operator $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be defined as

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, -4x_1 + 6x_2)$$
$$= \vec{x}A, \quad \text{where } \vec{x} = (x_1, x_2) \text{ and } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Try to investigate its geometric mapping properties.

Se halla su imagen y su núcleo



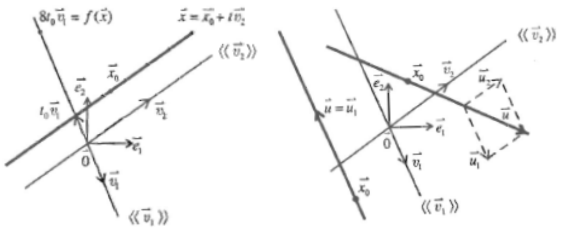
Therefore, $\vec{v}_1 = (1, -2)$ and $\vec{v}_2 = (3, 2)$ are linearly independent and the eigenspaces are

$$\langle\langle \vec{v}_1 \rangle\rangle = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x}A = 8\vec{x}\} = \operatorname{Im}(f)$$
$$\langle\langle \vec{v}_2 \rangle\rangle = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x}A = \vec{0}\} = \operatorname{Ker}(f),$$

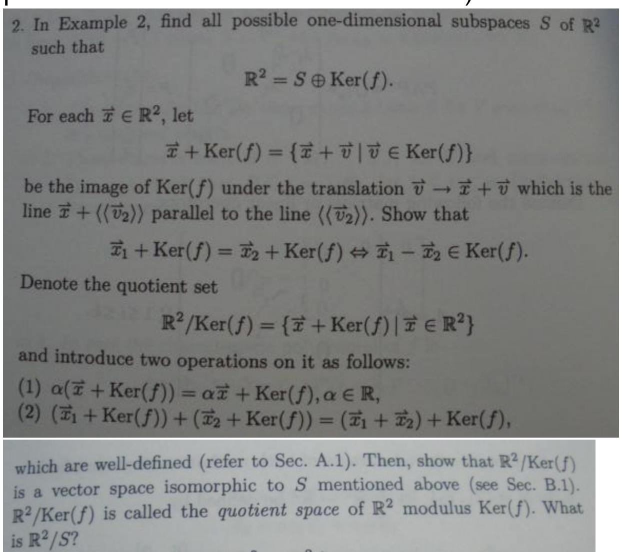
which are invariant subspaces of f. Also,

$$\mathbb{R}^2 = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f).$$

Y se estudia cómo se transforman las rectas paralelas (izquierda) y no paralelas al núcleo (derecha)



Finalmente se introduce el cociente IR^2/ker f como el espacio vectorial isomorfo a cualquier suplementario del núcleo (en particular a la imagen, por lo que al mismo tiempo se está probando el Primer Teorema de Isomorfía)



2. In Example 2, find all possible one-dimensional subspaces S of $\mathbb{R}^2$ such that

$$\mathbb{R}^2 = S \oplus \operatorname{Ker}(f).$$

For each $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, let

$$\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) = \{\vec{x} + \vec{v} \mid \vec{v} \in \operatorname{Ker}(f)\}$$

be the image of $\operatorname{Ker}(f)$ under the translation $\vec{v} \to \vec{x} + \vec{v}$ which is the line $\vec{x} + \langle\langle \vec{v}_2 \rangle\rangle$ parallel to the line $\langle\langle \vec{v}_2 \rangle\rangle$. Show that

$$\vec{x}_1 + \operatorname{Ker}(f) = \vec{x}_2 + \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \operatorname{Ker}(f).$$

Denote the quotient set

$$\mathbb{R}^2/\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{x} + \operatorname{Ker}(f) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^2\}$$

and introduce two operations on it as follows:

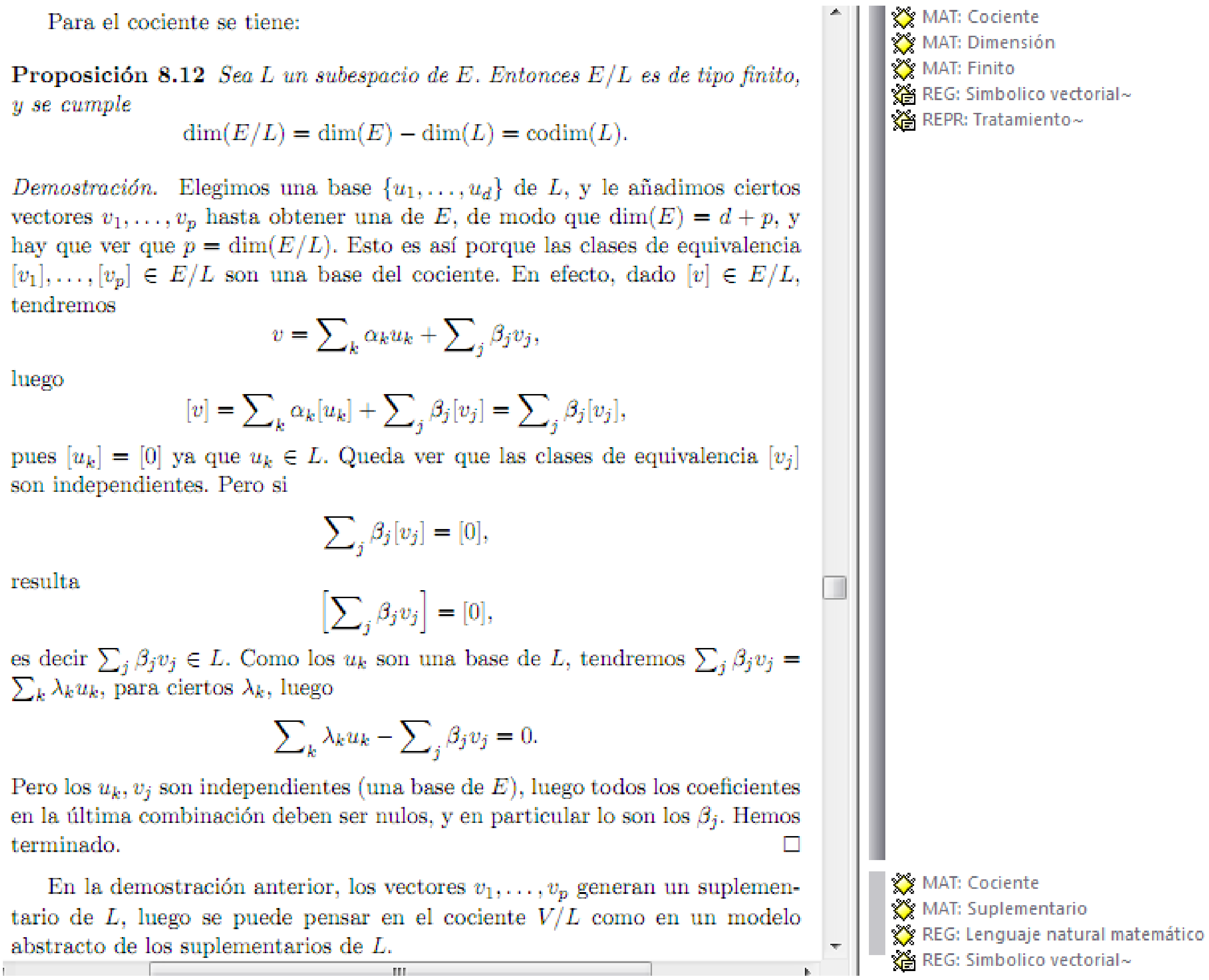
(1) $\alpha(\vec{x} + \operatorname{Ker}(f)) = \alpha\vec{x} + \operatorname{Ker}(f), \alpha \in \mathbb{R}$,
(2) $(\vec{x}_1 + \operatorname{Ker}(f)) + (\vec{x}_2 + \operatorname{Ker}(f)) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \operatorname{Ker}(f)$,

which are well-defined (refer to Sec. A.1). Then, show that $\mathbb{R}^2/\operatorname{Ker}(f)$ is a vector space isomorphic to S mentioned above (see Sec. B.1). $\mathbb{R}^2/\operatorname{Ker}(f)$ is called the *quotient space* of $\mathbb{R}^2$ modulus $\operatorname{Ker}(f)$. What is $\mathbb{R}^2/S$?

◄▲ **3.** Introducción en IR^2 a los Cocientes combinando las dos concepciones anteriores de los EVC. (Lin, 2005, pp. 195–201).

Figura 4. 66: Aparición de los *EVC como tipo de Suplementario* en los libros de texto analizados

Para que un estudiante principiante (que está comenzando a familiarizarse con los conceptos de AL) pueda llegar a comprender los EVC como un tipo de suplementario, el método clásico con coordenadas se presenta como más adecuado y natural. Esta aproximación es la que aparece en el **Libro de Texto**, cuando se demuestra la Proposición 8.12 sobre la dimensión de los EVC (Figura 4. 67), argumentándose constructivamente como sigue: primero se toma una base de L, se extiende a una base de E, se toman clases de los elementos de la base y, finalmente, se cae en la cuenta de que las clases de los vectores de L son nulas. Así, sólo sobreviven las clases de los vectores añadidos al extender la base de L, que resultan ser independientes. Es decir, la base del cociente E/L está formada por las clases de los elementos de la base de un espacio suplementario de L en E. De este modo, un estudiante puede ver de forma clara la relación entre ambos espacios (como se indica después de la Proposición en la Figura 4. 67). Esto no ocurre con el enfoque de Halmos (Figura 4. 65) donde la relación queda oculta, al ser mucho más abstracto. A cambio, es verdad que, como afirma este autor su enfoque se generaliza más fácilmente a dimensión infinita (pues no depende de la elección de base alguna). Por tanto, si bien cada enfoque puede resultar adecuado para objetivos diferentes, no se puede admitir que ambos –libres o dependientes de coordenadas– sean igual de elementales. Esta diferencia cognitiva debe tenerse presente a la hora de elegir uno frente a otro cuando se enseñe.



Para el cociente se tiene:

Proposición 8.12 *Sea L un subespacio de E. Entonces E/L es de tipo finito, y se cumple*

$$\dim(E/L) = \dim(E) - \dim(L) = \operatorname{codim}(L).$$

Demostración. Elegimos una base $\{u_1, \dots, u_d\}$ de L, y le añadimos ciertos vectores $v_1, \dots, v_p$ hasta obtener una de E, de modo que $\dim(E) = d + p$, y hay que ver que $p = \dim(E/L)$. Esto es así porque las clases de equivalencia $[v_1], \dots, [v_p] \in E/L$ son una base del cociente. En efecto, dado $[v] \in E/L$, tendremos

$$v = \sum_k \alpha_k u_k + \sum_j \beta_j v_j,$$

luego

$$[v] = \sum_k \alpha_k [u_k] + \sum_j \beta_j [v_j] = \sum_j \beta_j [v_j],$$

pues $[u_k] = [0]$ ya que $u_k \in L$. Queda ver que las clases de equivalencia $[v_j]$ son independientes. Pero si

$$\sum_j \beta_j [v_j] = [0],$$

resulta

$$\left[\sum_j \beta_j v_j\right] = [0],$$

es decir $\sum_j \beta_j v_j \in L$. Como los u_k son una base de L, tendremos $\sum_j \beta_j v_j = \sum_k \lambda_k u_k$, para ciertos λ_k, luego

$$\sum_k \lambda_k u_k - \sum_j \beta_j v_j = 0.$$

Pero los u_k, v_j son independientes (una base de E), luego todos los coeficientes en la última combinación deben ser nulos, y en particular lo son los β_j. Hemos terminado. □

En la demostración anterior, los vectores $v_1, \dots, v_p$ generan un suplementario de L, luego se puede pensar en el cociente V/L como en un modelo abstracto de los suplementarios de L.

Figura 4. 67: *Enunciado y demostración de la Proposición 8.12 sobre la dimensión del Espacio Cociente de tipo finito* (Fernando et al., 2010, p. 180). Los EVC se abandonan en el libro tras el ejemplo de la interpretación geométrica (ver Figura 4. 61) para explicar algunos resultados sobre espacios de tipo finito. No se habla otra vez del concepto hasta esta Proposición 8.12. Ésta se introduce escuetamente. Respecto a las representaciones empleadas, se usa el registro simbólico combinado con el lenguaje natural matemático (como en la definición formal). Como es propio de las demostraciones de este tipo, hay una sucesión de tratamientos de las que se destacan: el cambio de manejar clases de equivalencia a sus representantes (en ambas direcciones), la escritura de un vector de E como combinación de vectores de la base elegida, el reconocimiento de que las clases de vectores en L son de hecho la clase del 0, la aplicación de la definición de la suma de clases como la clase de la suma. El lenguaje natural matemático se utiliza para enunciar la proposición, para plantear la demostración al comienzo, para explicar los tratamientos realizados y para concluir la demostración al final. Este tipo de combinación de usos del lenguaje natural matemático y el simbólico para enunciar y demostrar proposiciones es bastante común a lo largo del libro.

A diferencia de lo que ocurre con la anterior concepción, una parte importante de los **problemas** del curso que tratan sobre el Cociente (5 de los 13) hacen referencia a conceptos revisados bajo esta concepción de los EVC como un tipo de suplementario. En particular, en estos problemas se piden tareas como determinar la dimensión del Cociente dado un espacio vectorial de dimensión 3 o 4 (casi siempre IK^3 o IK^4 aunque en el ejemplo de la Figura 4. 68 se da un espacio vectorial abstracto) y un subespacio en él (expresado en un registro de tablas algebraico); hallar una base del EVC o dada una clase calcular sus coordenadas respecto de la base hallada. Para resolverlos suele bastar con aplicar la Proposición 8.12 y el argumento empleado en la demostración, tal y como se explica en el Ejemplo 8.13 (Fernando et al., 2010, p. 181). Así, a excepción del *Problema 13.8* que invoca un tipo de comprensión más conceptual (Figura 4. 79), el resto son mecánicos y tienen un fuerte carácter operativo (Figura 4. 68). Además del registro de tablas, los enunciados emplean los lenguajes natural y simbólico.

12. Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E, $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ y L el subespacio vectorial de E del que unas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$ son

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Obtener una base del espacio vectorial cociente E/L y calcular las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase $[v]$.

Figura 4. 68: Enunciado del *Problema 7.12*, problema típico sobre bases y dimensión de los EVC.

En las *clases teóricas* del curso, los contenidos sobre los Cocientes donde podríamos considerar que aparece alguna referencia a la concepción de los EVC como suplementario (es decir, sobre su dimensión, base y coordenadas) se explican al lunes siguiente de la introducción de la definición formal. Se sigue exactamente la misma aproximación que en el Libro de Texto, con apenas visualización. Aunque el cálculo de coordenadas del Ejemplo 8.13 se explica de dos métodos distintos dando libertad para elegir el que más convenga (Fernando et al., 2010, p. 181). Sin embargo, esta concepción no ocupa ningún lugar relevante en la explicación. En las clases prácticas, a raíz del *Problema 7.3*, sí se explica que la base del Cociente está formada por las clases de una base del suplementario (S520110223B). También, en torno a la representación MACRO y las dificultades sobre la elección de representante (ver concepción anterior), surge un comentario relacionado sobre cómo se construye una base del Cociente a partir de clases de vectores que no están en *V* (S620110302B). Pero, aparte de estos breves episodios, esta concepción no tiene un peso importante en el curso. De hecho, se desaprovechan oportunidades para hablar sobre ella. Por ejemplo, el segundo día una estudiante sale a la pizarra a hacer un problema sobre complementario y en lugar de escribir E\V escribe E/V (S620110301B, ver Figura 4. 22. a) y B. no dice nada sobre las diferencias entre el Complementario, el Suplementario y los Cocientes. Al día siguiente aclara la diferencia entre complementario y suplementario, pero los Cocientes quedan fuera, diciendo únicamente:

> *#01:58:06-3# B: Una cosa, ¡cuidado! Esta raya (señala un "E\V" que Ana había escrito en la pizarra). Es un cociente. (Lo borra y escribe en su lugar "E/V"). Esto es un poco de lío, ¿eh? Además lo estamos viendo a la vez. Es así, ¿vale? No os confundáis con eso que es una tontería. #01:58:26-4# (S620110301B).*

Los EVC como un tipo de Proyección en la Dirección de L

Estrechamente ligada a la concepción anterior –los EVC como un tipo de suplementario– está la concepción de EVC como una proyección, noción que se define en el Libro de Texto en la sección 9.14 (Figura 4. 69). Esta concepción no se introduce históricamente, como las anteriores, porque no tiene un papel tan destacado en los libros clásicos de AL.

(9.14) Proyecciones y simetrías. (1) Sean E un espacio vectorial y V, W dos subespacios suplementarios: $E = V \oplus W$. Cada vector $u \in E$ se escribe de una única manera como suma $u = v + w$ con $v \in V, w \in W$. Esto permite definir las dos aplicaciones siguientes:

(i) La *proyección* $p : E \to E : u \mapsto v$, denominada *de base* V y *dirección* W. También se dice que p es la proyección *sobre* V de dirección W.

(ii) La *simetría* $s : E \to E : u \mapsto v - w$, denominada de *base* V y *dirección* W. También se dice que s es la simetría *respecto de* V de dirección W.

Se comprueba sin dificultad que son aplicaciones lineales, y que:

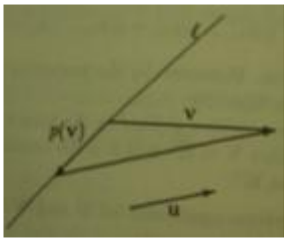
$$p \circ p = p, \quad s \circ s = \mathrm{Id}_E, \quad s = 2p - \mathrm{Id}_E\,.$$

(2) Recíprocamente, supongamos que $p : E \to E$ es una aplicación lineal tal que $p \circ p = p$. Entonces $V = \mathrm{im}(p)$ y $W = \ker(p)$ son subespacios suplementarios de E, y p es la proyección de base V y dirección W.

En primer lugar, si $u \in V \cap W$, existe $v \in E$ tal que $u = p(v)$, y por tanto $u = p(v) = p(p(v)) = p(u) = 0$. Así, la suma $V + W$ es ciertamente directa. Ahora consideramos la siguiente igualdad trivial para un vector arbitrario $u \in E$:

$$u = v + w, \quad \text{con } v = p(u) \text{ y } w = u - p(u).$$

Como $p(w) = p(u) - p(p(u)) = 0$, es $V + W = E$. En fin, la misma igualdad muestra que p es la proyección $u \mapsto v$ predicha.



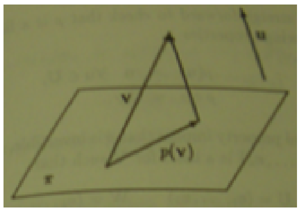


Figura 4. 69: *Definición y propiedades de las proyecciones (y simetrías) en el Libro de Texto* (Fernando et al., 2010, pp. 192–193), que se introduce a mitad de la Unidad 9 sobre "Aplicaciones lineales". Se hace notar que el tipo de representación empleado es lenguaje natural mezclado con lenguaje simbólico y que, a pesar del fuerte carácter geométrico del contenido, no se acompaña el texto de ninguna representación geométrica. Esto no ocurre en otros textos (Sernesi, 1993, pp. 148–149) donde la explicación de las proyecciones se acompaña de diversidad de representaciones geométricas (a la derecha).

En el razonamiento descrito previamente sobre la construcción de una base del Cociente se observa qué ocurre cuando se efectúa el cociente *E/L*: los vectores en *L* se convierten en la clase del cero y sólo sobreviven las clases de los vectores del suplementario. Algo similar sucede al escribir las coordenadas de una clase respecto a una base del Cociente donde, tras descomponer un representante en suma de vectores de *L* y de un suplementario suyo y tomar clases, únicamente quedan las coordenadas correspondientes a los vectores de la base del suplementario. Este comportamiento es similar al de una proyección de base el suplementario y de dirección *L* (ver Figura 4. 69). De este modo, los EVC pueden concebirse como un ***tipo de Proyección con base el cociente E/L y dirección el subespacio L***. De hecho la aplicación que encapsula este proceso asignando a cada elemento de *E* su clase en *E/L* se conoce como la *proyección canónica* y se denota como *π*. En el **libro** esta aplicación se define dentro de unos ejemplos: primero de aplicaciones lineales afirmándose que es lineal; segundo de imágenes y núcleos señalándose que su imagen es el cociente y su núcleo el espacio que cocienta (ver Figura 4. 71). En las **clases teóricas** se sigue exactamente la misma secuencia, pero se hacen las comprobaciones (S520110222G, S52011022G4). Se explica que sirve para definir las operaciones en el Cociente sin necesidad de usar el calificativo "*natural*" o el "*general non sense de las Matemáticas*" (S420110217G, ver Figura 4. 58). En **otros textos** la proyección canónica se introduce directamente como un ejemplo de proyección, en lugar de como ejemplo de Aplicación Lineal (Sernesi, 1993, p. 150).

Ejemplos 9.3 (1) Si V es un subespacio vectorial de E, la *inclusión* $j : V \hookrightarrow E : v \mapsto v$ es una aplicación lineal. Si $V = E$, tenemos la *aplicación identidad* $\mathrm{Id}_E : E \to E$.

(2) Sea L un subespacio vectorial de E, y E/L el correspondiente espacio cociente. La *proyección* $\pi = \pi_L : E \to E/L : v \mapsto [v]$ es una aplicación lineal.

REG: Simbolico vectorial~

MAT: Cociente

Ejemplos 9.9 (1) Una inclusión $j : V \hookrightarrow E$ tiene imagen V y núcleo $\{0\}$. Una proyección $\pi : E \to E/L$ tiene imagen E/L y núcleo L. Una homotecia (de razón $\neq 0$) $h : E \to E$ es biyectiva, su imagen es E y su núcleo $\{0\}$.

REG: Simbolico vectorial~

MAT: Cociente

Figura 4. 70: *Fragmentos del Libro de Texto en los que aparece por primera vez la proyección canónica*. Arriba, los Ejemplos 9.3 se introducen para ilustrar el concepto de Aplicación Lineal después de definirlo formalmente (Definición 9.1) y demostrar dos propiedades inmediatas a partir de ella (Proposición 9.2). Abajo, en los Ejemplos 9.9 se revisan algunas de las aplicaciones del ejemplo anterior, pero calculando sus imágenes y núcleos. En ambos casos las comprobaciones se dejan para el lector, actitud que se repite en otros textos donde la proyección canónica se introduce como problema (Lin, 2005; Lipschutz, 1996)(ver Figura 4. 71).

Entre los **problemas** encontrados referentes al Cociente, el *Problema 7.14* invita a la reflexión sobre una importante cuestión relativa a las clases de equivalencia, que aparece también en otros textos (Lipschutz, 1996, p. 466) y que se puede plantear en términos de π (aunque no se hace así en el problema del curso, sí que se utiliza este recurso en otros textos como se muestra en la Figura 4. 71): la relación que hay entre la independencia de clases y la de sus representantes, o equivalentemente, la relación que hay entre la independencia de ciertos vectores y la de sus imágenes via π (Figura 4. 72).

16. Let S be a vector subspace of V and V/S be the quotient space (refer to Sec. B.1).

(a) Define $\pi : V \to V/S$ by

$$\pi(\vec{x}) = \vec{x} + S \quad \text{for } \vec{x} \in V.$$

Then π is well-defined and is a linear transformation which is called the *natural projection* of V onto V/S.

(b) $V = S \oplus U$ if and only if the restriction $\pi|_U : U \to V/S$ is a linear isomorphism.

(c) In case $\dim V < \infty$, then

$$\dim V/S = \dim V - \dim S.$$

Once $\dim V/S < \infty$, it is called the *co-dimension* of S in V and is denoted as co-dim S.

17. Suppose $f \in \mathrm{L}(V, W)$ and S, T are respective subspace of V, W such that $f(S) \subseteq T$ holds.

Figura 4. 71 Uso de la proyección canónica ("natural") para definir algunas propiedades del Cociente, como que es isomorfo a cualquier suplementario (apartado b) (Lin, 2005, p. 474).

14. (*) Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E y $L = L[v_1, v_2]$, donde

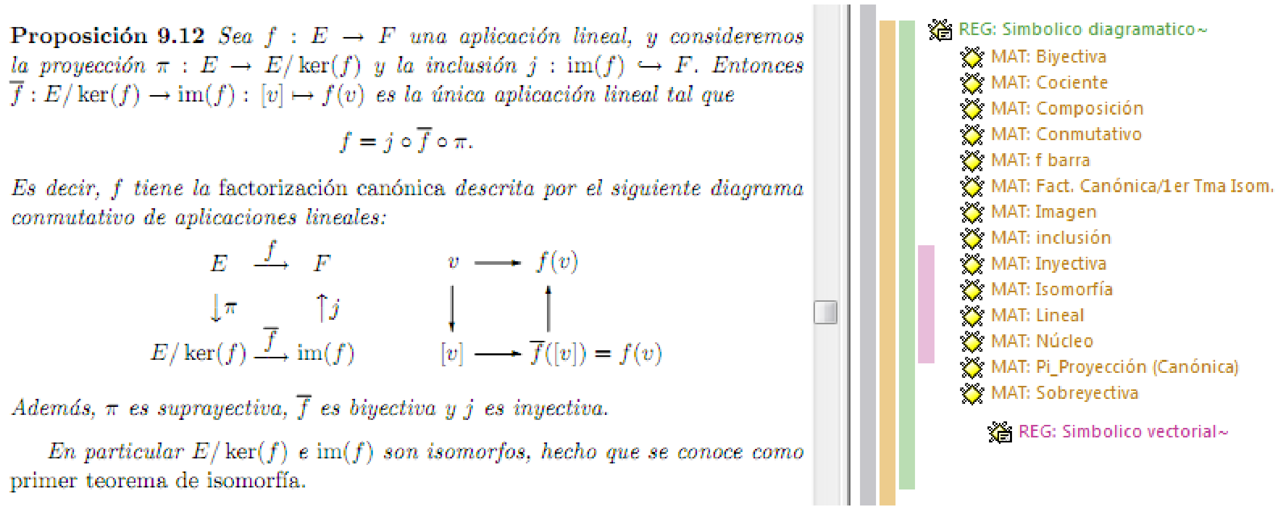
$$v_1 = u_1 + u_3, v_2 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4.$$

(i) Encontrar en $E \setminus L$ dos vectores independientes cuyas clases sean (resp. no sean) independientes en el cociente E/L.

(ii) Encontrar cuatro vectores linealmente independientes en E cuyas clases en E/L no sumen 0 y de modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.

Figura 4. 72: *Problema 7.14* sobre la relación entre la independencia de clases y la de sus representantes (o la de sus imágenes via π). Este es el problema más conceptual y creativo de todos los relativos al Cociente.

A diferencia de los casos anteriores, no hay referencias directas a esta nueva concepción en el Libro de Texto más allá de la aparición de π. Sin embargo es importante entender el proceso de cocientar, es decir, tomar clases de equivalencia, o equivalentemente, proyectar aplicando π para comprender resultados posteriores como, por ejemplo, el *Primer Teorema de Isomorfía* también denominado *Factorización Canónica* (Figura 4. 73). En este caso la π hace corresponder el *ker f* con el cero, esto es, concentra todos los 'defectos' de la *f* en un punto –el cero– permitiendo construir una aplicación inyectiva a partir de la función inicial *f*. Uno de los autores de los libros analizados utiliza la expresión metafórica "comprimir" (en lugar de concentrar) afirmando que "*una buena forma de pensar en E/L is que sus elementos surgen al identificar todos los elementos en una clase de equivalencia, o sea que cada clase se 'comprime' en un solo vector*" (Robinson, 2006, p. 144)". Esta idea de utilizar los Cocientes para "concentrar defectos" o incluso para "hacer desaparecer lo que molesta" no es exclusiva del AL sino que también resulta útil en otras áreas de las Matemáticas como Geometría Algebraica y Álgebra Conmutativa (por ejemplo, para reducir las singularidades o los ceros de una función).


Proposición 9.12 *Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal, y consideremos la proyección $\pi : E \to E/\ker(f)$ y la inclusión $j : \mathrm{im}(f) \hookrightarrow F$. Entonces $\overline{f} : E/\ker(f) \to \mathrm{im}(f) : [v] \mapsto f(v)$ es la única aplicación lineal tal que*

$$f = j \circ \overline{f} \circ \pi.$$

Es decir, f tiene la factorización canónica *descrita por el siguiente diagrama conmutativo de aplicaciones lineales:*

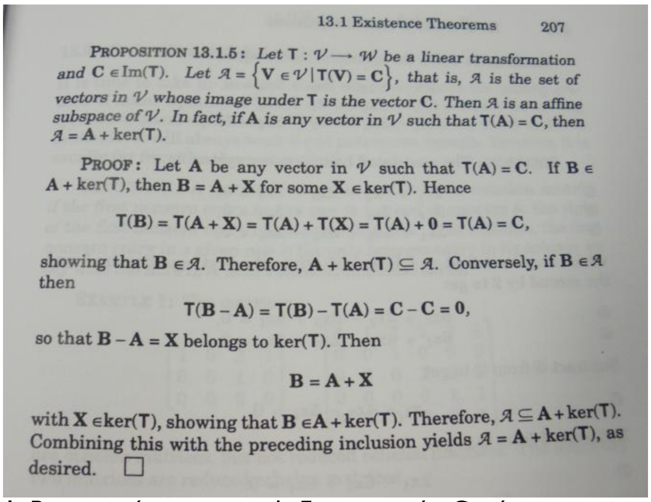
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow\pi & & \uparrow j \\ E/\ker(f) & \xrightarrow{\overline{f}} & \mathrm{im}(f) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} v & \longrightarrow & f(v) \\ \downarrow & & \uparrow \\ [v] & \longrightarrow & \overline{f}([v]) = f(v) \end{array}$$

Además, π es suprayectiva, $\overline{f}$ es biyectiva y j es inyectiva.

En particular $E/\ker(f)$ e $\mathrm{im}(f)$ son isomorfos, hecho que se conoce como primer teorema de isomorfía.

Figura 4. 73: *Proposición 9.12 sobre la Factorización Canónica de Aplicaciones Lineales y su demostración* (Fernando et al., 2010, p. 191). Antes de su explicación, los autores se detienen en un par de cuestiones relevantes para su comprensión: caracterización de aplicaciones lineales inyectivas de tres formas equivalentes (Proposición 9.10); definición de espacios vectoriales isomorfos comprobando que dada una aplicación lineal biyectiva su inversa también es lineal (Proposición y Definición 9.11). Tras indicar que "*se comprueba sin dificultad*" que la composición de Aplicaciones Lineales es también lineal, se introduce esta Proposición 9.12 como "*una construcción básica*" (p. 191). En cuanto al uso de representaciones uno de los rasgos más llamativos es la presencia de un diagrama conmutativo (el primero del texto). Para ayudar a la comprensión se incluyen dos diagramas de flechas, uno al lado del otro: a la izquierda está el diagrama conmutativo propiamente dicho en el que se representan las aplicaciones y los espacios involucrados; a la derecha de éste, se ha representado cómo se comporta cada una de las aplicaciones sobre los elementos de los espacios que intervienen, conservando la estructura del diagrama conmutativo de la izquierda. En el resto del enunciado de la proposición, así como en su demostración, se utiliza el registro simbólico combinado con el lenguaje natural matemático de un modo similar al descrito en otras ocasiones.

El *Primer Teorema de Isomorfía* es un contenido habitual en los **libros de texto analizados**: sólo uno de los libros que incluyen los EVC de forma explícita no lo menciona (Merino & Santos, 1999), en otro sólo se explica para grupos y anillos (Rojo, 2001) y otros incluyen además otros teoremas de isomorfía (Castellet & Llerena, 1996; Robinson, 2006). Cuando aparece lo hace de diversas formas (Figura 4. 74): a veces se logra evitar cualquier referencia a los EVC (Smith, 1998, p. 207, foto 1), otras se introduce de forma constructiva a partir de representaciones e interpretaciones geométricas (Castellet & Llerena, 1996, p. 101, foto 3; Lin, 2005, pp. 369–370, foto 2); también se han encontrado enunciados similares a los del texto (Chevallet et al., 1984), unas veces con representaciones diagramáticas ligeramente diferentes (Lin, 2005, p. 748; Lipschutz, 1996, p. 467, foto 4) y otras sin ningún tipo de diagrama (Burgos, 2006, p. 187; Sernesi, 1993, pp. 154–155).



13.1 Existence Theorems 207

PROPOSITION 13.1.5: *Let $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ be a linear transformation and $C \in \mathrm{Im}(T)$. Let $\mathcal{A} = \{V \in \mathcal{V} \mid T(V) = C\}$, that is, $\mathcal{A}$ is the set of vectors in $\mathcal{V}$ whose image under T is the vector C. Then $\mathcal{A}$ is an affine subspace of $\mathcal{V}$. In fact, if A is any vector in $\mathcal{V}$ such that $T(A) = C$, then $\mathcal{A} = A + \ker(T)$.*

PROOF: Let A be any vector in $\mathcal{V}$ such that $T(A) = C$. If $B \in A + \ker(T)$, then $B = A + X$ for some $X \in \ker(T)$. Hence

$$T(B) = T(A + X) = T(A) + T(X) = T(A) + 0 = T(A) = C,$$

showing that $B \in \mathcal{A}$. Therefore, $A + \ker(T) \subseteq \mathcal{A}$. Conversely, if $B \in \mathcal{A}$ then

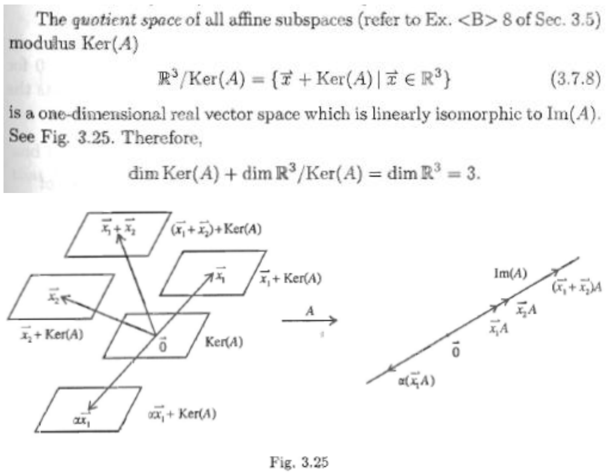
$$T(B - A) = T(B) - T(A) = C - C = 0,$$

so that $B - A = X$ belongs to $\ker(T)$. Then

$$B = A + X$$

with $X \in \ker(T)$, showing that $B \in A + \ker(T)$. Therefore, $\mathcal{A} \subseteq A + \ker(T)$. Combining this with the preceding inclusion yields $\mathcal{A} = A + \ker(T)$, as desired. □

1. Proposición cercana a la Factorización Canónica pero enunciada sin Cocientes ni diagramas (Smith, 1998, p. 207)



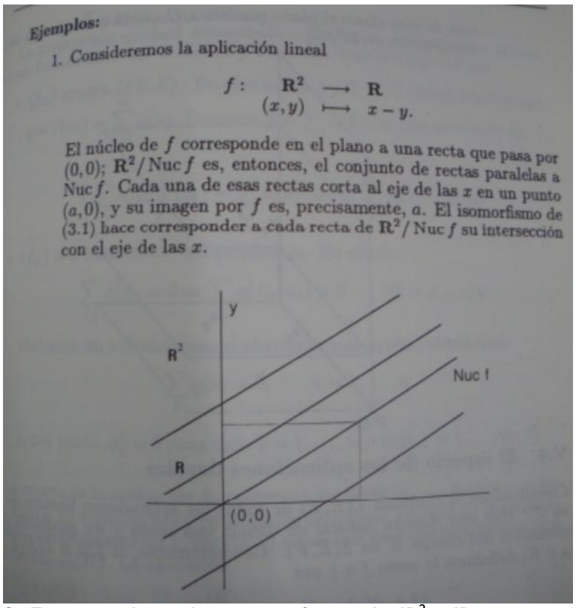
The *quotient space* of all affine subspaces (refer to Ex. <B> 8 of Sec. 3.5) modulus Ker(A)

$$\mathbb{R}^3/\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{x} + \mathrm{Ker}(A) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^3\} \qquad (3.7.8)$$

is a one-dimensional real vector space which is linearly isomorphic to Im(A). See Fig. 3.25. Therefore,

$$\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathbb{R}^3/\mathrm{Ker}(A) = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

2. Construcción geométrica en IR^3 a partir de un homorfismo *f* dado para introducir el cociente $IR^3/kerf$, relacionándolo con la Factorización Canónica (Lin, 2005, pp. 369–370). Se hace de forma similar al caso en IR^2 (ver Figura 4. 66. 3)



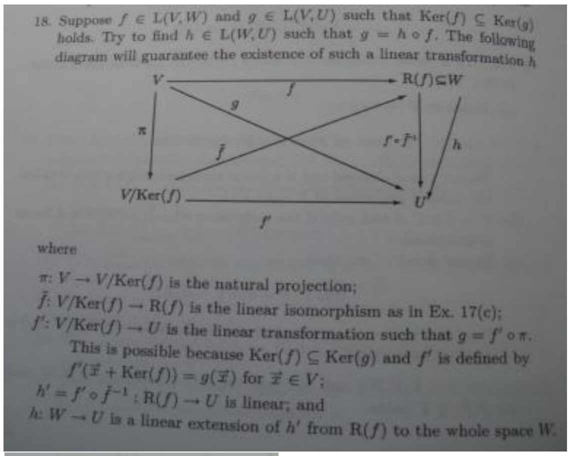
Ejemplos:

1. Consideremos la aplicación lineal

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y. \end{array}$$

El núcleo de f corresponde en el plano a una recta que pasa por $(0,0)$; $\mathbf{R}^2/\mathrm{Nuc}\, f$ es, entonces, el conjunto de rectas paralelas a Nuc f. Cada una de esas rectas corta al eje de las x en un punto $(a,0)$, y su imagen por f es, precisamente, a. El isomorfismo de (3.1) hace corresponder a cada recta de $\mathbf{R}^2/\mathrm{Nuc}\, f$ su intersección con el eje de las x.

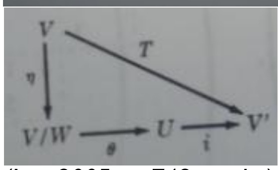
3. Ejemplo de un homomorfismo de IR^2 a IR acompañado de una representación geométrica que ilustra el primer teorema de isomorfía (Castellet & Llerena, 1996, p. 101)



18. Suppose $f \in L(V,W)$ and $g \in L(V,U)$ such that $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$ holds. Try to find $h \in L(W,U)$ such that $g = h \circ f$. The following diagram will guarantee the existence of such a linear transformation h

where

$\pi: V \to V/\mathrm{Ker}(f)$ is the natural projection;
$\tilde{f}: V/\mathrm{Ker}(f) \to R(f)$ is the linear isomorphism as in Ex. 17(c);
$f': V/\mathrm{Ker}(f) \to U$ is the linear transformation such that $g = f' \circ \pi$. This is possible because $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$ and f' is defined by $f'(\vec{x} + \mathrm{Ker}(f)) = g(\vec{x})$ for $\vec{x} \in V$;
$h' = f' \circ \tilde{f}^{-1}: R(f) \to U$ is linear; and
$h: W \to U$ is a linear extension of h' from $R(f)$ to the whole space W.



4. Otras representaciones diagramáticas de la Factorización Canónica (Lipschutz, 1996, p. 467, izquierda) o su aplicación (Lin, 2005, p. 748, arriba)

Figura 4. 74: El primer teorema de isomorfía en otros textos de AL

En el **Libro de Texto**, a la *Proposición 9.12* sobre la Factorización Canónica le sigue el *Ejemplo 9.13* (Fernando et al., 2010, p. 192) que es una aplicación práctica y más general del resultado probado en la proposición anterior. En él se muestra cómo se puede utilizar el Primer Teorema de Isomorfía para factorizar funciones a través de cocientes que no tienen por qué ser *E/kerf*. Este tipo de tarea es, junto con el cálculo de una base del

Cociente, la más frecuente en **las Hojas de Problemas**: aparece en 5 de los 13 problemas, incluyendo los dos de los exámenes finales de Julio y Septiembre. Como ocurría con aquellos, estos problemas también son muy mecánicos y operativos aunque pueden llegar a complicarse un poco más al presentarse en un contexto dual (como en los *Problemas 9.7, 9.10*, y los dos de los exámenes). Respecto al uso de representaciones, para resolver dichos problemas las representaciones diagramáticas resultan de gran utilidad (Figura 4. 75). También se observa este hecho en los **episodios de clase**.

Número 13. Sean E, F, G espacios vectoriales de tipo finito.

(1) Dadas dos aplicaciones lineales $f : E \to F$ y $g : E \to G$, demostrar que existe una tercera $h : F \to G$ tal que $h \circ f = g$ si y sólo si $\ker(f) \subset \ker(g)$. ¿Cuándo podemos además elegir h inyectiva?

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dd, bend right=60, "g"'] & F = \mathrm{im}(f) \oplus V \arrow[dd, bend left=40, "h : u+v \mapsto h'(u)+h''(v)"] \\
E/\ker(f) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi'"] & \mathrm{im}(f) \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[d, "h'"] \\
E/\ker(g) \arrow[r, "\overline{g}"] & \mathrm{im}(g) \subset G = \mathrm{im}(g) \oplus W
\end{tikzcd}
$$

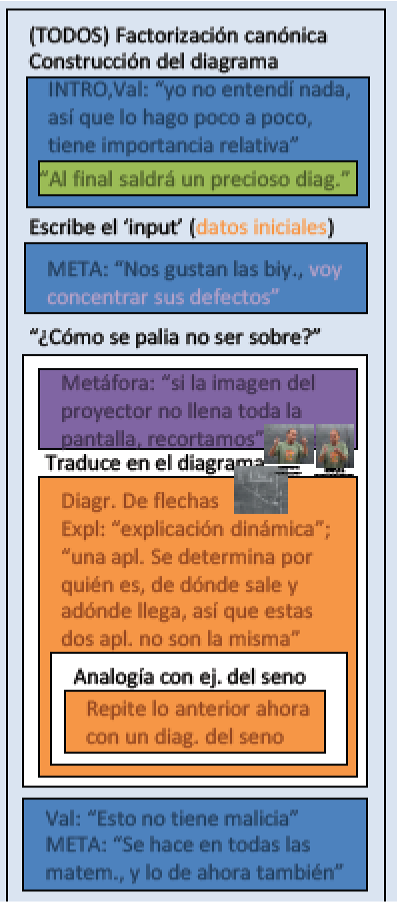
Figura 4. 75: Enunciado de un problema que involucra una representación diagramática en su resolución en el Libro de Texto (Fernando et al., 2010, p. 262)

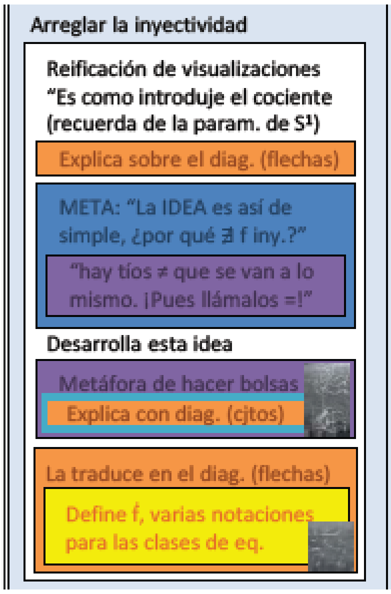
La Factorización Canónica se explica en las clases teóricas el lunes de la Semana 6 con una cantidad elevada de visualizaciones (S620110228G, ver Figura 4. 76). Una razón que justifica este hecho es la dificultad que G. encontró en su experiencia de estudiante, al no comprender este resultado cuando se lo explicaron por primera vez:

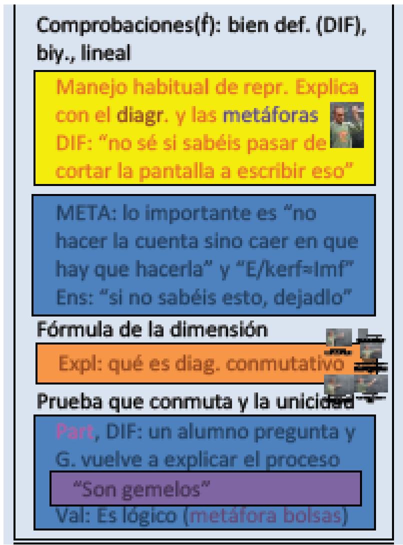
> *#00:20:41-3# G: Bueno, ¡ah! Ahora viene la proposición esta 9.12 que a mí me causó, cuando me lo contaron, una perplejidad impresionante. Así que voy a intentar... [...] A mí me resultó... Esto me lo explicaron el 4º día o así de estar en la facultad, y no entendía ni Factorización, ni Canónica y a duras penas, Aplicación Lineal. Entonces, voy a ir al grano y al final acabará saliendo ese precioso diagrama, nos aparecerá el diagrama, pero yo lo voy a ir haciendo poco a poco, ¿vale? #00:21:16-5# (S620110228G)*

La explicación, como deja entrever esta cita, es constructiva. Esto significa que comienza escribiendo los datos de partida, el 'input' y va explicando y argumentando hasta llegar al resultado que se quiere explicar. G. comienza explicando que "*nos gustan las biyectivas*", y la aplicación de partida no lo es. Explica que lo que van a hacer es "*concentrar sus defectos*", que son no ser sobreyectiva y no ser inyectiva. Para explicar cómo arreglar la sobreyectividad utiliza la metáfora de la pantalla, que ya describimos en el Estudio Inicial (ver sección 4.1.2.3), con gestos y luego la traduce al diagrama que está construyendo. Indica que así se obtiene una nueva función (está definida en otros espacios distintos) y da sentido a esta afirmación con un ejemplo concreto con el seno (Figura 4. 76). Los EVC entran en juego cuando explica cómo arreglar la inyectividad. Comienza recordando el ejemplo de la ***parametrización de la circunferencia***. Después de explicarlo brevemente (ahora le lleva menos tiempo explicarlo gracias a la reificación de esta visualización), concluye:

#00:24:54-0# G: ¿Y aquí qué haces? Aquí no hay otro truco en Matemáticas que hacer el Cociente. Y la idea es así de simple, ¿por qué no existe inyectiva? Digo porque hay tíos distintos que se convierten en lo mismo (hace un gesto con los dedos recogidos). Pues llámales una sola cosa a esos tíos distintos que se transforman en lo mismo. #00:25:04-1# (S620110228G)







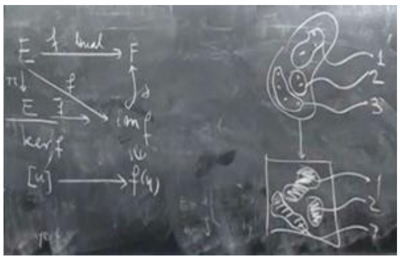


Figura 4. 76: Episodio sobre la Factorización Canónica (S620110228G). En la foto de la pizarra puede verse el diagrama simbólico que se está construyendo y el diagrama conjuntista que G. utiliza para explicar, con la metáfora de las bolsas, como arreglar la inyectividad .

Así aparece la idea de EVC como proyección o como método de concentrar los defectos en un punto. Para darle más sentido, G. utiliza la ***metáfora de las bolsas***. Ésta consiste en pensar que el "Espacio Cociente es un espacio cuyos elementos son bolsas" y que "la proyección canónica es moverse de un espacio a ese otro espacio de bolsas". Para comunicarla mejor utiliza un diagrama de flechas conjuntista cuyos elementos va describiendo poco a poco (Figura 4. 76): comienza dibujando un conjunto con nueve elementos (puntos); y los agrupa de forma que, vía cierta aplicación, tres van al 1, dos al 2 y cuatro van al 3. Entonces dice:

#00:25:37-2# G: Digo, ¿cómo convierto esto en inyectiva? Pues paso de este espacio (dibuja una flecha hacia abajo) al espacio que tiene por puntos las bolsas. A ver si consigo... (Dibuja un cuadrado con "bolsas" parecidas a las del espacio de arriba pero rellenadas en lugar de con puntos) Uno, dos, y tres. (Habla mientras dibuja, como para no equivocarse) Y digo, mira si es biyectiva esta. (Saca de cada "bolsa" una flecha, como antes). (Dibuja). Claro que es biyectiva, porque este conjunto tiene tres elementos. Tres bolsas. La primera bolsa va al uno, la segunda bolsa va al dos y la tercera bolsa va al 3. Y eso es lo que se hace. ¿Sí? #00:26:03-3# (S620110228G).

Esta explicación le parece evidente porque termina diciendo “*Es de cajón, es que no sé qué decir*”. Entonces pasa a traducir el proceso al diagrama de flechas de la Factorización Canónica diciendo: “*pues aquí hago lo mismo, pero menos visual*”. Usa referencias explícitas a la metáfora de las bolsas, al mismo tiempo que introduce la notación simbólica correspondiente. Para dar sentido a la definición de la nueva aplicación (f barra) vuelve al diagrama de las bolsas y la traduce. Con esto finaliza la construcción del diagrama y comienza la parte de comprobaciones, que es más procedimental y simbólica. A pesar de ello, se detiene a explicar de nuevo qué es estar bien definida, ahora utilizando la metáfora de las bolsas (a través de gestos y el diagrama asociado):

> *#00:28:14-5# G: Todas las aplicaciones del mundo que nacen en un cociente, salvo que sean aquí con dibujitos (señala el diagrama conjuntista), todas utilizan el siguiente recurso. Cojamos una clase de alguien, la clase de u. (Señala [u] en el diagrama). Metamos la mano en la bolsa. Saquemos a alguien, u, (hace los gestos de meter la mano y sacar algo de una bolsa imaginaria). Y usémoslo para definir el transformado de la bolsa. Preocupación. ¿Y si mete otro la mano y saca otra cosa y al aplicarle f el resultado es distinto? (Repite el mismo gesto, pero en otra dirección). Pues entonces ¿cuál es la imagen de la bolsa? Digo pues no lo sé. Vamos a comprobar que da igual quién meta la mano y qué saque de la bolsa. Ya está es así. Hagámoslo. A eso se le llama estar bien definida. #00:28:55-8#> (S620110228G).*

Esta metáfora vuelve a ser útil para responder la duda de un estudiante sobre la inyectividad de la aplicación original. En este caso además la acompaña de otra metáfora que sirve para insistir en el efecto agrupador de la π:

> *#00:40:23-7# G: Estos dos tíos que estaban en el dominio (señala dos puntos de la primera “bolsa”) y tienen la misma imagen (señala el 1), forman parte de la misma bolsa (señala en la parte de las cajas del dibujo, la inferior). [...] Luego ya no hay dos tíos. Es que esos dos tíos ya... Son como dos gemelos (se abraza a sí mismo). Están como en el mismo útero. #00:40:37-5# (S620110228G).*

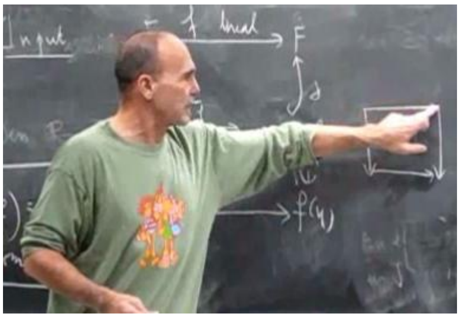
	
#00:36:43-1# G: Ojo también. Cuando en cualquier libro veáis un diagrama así (lo señala), se da por hecho que conmuta. (Mientras lo dice hace un gesto con la mano que recorre el diagrama en la dirección de las flechas).Algunos diagramas son de este estilo. Flechita, flechita, flechita, flechita (Dibuja un cuadrado cuyos lados están orientados en las direcciones de las aplicaciones).” “Siempre que uno pone un diagrama de este estilo, esta aplicación compuesta con esta es lo mismo que esta aplicación compuesta con esta.” Y no se dice que conmuta. Es un lenguaje que ya está internacionalmente adoptado. […] ¿Vale? (Borra el cuadrado).	*En algunos libros… […] los alemanes, que son muy ‘cuadriculaos’, pero eso debe ser para la vida corriente. Para las Matemáticas eso pasa en Francia. Entonces los franceses inventaron este símbolo. (Hace una flecha circular dentro del diagrama). Cuando veáis este símbolo es que, no significa nada nuevo. Eso significa que un francés ha escrito este diagrama (Risas). #00:38:19-4#*

Figura 4. 77: Explicación de los diagramas conmutativos como una representación en torno a la que existen ciertas convenciones (S620110228G).

Este episodio de clase incluye una explicación sobre la nueva representación introducida: los diagramas conmutativos. Este tipo de explicación recuerda a las que suelen acompañar a nuevas notaciones, pero no es habitual para los diagramas. G. utiliza apoyos como gestos y una ilustración (que borra rápido) para comunicar mejor las convenciones que existen en torno a ellos. También hace algún comentario humorístico, relacionado con la vida cotidiana (Figura 4. 77).

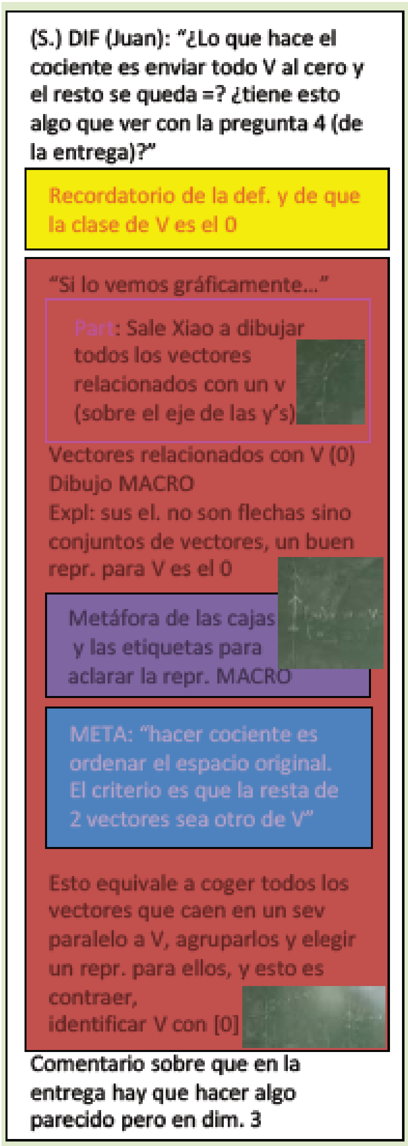


Figura 4. 78: Resumen del episodio sobre la explicación del EVC como una proyección a raíz de una pregunta de un estudiante (S820110315B).

El episodio del curso donde la concepción de los EVC aparece con más fuerza es en las clases de prácticas, a raíz del trabajo sobre "Problema 7 con Ampliación". Al comienzo de la clase, un estudiante aprovecha para preguntar: "*¿lo que hace el cociente es enviar todo V al cero y el resto se queda como está? ¿Tiene esto algo que ver con la pregunta 4 de la entrega?* (S820110315B, Figura 4. 78)". Así comienza una breve conversación sobre los EVC en la que B. aprovecha para recordar la definición y las representaciones geométricas MICRO y MACRO, con ayuda de una de las estudiantes que acudieron a tutoría el día anterior (ver Figura 4. 64). Esta última resulta especialmente interesante para explicar cómo el *V* se concentra en el cero y, en general, para visualizar los EVC como una proyección. En consecuencia también es útil para visualizar la concepción de los EVC como un tipo de suplementario, aunque no hay evidencias de que quedara esto claro para los estudiantes. En lugar de aprovechar la situación para explicar estos dos nuevos puntos de vista de los EVC, B. retoma la concepción de los Cocientes como un Modo de Ordenar, que había aparecido la clase anterior sobre el Cociente (S620110302B) con la metáfora de los tornillos (ver Figura 4. 84). Entonces introduce la idea de que los Cocientes lo que hacen es "contraer", pues al ordenar el espacio original (a través del criterio de que la resta de dos vectores sea otro de *V*) equivale a coger todos los vectores que caen en una recta paralela a *V* y agruparlos, eligiendo una etiqueta para ellos. En particular, el *V* se identifica con el *[0]*. Aunque este camino sirve para resolver la pregunta del estudiante, creemos que se puede aprovechar mejor esta situación de clase para explicar diferentes puntos de vista de los EVC. Más adelante, en torno al "Problema 7 con Ampliación" veremos más dificultades que los estudiantes encuentran con la Factorización Canónica (ver sección 4.3.2.1).

Los EVC como Complemento y Proyección Ortogonal. Caso Particular de los Espacios Euclídeos

Los Espacios Euclídeos también se estudian dentro del primer curso de AL. En el **texto** se tratan en la Unidad 18 (Vol. II). Son espacios vectoriales dotados de un producto escalar; éste define una norma, permitiendo así medir longitudes y ángulos. En este caso, la ortogonalidad tiene sentido que, dado un subespacio L, da una dirección específica en la que construir el suplementario o en la que proyectar. Por tanto, las dos concepciones anteriores sobre los EVC se traducen en este contexto como un ***tipo de complemento ortogonal*** o ***de proyección ortogonal***. Aunque en algunos de los **libros de texto analizados** se habla de los Espacios Vectoriales Euclídeos, en general no se ha encontrado ninguna referencia concreta a su relación con los EVC. Sí la hemos encontrado en el curso observado. Por ejemplo, esta relación entre conceptos relacionados con la Ortogonalidad y los Cocientes se pone de manifiesto en uno de los **problemas** de la unidad correspondiente a los Espacios Vectoriales Euclídeos. En el *Problema 13.8* (Figura 4. 79) se dota al Cociente de una estructura de Espacio Vectorial Euclídeo definiendo en él un producto escalar a partir del producto escalar del espacio vectorial original y de la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal del subespacio con el que cocienta.

8. Sean E un espacio vectorial real, W un subespacio de E y $W^{\perp}$ su complemento ortogonal respecto de cierto producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$. Denotamos $\pi : E \to E/W$ la proyección canónica y $p : E \to E$ la proyección ortogonal sobre $W^{\perp}$.

   (i) Demostrar que existe un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_W : E/W \times E/W \to \mathbb{R}$ tal que para cada par de vectores $u, v \in E$ se tiene
$$\langle u + W, v + W\rangle_W = \langle p(u), p(v)\rangle.$$

   (ii) Demostrar que si existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de E respecto de la que la matriz de la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es
$$M_{\mathcal{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
   entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar. Suponemos además que W es la recta vectorial generada por el vector $u = e_1 + e_2 + e_3$. Construir una base $\mathcal{B}'$ del cociente E/W y calcular la matriz de $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ respecto de $\mathcal{B}'$.

   (iii) Calcular la matriz de p respecto de la base $\mathcal{B}$.

Figura 4. 79: *Enunciado del Problema 13.8, dentro de la Unidad de Espacios Vectoriales Euclídeos*. Se pide comprobar la existencia de un producto escalar del cociente, definido de forma natural a partir del producto escalar del espacio vectorial original y de la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal de W. También se pide cálculo de bases y coordenadas de vectores respecto a esa base (en forma de matriz). Este es uno de los problemas más conceptuales de los 13 problemas encontrados sobre Cocientes.

En las **clases prácticas**, los estudiantes tienen dificultades en entender este problema (S1620110518B). Para ayudarles a darle sentido, se recuerda la *metáfora de los tornillos* (ver Figura 4. 84) y se comparan las diferentes representaciones simbólicas para las clases de equivalencia. Lo comprenden pero no se dan cuenta de que hay que demostrar que el producto escalar está bien definido. B. justifica la necesidad de esta comprobación con un diagrama de conjuntos (Figura 4. 80). Una vez resuelto algebraicamente el problema, se comprueba y se le da sentido con una representación gráfica (Figura 4. 80).

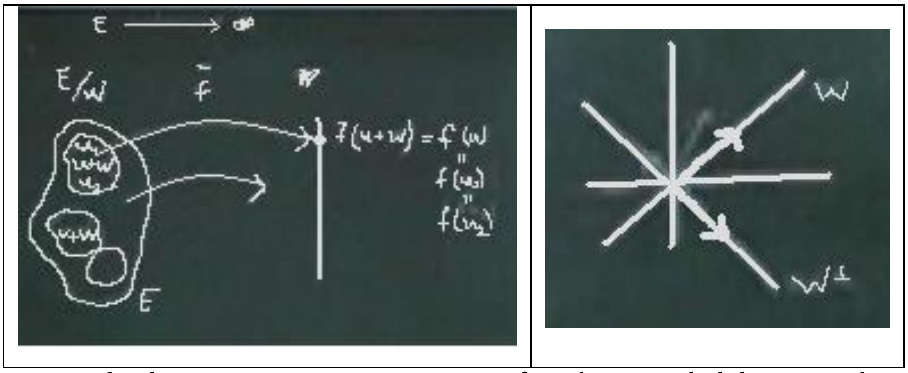


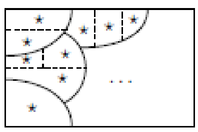
Figura 4. 80: A la izquierda, diagrama conjuntista para justificar la necesidad de comprobar que el producto escalar sobre el Cociente está bien definido. A la derecha, representación gráfica empleada tras resolver el problema algebraicamente, para darle sentido y comprobar (S1620110518B).

Cociente empleado para Clasificar

Finalmente, los ***Cocientes*** aparecen en este curso de AL ***para Clasificar***. La primera relación de equivalencia en el **texto**, aunque no se especifica como tal, es la de sistemas equivalentes (Fernando et al., 2010, p. 2). Esta definición sirve para plantear un modo general de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (p.11) y da lugar a la correspondiente definición de matrices equivalentes por filas (p. 18), caso que se señala como relación de equivalencia. En esta línea, también se encuentran Cocientes cuando se clasifican matrices, o equivalentemente formas lineales o bilineales, según criterios de semejanza (p.4, vol II) o congruencia (p.167, vol II) respectivamente. Precisamente este es uno de los objetivos del curso: decidir si dos matrices representan o no la misma forma lineal o bilineal (ver Estudio Institucional, sección 4.1.2.1).

II.2 Diagonalizability

The prior subsection defines the relation of similarity and shows that, although similar matrices are necessarily matrix equivalent, the converse does not hold. Some matrix-equivalence classes break into two or more similarity classes (the nonsingular $n \times n$ matrices, for instance). This means that the canonical form for matrix equivalence, a block partial-identity, cannot be used as a canonical form for matrix similarity because the partial-identities cannot be in more than one similarity class, so there are similarity classes without one. This picture illustrates. As earlier in this book, class representatives are shown with stars.



We are developing a canonical form for representatives of the similarity classes. We naturally try to build on our previous work, meaning first that the partial identity matrices should represent the similarity classes into which they fall, and beyond that, that the representatives should be as simple as possible. The simplest extension of the partial-identity form is a diagonal form.

Figura 4. 81: Introducción a la diagonalización desde el punto de vista de las particiones y de la elección de un representante suficientemente simple (Hefferon, 2008, pp. 355–356).

Desde el punto de vista de los Cocientes, dicho problema se traduce en decidir si ambas matrices pertenecen al mismo elemento de la partición resultante de ordenar el espacio de matrices *n x n* según uno de esos criterios –semejanza o congruencia– que resultan ser relaciones de equivalencia. Para ello, normalmente lo que se hace es comparar representantes suficientemente simples (con el mayor número posible de ceros) de la clase de cada matriz: matrices de Jordan en la clasificación de semejanza; y matrices diagonales de ceros y unos (en el caso complejo) o ceros, unos y menos unos (en el caso real) en la clasificación por congruencia. Este punto de vista no se explota claramente en el texto del curso, hay **otros libros** (Hefferon, 2008, pp. 355–356) que sí lo hacen y que introducen la idea de diagonalizar como la búsqueda de un representante adecuado.

Desde la perspectiva de los concientes, hay otras clasificaciones presentes en el texto: "ser isomorfos", "tener la misma orientación". En el primer caso, los espacios isomorfos se presentan como muy similares[89] pero no se explicita que se trate de una relación de equivalencia (p.191). En el segundo sí se hace, indicando que ésta define una partición con únicamente dos clases, la del 1 y la del -1 (p.199, vol. II). También encontramos este uso del Cociente en 2 de los 13 **problemas**. Por ejemplo, en el de la Figura 4. 82.

6. En el conjunto Σ formado por las matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ se considera la relación de equivalencia "tener la misma forma de Jordan", que denotamos $\sim$. Calcular el número de elementos del conjunto cociente $\Sigma/\sim$, y dar un representante de cada clase de equivalencia.

Figura 4. 82: Enunciado del *Problema 11.6*, sobre el *Cociente como el resultado de hacer una Clasificación a partir de una relación de equivalencia.*

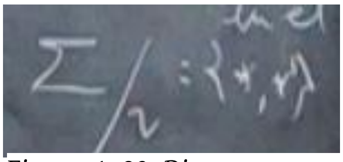


Figura 4. 83: Diagrama para expresar que el conjunto cociente de la relación de equivalencia "tener la misma orientación" sólo tiene dos clases.

Esta concepción del Cociente ***como proceso abstracto de Clasificación*** ya ha aparecido –el conjunto cociente como Partición– pero ahora lo hace dentro del contexto del AL, por eso lo mencionamos. De hecho, este uso del Cociente no se restringe a esta disciplina si no que aparece de forma similar en otras áreas de las Matemática para clasificar objetos de cualquier tipo, por ejemplo: superficies compactas, grupos de isometrías del plano (teselaciones), variedades, singularidades, etcétera.

En las **clases teóricas**, dicha concepción aparece de forma similar a la señalada en el libro de texto, para clasificar conjuntos por relaciones de equivalencia. Por ejemplo, cuando se habla de la relación "tener la misma orientación" se dice que el Conjunto Cociente resultante sólo tiene dos clases de equivalencia y se expresa diagramáticamente (S1620110518G, ver Figura 4. 83). En las **clases prácticas** se enfatiza a través de una metáfora similar a la las bolsas, referida en varias ocasiones: la ***metáfora de los tornillos***. Ésta se cita por primera vez en la clase dedicada a explicar los EVC a raíz de las dificultades de los estudiantes (S620110302B, Figura 4. 63). Consiste en imaginar que "el cociente es el mostrador de una ferretería", "las clases son cajones con cosas como tornillos" y "los representantes son las etiquetas de los cajones". Esta metáfora sirve para

[89] Es importante el comentario que se hace cuando se definen los espacios isomorfos sobre la utilidad que tiene el isomorfismo existente entre ambos para trasladar propiedades de uno a otro. Como ejemplo de este proceder se define, dada una base *B* de *E* espacio de tipo finito de dimensión *n*, un isomorfismo entre *E* y IK^n que en libro se denota como θ_B y que después aparecerá en clase como $coord_B$ (Figura 4. 16).

resaltar que el Cociente no es un subespacio del original, sino un nuevo espacio cuyos elementos son de diferente naturaleza: tornillos en el espacio original, y cajones en el cociente. También es útil para reflexionar en torno a las diferentes notaciones de las clases de equivalencia. En la corrección escrita de los *Problemas 7.9* y *7.13*, del día anterior, aparecen dos clases de equivalencia de distintos EVC con el mismo representante, pudiendo crear confusión el uso de la notación de corchetes. Para aclarar este hecho B. dibuja unos tornillos de diferentes longitudes en la pizarra, con tizas de colores. Los estudiantes definen dos relaciones de equivalencia diferentes: “tener el mismo color” o “tener el mismo tamaño” (Figura 4. 84). Esta ilustración es útil para la explicación siguiente y favorece su participación Cada relación de equivalencia da lugar a conjuntos cociente diferentes (con un número diferente de cajones). Sin embargo, hay cajones de conjuntos diferentes con las mismas etiquetas, es decir, los mismos representantes. Si no se mira dentro no es posible distinguir a qué cociente pertenece cada cajón. B. explica que esto es lo que ocurre con la notación de corchetes, (*[u]*). En el lenguaje que proporciona esta metáfora, la idea se puede expresar como sigue: “los corchetes (*[u]*) no dejan ver qué hay dentro de los cajones (*u+V*)”. Además de estos usos, como hemos visto, la metáfora de los tornillos sirve para explicar: la representación MACRO (ver Figura 4. 63); o la idea de EVC como proyección (ver Figura 4. 84).

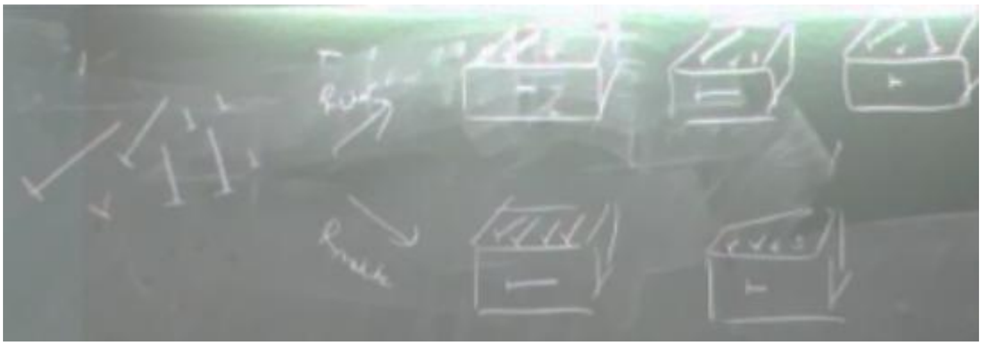


Figura 4. 84: Ilustración empleada para apoyar la explicación de la *metáfora de los tornillos* (S620110302B).

4.3.1.3 Los Cocientes en el Horizonte, más allá del AL

Ya han aparecido algunas ideas en torno al Cociente aplicables a otras partes de las Matemáticas, más allá del AL. Por ejemplo, se ha remarcado que la idea del *cociente como Conjunto que hereda una Estructura* se puede adaptar a cualquier otro objeto matemático con una estructura algebraica como los Anillos, los Cuerpos, los Ideales, los Módulos o las Álgebras. Cuando se ha mostrado que la concepción de los *EVC como un tipo de Suplementario* puede verse también como una *Proyección* –en la que el subespacio con el rol de divisor queda anulado– se ha señalado que esta forma de proceder es útil en ramas como la Geometría Algebraica o el Álgebra Conmutativa, entre otras. Por último, se acaba de indicar que el *Cociente como Partición* se puede utilizar para clasificar objetos matemáticos de diversa naturaleza. La lista de aplicaciones y definiciones de los Cocientes en áreas más avanzadas de las Matemáticas puede ser interminable y su descripción va más allá de los objetivos de esta investigación. Sin embargo, sí resulta relevante estudiar cómo aparece la noción de Cociente en otras asignaturas del Grado de Matemáticas, posteriores al AL. Este es el objetivo de esta sección. De este modo se contribuye a precisar el HMK y el KCC (ver sección 3.2.1.3) y se defiende el AL como contexto adecuado para introducir muchas de las concepciones que después serán necesarias para el desarrollo del pensamiento matemático.

Geometría Proyectiva

La continuación natural de AL en el programa del Grado de Matemáticas es *Geometría Lineal*, asignatura del Primer Cuatrimestre del segundo curso cuyos contenidos se refieren principalmente a la *Geometría Proyectiva*. Al igual que ocurría con el AL, hay dos aproximaciones a esta disciplina. La primera, que se puede denominar *geométrica* o *sintética*, está basada en axiomas (sobre incidencia de puntos, líneas, planos, etc.) evitando el uso de Cocientes. La segunda, que se puede denominar *algebraica*, es la más extendida en la Universidad y hace uso del Cociente para construir, a base de coleccionar las rectas vectoriales de un determinado espacio vectorial *E,* un nuevo espacio: el espacio proyectivo, *P=P(E)* (ver Figura 4. 85). Por ello es importante haber comprendido bien la noción de Espacio Cociente antes de introducirse en esta asignatura. También ayuda conocer los orígenes de esta disciplina. Una de sus principales motivaciones es la búsqueda de una base matemática durante el Renacimiento (Figura 4. 85).

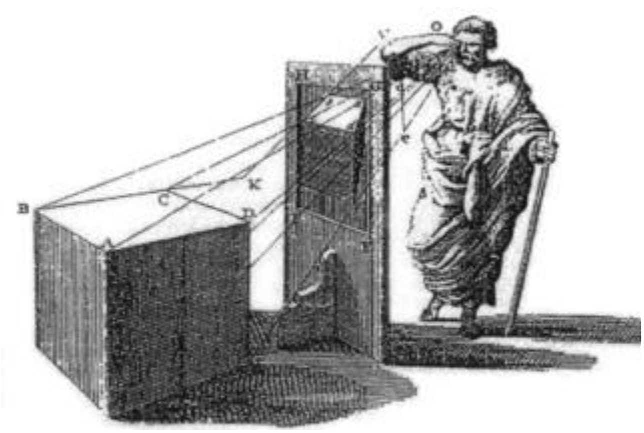


Figura 4. 85: *Construcción del espacio proyectivo como resultado del estudio de la perspectiva.* Los orígenes del espacio proyectivo se remontan al Renacimiento, cuando tanto artistas como matemáticos se preocupan por la perspectiva. En la imagen se observa un instrumento empleado por pintores y conocido como el ‘velo de Alberti [90] ’. En Matemáticas, lo único que importan son las direcciones desde un punto concreto (el origen) y por tanto, las rectas que pasan por él. Como todas ellas tienen un punto en común –el origen– cualquier otro punto determina completamente una dirección. Así, se pueden identificar todos los puntos que determinan la misma dirección a través de la siguiente relación de equivalencia: dos puntos del espacio *E* están relacionados si determinan la misma dirección, es decir, si pertenecen a la misma recta que pasa por el origen. Esto establece una partición en *E*, donde las clases de equivalencia son las rectas vectoriales de *E*.

También se puede definir la relación de equivalencia que da lugar al espacio proyectivo del siguiente modo: dos vectores están relacionados si son proporcionales. Esto permite introducir coordenadas en *P(E)* a partir de las de *E*. Utilizando la proyección canónica este proceso se expresaría: $\pi: E \rightarrow P(E); (x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow (x_1: x_2: ...: x_n)$, donde ‘:’ es el mismo símbolo empleado para la división en la escuela y se utiliza para indicar que las coordenadas están determinadas salvo proporcionalidad. Existe la tentación de definir la suma de dos puntos del espacio proyectivo a través de la suma de sus coordenadas, pero esta operación no está bien definida. Por tanto, este modelo de Cociente es diferente al de los EVC en AL. Sin embargo, la idea matemática fundamental que está detrás de esta construcción no es completamente nueva; extiende la concepción del *Cociente como una Proyección* a la ***Método para Eliminar Información Extra*** (en este caso, los puntos redundantes para la determinación de direcciones).

[90] http://piziadas.com/es/2012/02/origen-de-la-geometria-proyectiva-renacimiento-alumnos.html

Otro uso remarcable de los Cocientes en *Geometría Proyectiva* aparece en la definición de una de las nociones más importantes de la asignatura: la *Razón Doble*, que es un número asociado a cuaternas ordenadas de puntos alineados en un Espacio Proyectivo (ver Figura 4. 86). Su importancia radica en que es un invariante proyectivo, es decir, las transformaciones biyectivas de rectas proyectivas –*Homografías*– preservan la razón doble. Su interés para el presente estudio es que se puede considerar como una extensión de la idea de Cociente como ***Razón***, de la escuela, a un contexto más amplio.

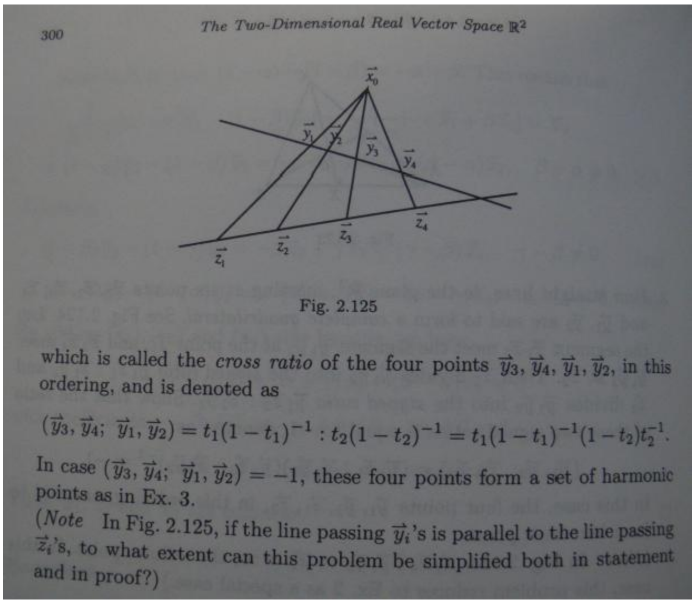

300 *The Two-Dimensional Real Vector Space* $\mathbb{R}^2$

Fig. 2.125

which is called the *cross ratio* of the four points $\vec{y}_3, \vec{y}_4, \vec{y}_1, \vec{y}_2$, in this ordering, and is denoted as

$$(\vec{y}_3, \vec{y}_4;\ \vec{y}_1, \vec{y}_2) = t_1(1-t_1)^{-1} : t_2(1-t_2)^{-1} = t_1(1-t_1)^{-1}(1-t_2)t_2^{-1}.$$

In case $(\vec{y}_3, \vec{y}_4;\ \vec{y}_1, \vec{y}_2) = -1$, these four points form a set of harmonic points as in Ex. 3.

(*Note* In Fig. 2.125, if the line passing $\vec{y}_i$'s is parallel to the line passing $\vec{z}_i$'s, to what extent can this problem be simplified both in statement and in proof?)

Figura 4. 86: Explicación de la *Razón Doble* en un libro de AL que aprovecha para introducir algunas nociones proyectivas (Lin, 2005, p. 300)

Estructuras y Ecuaciones Algebraicas (Teoría de Galois)

La asignatura de *Estructuras Algebraicas* es obligatoria y se estudia de forma simultánea con Geometría Lineal, es decir, en el Primer Cuatrimestre del segundo curso del Grado. Según la guía docente de esta asignatura[91], el principal objetivo de esta asignatura es "*ser capaces de aprender los conceptos básicos de la teoría de grupos y anillos*". Algunos de los contenidos de esta asignatura relevantes desde el punto de vista de los Cocientes son: generalidades de Anillos; Ideales y Teoremas de Isomorfía; Dominios de Integridad y Cuerpo de Fracciones; Anillos de Polinomios y División; Dominios Euclídeos y Divisibilidad; generalidades de Grupos, Subgrupos Normales y Teoremas de Isomorfía, ejemplos de grupos, acción de un grupo sobre un conjunto. Muchas de estas nociones son necesarias para comprender la Teoría de Galois y sus aplicaciones que se explican en *Ecuaciones Algebraicas*, asignatura que se estudia en el Segundo Cuatrimestre del tercer curso y que es la continuación natural de Estructuras Algebraicas, así como aspectos más generales de la Teoría de Anillos y MódulosNoetherianos que se explica en *Álgebra Conmutativa*, asignatura optativa de los últimos cursos del Grado. En particular, se presta especial atención a la idea de *Acción de un grupo sobre un conjunto* (que conecta con la idea del Cociente como Proceso de

[91] https://matematicas.ucm.es/estudios/2012-13/grado-matematicas-plan-800582

Identificar o Comprimir en un solo punto elementos similares) y a la construcción de un Anillo de Fracciones[92].

Primero, las acciones de grupos fueron uno de los contextos más influyentes a la hora de desarrollar la noción de *Grupo Cociente* (ver sección 4.3.1.1). Dados un grupo G y un conjunto X, una acción de G sobre X es un homomorfismo de G en el grupo de biyecciones de X. Para cada g de G denotamos $\tilde{g}$ la imagen de g por dicho homomorfismo. En este contexto se puede definir una relación de equivalencia como sigue: dos puntos x, y de X se dicen relacionados si existe g en G tal que $\tilde{g}(x) = y$. A la clase de equivalencia de x se le llama *órbita* de x bajo la acción de G y así, el conjunto cociente X/G es la ***colección de las órbitas resultantes de la acción de un grupo sobre un conjunto***. Uno de los ámbitos que da origen a este concepto es el estudio del Grupo de Simetrías de un polígono regular de n lados actuando sobre el conjunto de los vértices de dicho polígono. Este ejemplo se enseña en estos primeros cursos del Grado (ver sección 4.3.1.1) y puede ser un buen contexto para comenzar a familiarizarse con los Cocientes, como también lo es el estudio de la circunferencia como el resultado de la acción de $\mathbb{Z}$ sobre IR (Figura 4. 87). Al mismo tiempo, si se estudian previamente los EVC y se han comprendido como Conjuntos Cociente que heredan una estructura se pueden entender mejor otros ejemplos estándar de acción de grupos: el caso en que el conjunto X tiene estructura (por ejemplo Espacio Vectorial, Espacio Topológico, Variedad Diferenciable, Superficie de Riemann, etc.) y G es el grupo de aplicaciones de ese conjunto junto a su estructura en sí mismo (Isomorfismos Lineales, Homeomorfismos, Difeomorfsmos, Isomorfismos Conformes, etc.)

Cuando se evalúa la expresión $sen(2\pi x)$ sólo interesa $x \bmod 1$, ya que el seno es una función periódica: $sen(2\pi x) = sen(2\pi(x+k))$, donde k es un entero. El conjunto de todos los movimientos de la recta real IR por los enteros forma un grupo Γ, que deja invariante la función $sen(2\pi x)$. Se puede formar el cociente IR/Γ, que es el conjunto de clases de equivalencia con respecto a este grupo. Este cociente se puede representar por el intervalo cerrado $[0,1]$, entendiendo que los extremos se identifican. Pero identificar los dos extremos da una circunferencia. Una vez que se conocen los valores de $sen(2\pi x)$ sobre la circunferencia, se puede calcular el de cualquier otro valor y, simplemente restando o sumando enteros a y hasta que el resultado caiga en el rango $[0,1)$.

En este ejemplo el grupo discreto Γ es el conjunto de las transformaciones de IR dado por todas las transformaciones $x \rightarrow x+k$, donde k es un entero. […] El cociente de IR bajo esta acción es S^1, la circunferencia unidad. Se escribe $IR/\Gamma = S^1$.

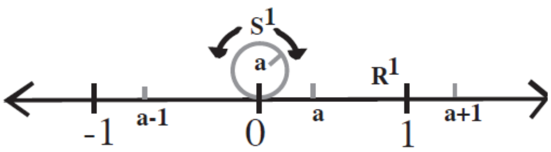


Figura 4. 87: Circunferencia unidad como el resultado de la acción de $\mathbb{Z}$ sobre IR (Gunn, 1993, p. 255)

Segundo, la motivación para definir la siguiente noción que revisamos en este apartado surge de querer mirar el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales a partir del anillo de enteros $\mathbb{Z}$. Esta idea se generaliza dando lugar a los *anillos de fracciones* del modo en que se explica en la Figura 4. 88. Así puede verse cómo se construyen concepciones nuevas del cociente (C***onjunto con Estructura Heredada***, en este caso de Anillo) a partir de antiguas (*Cociente como Fracción*). A su vez estas nuevas concepciones, que se entienden mejor si ya se han

[92] https://matematicas.ucm.es/estudios/2012-13/grado-matematicas-plan-800591

manejado otras similares previamente (como los EVC como *Conjunto con estructura heredada de Espacio Vectorial*), pueden ser útiles para comprender mejor otras posteriores. Por ejemplo, el concepto de Anillo de Fracciones se puede extender a Cuerpos y Módulos. Más adelante, en *Álgebra Conmutativa*, se utiliza para explicar el proceso de construir Anillos Locales a partir de un anillo dado, conocido como *Localización* (y que extiende la idea de *Cociente como Proceso de Concentrar los Defectos en un punto*). También es útil para el estudio de Sucesiones Exactas.

Definición 2.0.5. *Sea A un anillo y S un conjunto multiplicativo. Introducimos la siguiente relacion en $A\times S$*

$$(a,s)\sim(b,t)\Leftrightarrow \exists u\in S \text{ tal que } u.(at-bs)=0$$

Luego probaremos que $\sim$ es una relacion de equevalencia. Escribimos a/s para la clase de (a,s). Notemos que la relacion $at=bs$ no es de equivalencia. Entonces el anillo de fracciones de A con respecto a S es:

$$S^{-1}A=(A\times S)/\sim$$

Con las operaciones definidas por las usuales en fracciones

$$a/s \pm b/t = (at \pm bs)/st \qquad y \qquad a/s\cdot b/t = ab/st$$

Figura 4. 88: Construcción del anillo de fracciones a partir de otro anillo y un conjunto multiplicativo[93].

Topología y Topología Algebraica

Hay dos asignaturas de *Topología* en el Grado de Matemáticas. La primera, Topología Elemental, es de carácter obligatorio y se cursa en el Primer Cuatrimestre del tercer curso de grado. Según la guía docente de la asignatura[94], El objetivo de esta asignatura es "*conocer y manejar los conceptos y resultados básicos de la Topología, y relacionarlos con los de otras asignaturas del grado*". Entre los contenidos impartidos en ella relacionados con el Cociente se puede destacar: Espacio Topológico Cociente, Identificaciones, Homotopía y Grupo Fundamental de un Espacio Topológico y Superficies Compactas. La otra, *Topología Algebraica*, se oferta como asignatura optativa de los últimos cursos de Grado y se profundiza en los contenidos de la asignatura anterior incidiendo en el "*estudio de la topología de los espacios con herramientas algebraicas (Grupo Fundamental y Homología)*" y, en particular, en la Clasificación de Superficies Compactas.

En la construcción de la circunferencia unidad como *Cociente de la Acción de un grupo sobre un conjunto* (Figura 4. 87) se produce una identificación de puntos que tiene un efecto similar al de 'pegar' los extremos. En Topología, el *Espacio Cociente* se define como respuesta a la idea de formalizar acciones de este estilo, conocidas como ***acciones de 'cortar y pegar'*** al ser transformaciones que habitualmente se utilizan en Geometría para construir nuevos objetos como las superficies compactas. Por tanto, la aproximación al Cociente desde esta disciplina es de fuerte motivación geométrica y difiere ligeramente de las vistas hasta ahora, aunque se pueden establecer algunas conexiones. Por ejemplo, el Cociente en Topología conecta con: la idea que cocientar es "comprimir" las clases de

[93] http://www.iam.conicet.gov.ar/cms/?q=es/system/files/u3/Anillos_de_fracciones_-_Yamila_Otero.pdf
[94] http://www.mat.ucm.es

equivalencia en un solo punto; o el Primer Teorema de Isomorfía. Como hemos visto, este teorema establece que dado un homomorfismo (de grupos o de espacios vectoriales) $f:E \rightarrow F$, $E/\ker f$ es isomorfo a F. En particular, esto implica que existe una biyección entre $E/\ker f$ y F –vistos como conjuntos– que se comporta bien en relación a las estructuras algebraicas (de Grupo o de Espacio Vectoriales). Lo relevante de este resultado es que se puede definir una partición en E a través de f con cualquier aplicación, independientemente de la naturaleza de los espacios E y F y olvidándose de si tienen o no estructura.

Dada una aplicación sobreyectiva $p: X \rightarrow Y$, el conjunto $P = \{p^{-1}(y) : y \in Y\}$ es siempre una partición de X, ya que sus elementos son subconjuntos excluyentes entre sí que cubren todo X. De este modo, se llega a concebir el Cociente como la ***Colección de las Preimágenes de una función sobreyectiva***. De hecho, esta concepción es equivalente a la de partición ya que, recíprocamente, dada una relación de equivalencia R en un conjunto X siempre se puede encontrar una función sobreyectiva $f:X \rightarrow Y$ que defina en X la misma partición que R. A pesar de esta estrecha relación matemática entre ambas concepciones, los estudiantes tienen dificultades para establecer conexiones entre ellas (Hamdan, 2006). Por tanto suponemos que, a menos que se haga algo para remediarlo, los estudiantes encontrarán difícil relacionar la definición de espacio topológico cociente con cualquier conocimiento previo del cociente, ya que ésta se basa en la concepción de la *Colección de Preimágenes de una función sobreyectiva*, como se explica a continuación.

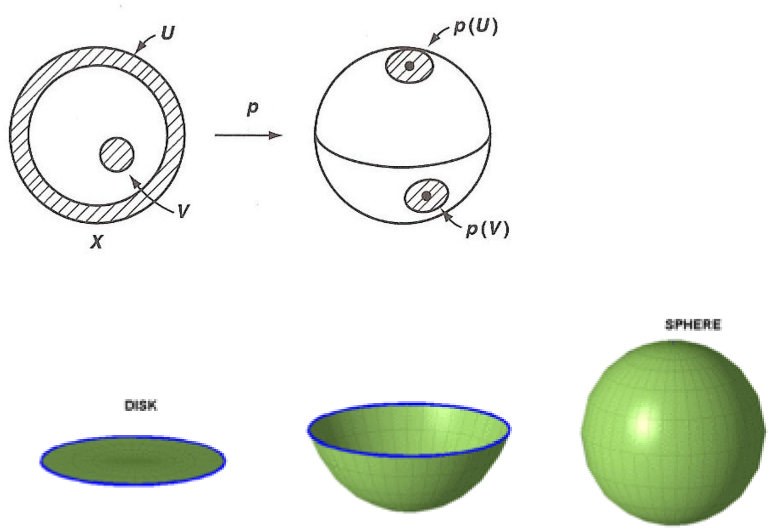


Figura 4. 89: *Espacios Topológicos Cociente para traducir la idea de 'cortar y pegar' de la Geometría*. Arriba (Munkres, 2002, p. 158) se puede ver una aplicación cociente donde el conjunto inicial X es el disco unidad y la partición definida por X^* tiene como elementos las clases de equivalencia formadas por los puntos de dentro del disco tomados de forma aislada y los puntos del borde tomados conjuntamente como una sola clase. Los conjuntos abiertos del disco con esta partición, es decir de X^*, son de dos tipos: bolas dentro del disco (como V) o coronas circulares alrededor del borde del disco (como U). Esta topología inducida en el disco es homeomorfa a la de la 2-esfera. Por tanto, topológicamente hablando, se puede decir que el espacio topológico X^* definido de este modo es una esfera que se ha obtenido al identificar todo el borde del disco con un punto. En un modelo real esta construcción matemática se podría traducir con la acción de coger un disco de tela con una cuerda cosida en su borde y tirar de la cuerda de modo que su borde

queda 'pegado' en un único punto. Como se muestra en la parte inferior de la figura, el resultado sería una bolsa cerrada con la misma forma que una *2*-esfera[95].

Sea una partición X^* en X y una función $\pi: X \rightarrow X^*$ que asigna a cada elemento en X su clase en X^*. Esta aplicación es la proyección canónica, que es siempre biyectiva. En el caso de que X sea un espacio topológico, existe una estructura topológica en X^* que hace que π se comporte bien en relación a los objetos más importantes en Topología, es decir, los conjuntos abiertos. Esto es, U es abierto en X^* sí y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X. La partición X^* junto con su estructura topológica, completamente determinada por π en el modo descrito, se denomina *Espacio Topológico Cociente* de X. Por tanto, los conjuntos abierto de X^* son colecciones de clases de equivalencia cuya unión, es decir la preimagen por π, es un conjunto abierto de X. Como se muestra en la Figura 4. 89, de este modo se consigue traducir en lenguaje matemático las acciones de "cortar y pegar" de la Geometría.

Otro uso importante de los Cocientes en Topología, y en particular en Topología Algebraica, aparece a la hora de definir invariantes que permitan obtener cierta información sobre la topología de un espacio y ayuden a decidir si dos espacios dados son homeomorfos, es decir, topológicamente indistinguibles. Por ejemplo, el Grupo Fundamental de un espacio X. Éste es un grupo cociente definido a partir de una relación de equivalencia denominada *Homotopía* que se define en el espacio de caminos de X. Intuitivamente esta relación se puede traducir en que dos caminos son equivalentes si se puede deformar uno en otro de modo continuo. Otros ejemplos son los grupos de Homología y de Cohomología. Para lograr comprender estas nociones avanzadas se precisa cierta familiaridad con la concepción de Grupo Cociente como un ***Conjunto con una Estructura Heredada*** y, como se ha explicado, haber estudiado los EVC puede ayudar a ello.

Análisis Funcional

Por último, entre las diversas optativas ofertadas para los últimos cursos de Grado, Análisis Funcional es de obligada referencia por la importancia que esta disciplina tiene en el desarrollo del AL (ver Estudio Epistemológico, sección 4.1.1). Consecuentemente, en ella se extienden muchas de las concepciones de los EVC. Los principales objetos de estudio en esta asignatura son los espacios de Hilbert y de Banach que son espacios vectoriales completos dotados con una norma. En el caso de los espacios de Hilbert, ésta proviene de un producto escalar, por lo que generaliza la noción de Espacio Euclídeo a espacios de cualquier dimensión, finita o infinita. Gracias a la presencia de una norma, se puede dotar a estos espacios vectoriales de estructura topológica, permitiendo así combinar ambos puntos de vista: el algebraico y el topológico.

Dado un espacio de Banach B (H, si es de Hilbert) y M un subespacio vectorial definimos, de forma similar a los EVC, el espacio cociente X/M. Si se ha comprendido bien en AL la definición formal de los EVC se sabe que basta con que M sea subespacio vectorial para que X/M tenga estructura de Espacio Vectorial, ya que no se hace uso de la dimensión en ningún momento. Ahora cabe preguntarse si se hereda también la estructura de espacio métrico de $(X, ||.||)$. Se ve que esto sólo ocurre cuando M es cerrado. En ese caso, el cociente

[95] Imágenes de la parte inferior obtenidas de un clip de animación de Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Disk_to_Sphere_using_Quotient_Space.gif

hereda una norma y se puede probar que está bien definida. Es interesante plantearse la posibilidad de si, como ocurre en el caso finito, se puede pensar en el Cociente como un ***tipo de Suplementario*** o incluso como una P***royección***. En este contexto se dice que M se complementa en X si existe otro subespacio cerrado N tal que $M \cap N = \{0\}$ y $M + N = X$. Para los espacios de Hilbert la respuesta a la cuestión anterior es sí: hay una estrecha relación entre π y la proyección ortogonal de H sobre $M^{\perp}$. De hecho la restricción de π a $M^{\perp}$ es un isomorfismo isométrico, por lo que pueden contemplarse como espacios similares. Sin embargo, no existe un resultado similar en espacios de Banach arbitrarios: en general no se cumple que todo subspacio cerrado M se pueda complementar en cualquier espacio de Banach. Para comprender esta diferencia entre los EVC en AL, en los espacios de Hilbert y en los espacios arbitrarios de Banach es importante: concebir el *Cociente como un Tipo de Suplementario o como el resultado de una cierta Proyección*; manejar a la vez los puntos de vista algebraico y topológico en torno a la noción de Cociente y comprender que hay particularidades derivadas de la dimensión infinita. Por tanto, el Análisis Funcional es un buen ejemplo de lo importante que es conocer y entender diferentes concepciones del Cociente en los primeros niveles para así poder progresar con éxito hacia la comprensión de Matemáticas más avanzadas.

4.3.2 Experimentación con una Actividad de Visualización: "Problema 7 con Ampliación"

A continuación presentamos una actividad significativa de la experimentación. En el estudio veníamos constatando las dificultades en la comprensión del concepto de EVC pese a las diversas explicaciones (algunas muy visuales) empleadas en las clases teóricas y prácticas. Por tanto, se planteamos esta experimentación con un con un doble objetivo: por una parte, ayudar a los estudiantes a mejorar su comprensión a través de una actividad explícita de visualización del concepto; y de otra parte, estudiar el impacto de las explicaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Se siguen las fases propuestas por la metodología DR: (1) basada en la teoría y en las experiencias previas (incluyendo las experimentales) diseñamos el experimento pensado (ver Metodología, sección 2.4.4.2); (2) éste se convierte en *experimento práctico* al desarrollarlo e implementarlo en el contexto de estudio; (3) finalmente la comparación entre ambos tipos de experimentos –pensado y práctico– facilita su evaluación y una posterior reflexión. Siguiendo las dos últimas fases, esta sección se estructura en dos apartados: aplicación de la actividad y respuesta de los estudiantes; evaluación y revisión de la actividad. En la siguiente y última sección de este capítulo se incluye una reflexión más global que incluye una revisión de las Teorías Locales en torno a la enseñanza-aprendizaje de los EVC.

4.3.2.1 Aplicación de la Actividad y Respuesta de los Estudiantes

La experimentación se realizó en la Semana 7 (S720110309B) y las tutorías dos semanas después (ver Metodología, sección 2.4.4.2). A continuación se describen las respuestas escritas de cada grupo: los caminos de resolución seguidos, las dificultades surgidas y las interpretaciones derivadas del contraste de estos elementos con el análisis a priori. La información obtenida en las tutorías permite complementar el análisis de las respuestas escritas y ver hasta dónde llegan los estudiantes, a través de la mediación del profesor.

Hay cuatro aspectos relevantes para la comprensión de la actividad que se trabajan en todos los grupos y que se deben tener en cuenta para comprender mejor el relato de lo ocurrido durante las tutorías: comportamiento geométrico de la proyección; construcción del V como colección de preimágenes de la f; visualización del isomorfismo entre V y la imagen de f, y relación entre V y $IK^3/ker\, f$.

Grupo 1

Este grupo estaba formado por cuatro estudiantes: Ángel, Elena, Pablo y David. Para calcular la matriz del **Problema 8.7** siguieron un método diferente a los pensados de antemano. Razonando con dimensiones llegan a la conclusión de que $im\ f=L[(0,0,1)]$ y describen la matriz de la base canónica como sigue:

$$M_f(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

A continuación describen los vectores del núcleo como los de la forma *(α, β, -α)*, los sustituyen en la expresión matricial de la *f* y obligan a que su imagen sea *(0,0,0)*. Así obtienen que λ=μ. A partir de aquí, el final es el mismo pensado a priori: aplicando la condición 2) se obtiene que λ=1. Para la **Pregunta 1**, clasifican la aplicación como "*una proyección sobre la recta de dirección (0,0,1) que pasa por el origen*", aunque no justifican esta afirmación de ningún modo. Describen el comportamiento geométrico de la función como se muestra la Figura 4. 90. A pesar de que la respuesta es correcta, ésta se hace en términos de coordenadas. La representación gráfica no evidencia que estén comprendiendo el comportamiento de la función globalmente, como una proyección. Sin embargo, está descrito globalmente en las hojas en sucio (donde además se observa que siguieron la Pista 1): "*coges un vector u en el dibujito, lo pones como suma de un vector de la recta L[(0,0,1)] y otro del plano {x+y=0} y te quedas con el de L[(0,0,1)]*".

El trabajo en la tutoría, para comprender el comportamiento geométrico de la proyección, parte de esta idea, aplicada a encontrar la imagen del extremo *(1,1,1)* del cubo. Los estudiantes entienden que tienen que escribir *(1,1,1)* como suma de un vector del eje *Z* y otro del plano *x+z=0* y quedarse con el del eje *Z*, pero no saben cómo hacerlo: señalan un punto a ojo, al que saben que se llega con cierta inclinación, pero si no usan la matriz, no son capaces de determinar a qué altura. Como manifiestan que tienen dificultades con la representación gráfica espacial (y que sería más fácil en una 'construcción con cartulina'), se les explica cómo se encuentra el vector del plano, haciendo una paralela al eje *OZ* desde el vértice. La verdadera comprensión no llega hasta que, por iniciativa de un alumno, entienden cómo se comportan geométricamente las proyecciones en dos dimensiones. Comentan que les ha resultado muy difícil imaginarse y representar gráficamente tanto el comportamiento de la proyección como el plano del núcleo. Les lleva mucho tiempo y por eso lo dejan para el final. Eso explica que el resto de respuestas, salvo la de la Pregunta 2, sean eminentemente de carácter algebraico.

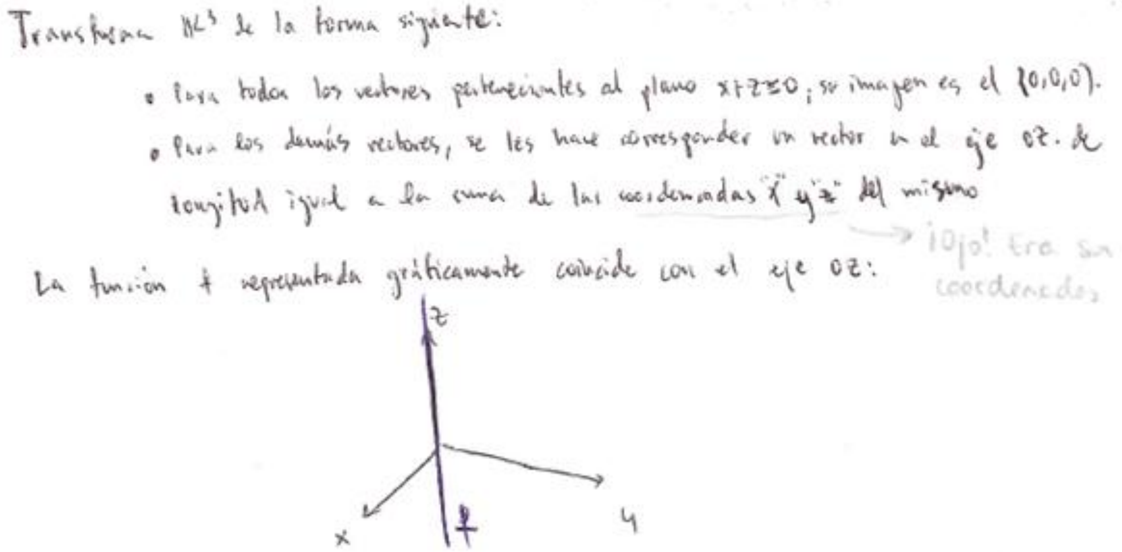


Figura 4. 90: Descripción del comportamiento geométrico de la *f* del Grupo 1 en respuesta a la Pregunta 1.

La **Pregunta 2** la responden correctamente basándose en la representación gráfica anterior (Figura 4. 90) y justificando la no inyectividad en términos de dimensión. Como ejemplo de vector que no está en la imagen escriben que puede cogerse cualquiera no perteneciente a *L[(0,0,1)]* y dan el *(1,0,0)*. En la tutoría los estudiantes muestran su capacidad de coordinar flexiblemente ambos puntos de vista (geométrico y algebraico). La **Pregunta 3** la responden correctamente argumentando que la función no es inyectiva porque el núcleo es distinto de cero, dando los dos vectores de la base que han encontrado en el *Problema 8.7* y concluyendo: "*hay infinitos vectores con esa imagen, todos los que se encuentran en el plano x+z=0*". Explican que el intento de visualizar el plano lo realizaron a posteriori. Para ello piensan que sus puntos son de la forma *(α, β, -α)* (una especie de ecuaciones paramétricas) y eso les lleva a imaginarse planos paralelos al eje OX y perpendiculares al OZ (Figura 4. 91). Se dan cuenta de que no puede ser este plano dando diversos puntos concretos (primero de la forma *(x,y,-x)* y después más generales. Al pensar en los vectores generadores del plano lo comprenden. El hecho de que esta concepción geométrica errónea del núcleo no afecte al resto de preguntas muestra que, para estos estudiantes, el pensamiento geométrico no es un elemento clave en sus respuestas.

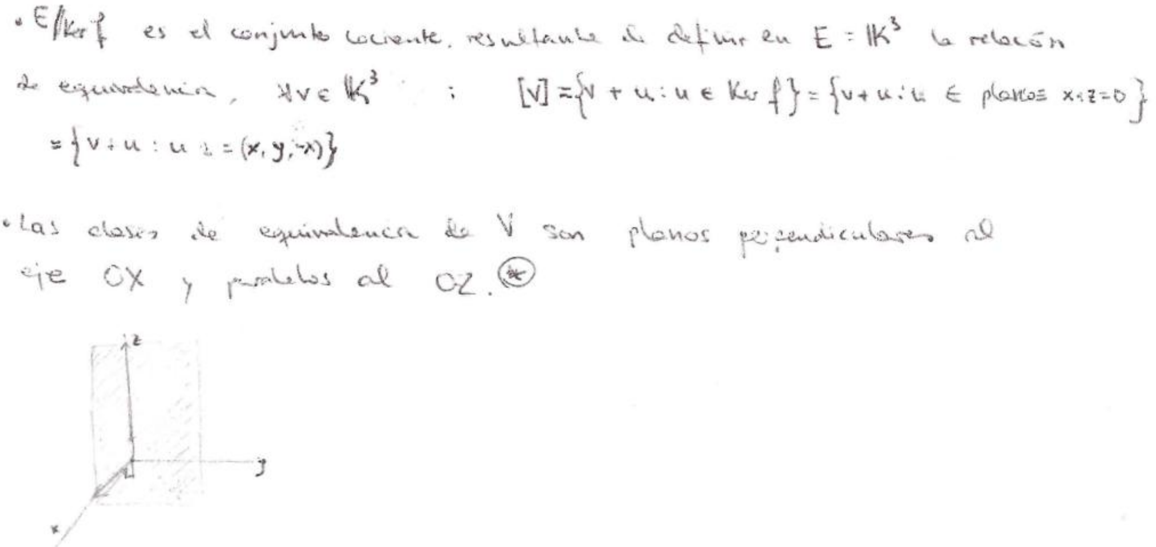


Figura 4. 91: Descripción algebraica y geométrica de los elementos de V del Grupo 1 dada a la Pregunta 4.

La **Pregunta 4** se responde partiendo de la identificación de *V* con *E/ker f*. En la tutoría explican que esta respuesta se basa en la explicación de G. sobre la Factorización Canónica (S620110228G). A partir de esta identificación, les es posible aplicar las definiciones y propiedades vistas en clase, tanto para describir lo elementos de *V* simbólicamente como para calcular la dimensión (Figura 4. 91). Se justifica formalmente esta identificación (partiendo de dos vectores cualesquiera se muestra que su resta debía estar en el núcleo). También se trabaja en su interpretación geométrica. Para ello, es necesario entender geométricamente los elementos de *V*. Una vez comprendido el comportamiento geométrico de la proyección, se les pide que encuentren dos puntos con la misma imagen que (0,0,1) y busquen una relación entre ellos. Plantean la hipótesis de que "*eran coplanarios*". Un estudiante explica que él ve que forman un cono. Este tipo de pensamiento geométrico sobre la representación gráfica en el espacio les esta complicando e incluso llevando a engaño, se les orienta a pensar algebraicamente. De esta forma ven fácilmente que a partir de la ecuación implícita *x+z=2,* los vectores con la misma imagen caen en el mismo plano paralelo al núcleo. Eso les lleva a exclamar: "*La* *visualización es una estafa*". Se les muestra geométricamente el isomorfismo entre la imagen y el cociente, tomando representantes: "*Lo que estoy haciendo con ese isomorfismo, es comp... O sea aplastarlo [cada plano] y darle un representante de aquí [de la imagen, que es una recta] [...] y lo puedo hacer porque los del plano están los que tienen la misma imagen*". Así se da una interpretación geométrica de la **Pregunta 5** que, como la anterior, también han respondido algebraicamente limitándose a copiar del libro la definición y las propiedades de $\bar{f}$ y el diagrama de la Factorización Canónica.

Las respuestas escritas ponen de manifiesto que el grupo no ha logrado el objetivo de proporcionar diversidad de puntos de vista de los EVC y dar sentido a la $\bar{f}$. Las únicas concepciones de los EVC que aparecen son la definición formal y los EVC como colección de espacios paralelos al núcleo, y éstas no lo hacen de forma coordinada (pues la representación gráfica no es coherente con las descripciones simbólica y algebraica, ver Figura 4. 91). La $\bar{f}$ se define de forma abstracta, sin guardar relación con las preguntas anteriores y sin ninguna conexión geométrica. Gracias a la tutoría, este grupo corrige su representación gráfica del cociente, y llegan a concebir el *V* como el *Conjunto de Preimágenes de la aplicación*:

> *#00:46:10-1# P: Lo que te está diciendo es, lo que estábamos haciendo antes, ¿no? Te coges el (0,0,2) y dices voy a ver quiénes tienen esta imagen. Entonces tú con el cociente lo que estás haciendo es agrupando, juntando todos los que tienen la misma imagen y verlos como una sola cosa. #00:46:24-4# (S920110323_TutoriaG1).*

Desde ahí, logran ver el isomorfismo $\bar{f}$ y comprender el *Cociente como un Tipo de Proyección* que concentra todos los elementos relacionados en uno y, en particular, el núcleo en el cero:

> *#00:47:11-3# D: Claro, el cociente te considera todo el plano como un vector. (B: Claro, se puede encontrar...) Me refiero, ¿la f que te hace? Me das este vector, te doy una imagen, me das este otro vector de doy esta imagen. (A: El cociente...) Que a lo mejor incluso es la misma (A: Si, si). El cociente te coge todo el plano, todos los que van a esta imagen, todos esos es un elemento. #00:47:25-7# (S920110323_TutoriaG1).*

Durante la explicación a un estudiante, que tenía dificultades con el Cociente, aparece la concepción de una *Forma de Ordenar* el espacio (en este caso en planos paralelos al núcleo). La representación MACRO es útil para resumir y **reflexionar sobre** todo el proceso de construcción seguido en la actividad (Figura 4. 92). A raíz de esta explicación surge la cuestión de la dependencia del resultado con la elección de los representantes y otras **preguntas de ampliación** con las que los estudiantes tratan de asegurarse de haber entendido bien y relacionan con conocimiento previo: David se da cuenta de que esa imagen del isomorfismo sirve independientemente de cómo sean la imagen y el núcleo (más tarde se precisa que la aplicación de partida tiene que no ser inyectiva) y reconoce la imagen como un espacio invariante de la *f*; Ángel pregunta por la matriz del isomorfismo; Pablo se cuestiona si se puede generalizar que las clases de equivalencia al cocientar por el núcleo son siempre afines (explicitando la concepción de los EVC como familia de variedades afines); se les da soporte para que vean que estaba bien definido y por qué las factorizaciones sólo están definidas si el subespacio con el que se factoriza está contenido en el núcleo; buscan problemas análogos al pensar cómo esta visualización puede ser de ayuda en otras dimensiones (cocientar con una recta, o hacerlo en IK^5).

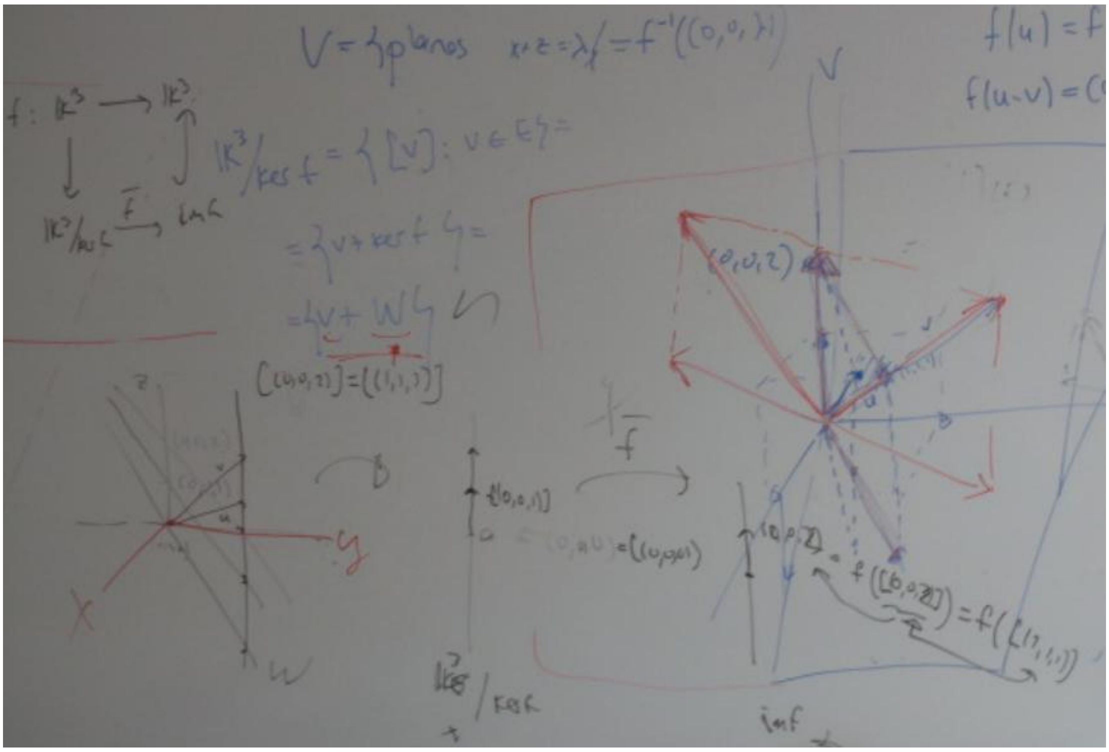


Figura 4. 92: Fragmento de la pizarra al final de la tutoría con el Grupo 1. Se puede observar la representación gráfica en tres dimensiones empleada en la mayoría de las discusiones (a la derecha); la comparación entre *V* y $IK^3/ker\ f$ (en la parte superior) y el resumen del proceso, utilizando la representación MACRO (en la parte inferior).

Grupo 2

Este grupo está formado por 5 estudiantes: Juan, Xiao Ping, Patricia, Malena y Yaser. Para resolver el **Problema 8.7** siguen el método de hacer un cambio de base, utilizando un diagrama interesante (Figura 4. 93). En la tutoría explican que tienen dificultades en resolverlo porque "*los datos estaban poco definidos*" y "*no se habían mirado la teoría*". A pesar de haber hallado correctamente la matriz de la *f* respecto de la base estándar en el apartado anterior, en la **Pregunta 1** vuelven a hallar la imagen de $f(e_3)$ con combinaciones lineales, pareciendo que no entienden bien qué significa la expresión matricial de una aplicación lineal. Para explicar el comportamiento geométrico de la *f* describen su imagen de varias formas distintas: (1) escriben "*es la recta {x=0; y=0}*" viendo el espacio que generan los vectores imagen de la base canónica; (2) hacen una representación gráfica (Figura 4. 94); (3) escriben "*para calcular la imagen de un vector, observando lo que sucede con e_1, e_2, y e_3, nos damos cuenta que la segunda coordenada se anula*". Ninguna de estas descripciones hace referencia a cómo transforma la aplicación el espacio y además la tercera está incompleta, pues la primera coordenada también se anula. Tampoco clasifican la aplicación como una proyección.

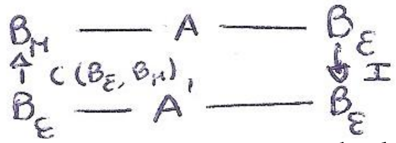


Figura 4. 93: Diagrama empleado por los estudiantes del Grupo 2 para hacer el cambio de base (similar al de la Figura 4. 26).

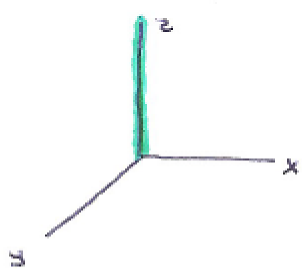
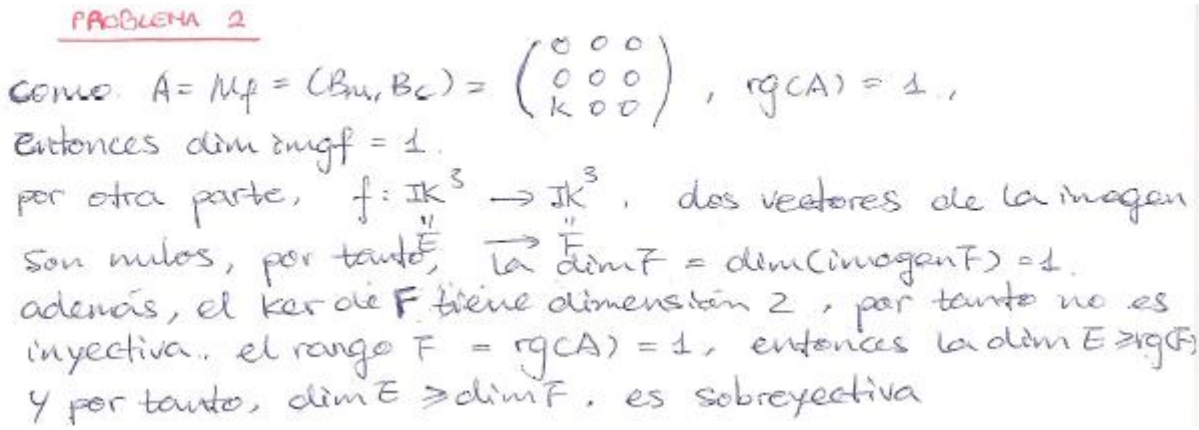


Figura 4. 94: Representación gráfica del Grupo 2 de la imagen de *f*.

En la tutoría los estudiantes explican que no saben responder a la pregunta "*¿qué tipo de aplicación es?*": para ellos esa pregunta se responde diciendo "inyectiva" o "sobreyectiva", y eso lo preguntan después. Para ayudarles se les remite a la Pista 2. La pregunta es cómo decidir si es proyección o simetría. Una estudiante dice que las proyecciones son isomorfismos. Eso lleva a una larga discusión, donde los estudiantes evidencian poca comprensión de las nociones de inyectividad y sobreyectividad y hay que recordarlas. Para eso un estudiante (Juan) introduce "*los pulmones*" (diagrama de conjuntos) y también una representación gráfica en dos dimensiones de las proyecciones. Utilizan la Pista 2 para justificar que es proyección, pero previamente dan otros argumentos: (1) mirando a la matriz ("*llena de ceros menos en la última fila*"); (2) pensando en el comportamiento de los vectores de una base ("*dos son del núcleo, sólo te va a salir uno no nulo. Entonces siempre va a ser como una proyección de ese vector*"); (3) basándose en una metáfora con una pared y un foco de luz adquirida del estudio de Dibujo Técnico ("*si quieres proyectar esto aquí, le pones un foco de luz aquí y la sombra se te va a quedar así (junta las dos manos)*"). Esta última visión de las proyecciones da lugar a una discusión en el grupo (Figura 4. 95) sobre el comportamiento geométrico de la aplicación. Lleva a Juan al convencimiento de que el resultado de proyectar un cubo (que se construyó en papel) debe ser un plano, pues "*si proyectas puedes quitar como mucho una dimensión*".

Figura 4. 95: Discusión sobre el comportamiento de la proyección con ayuda de medios tridimensionales de visualización (Juan construye un cubo de papel, Patricia usa gestos y, como cubo, su estuche). Se observa cómo Yaser, menos visualizador, no participa en la discusión.

Tras un breve trabajo individual (ya que las diferencias en el grupo hacen que el trabajo conjunto no sea productivo) y una puesta en común, donde otro estudiante (Yáser) explica que se imagina pirámides, terminan concluyendo que la dirección debe ser el núcleo. A partir de esa idea, y con ayuda, sólo algunos estudiantes evidencian comprensión del comportamiento geométrico de la aplicación. Todas estas dificultades indican que, a pesar de haber realizado la representación gráfica de la aplicación correctamente (Figura 4. 94), no la han interiorizado ni coordinado suficientemente.



PROBLEMA 2

como $A = M_f = (B_u, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $rg(A) = 1$,
Entonces dim imgf = 1.
por otra parte, $f: \underset{E}{IK^3} \to \underset{F}{IK^3}$, dos vectores de la imagen son nulos, por tanto, $E \to F$ la dimF = dim(imagenF) = 1.
además, el ker de F tiene dimensión 2, por tanto no es inyectiva. el rango F = rg(A) = 1, entonces la dim E ≥ rg(F) y por tanto, dimE ≥ dimF. es sobreyectiva

Figura 4. 96: Respuesta del Grupo 2 a la Pregunta 2.

La respuesta a la **Pregunta 2** está redactada de forma muy confusa (ver Figura 4. 96). Comienzan considerando la matriz respecto a la base extendida del núcleo y no respecto a la canónica, de ella deducen que la dimensión de la imagen es *1*. Después hay un renombramiento de los espacios en los que está definida la *f* que conlleva a una confusión de notación, se afirma que no es inyectiva, y mediante desigualdades de dimensiones se termina afirmando que es sobreyectiva. En la tutoría, se confirma que la confusión viene de identificar el espacio de llegada con la imagen. Gracias a la inversión de tiempo realizada en aclarar las cuestiones de inyectividad y sobreyectividad, se dan cuenta de su error y comprenden que no es sobreyectiva tanto algebraicamente como geométricamente. Esto también sirve para la **Pregunta 3**, cuya respuesta escrita es válida, pero continúa con el mismo estilo confuso de escritura. Como el grupo anterior, los dos vectores que dan con imagen *(0,0,0)* son los de la base del núcleo. El resto de vectores que cumplen esa condición los describen como las combinaciones lineales de esos dos vectores y geométricamente a través de su ecuación implícita. Como no mencionan la palabra plano, hay que ayudarles con esta conexión incitándoles a pensar en su ecuación implícita y su dimensión. Tienen grandes dificultades para representar gráficamente el plano (utilizan las paredes y el suelo de la clase para pensar). Finalmente, hay que darles la respuesta.

Como en el grupo anterior, la **Pregunta 4** comienza con la identificación de *V* y $IK^3/ker\ f$. En este caso hay un intento de justificación consistente en un juego con clases de equivalencia y sus representantes, que no está claro, pero del que concluyen: "*Luego ese espacio V es* $IK^3/ker\ f$" (Figura 4. 97). Conclusión seguida de una frase que denota una falta de comprensión de la noción de clase y, en general, de EVC: "*los elementos de V son las clases del único vector que no pertenece al núcleo; dimV=dim* $IK^3/ker\ f = 1$". Esto revela una concepción de los EVC como un tipo de suplementario de *kerf,* construida de forma inexacta (sólo cubre a un vector) a partir del método que han aprendido para calcular una base del Cociente. A raíz del enunciado de la pregunta aparece alguna referencia a los EVC como un tipo de proyección. De hecho escriben la expresión de π, pero no está claro su papel en la respuesta. Esto mismo ocurre en la **Pregunta 5**, donde no aparecen nuevas concepciones de los EVC: copian el diagrama de la Factorización Canónica (haciendo hincapié en las dimensiones de los espacios que intervienen) y después incluyen comprobaciones similares a las de la pregunta anterior con clases y representantes (parece que son de la conmutatividad del diagrama; escriben *φ([(1,0,0)])=(0,0,k)*, como si el vector de la base del Cociente pudiera tener cualquier imagen del eje z). En la tutoría, al llegar a estas preguntas, ya se ha consumido mucho tiempo. Se explican casi directamente, sin tener muy en cuenta sus respuestas escritas y sin dar oportunidad al descubrimiento, el cual resulta difícil debido a carencias visuales en conceptos previos (como la proyección y el plano) necesarios para comprender la construcción final de la actividad. A pesar de esto, se intenta que imaginen los elementos de *V* geométricamente y dos estudiantes lo consiguen. Entre ellos Juan, el más visualizador del grupo, quien afirma haber logrado entender la construcción final y agradece que se le ayude a conectar la *Interpretación Geométrica del Cociente* (que hasta la tutoría no aparece en sus respuestas) con la concepción de los EVC como *Forma de Organizar el Espacio*:

> *#00:27:59-7# J: Que, una cosa, el cociente lo que está haciendo es coger todos los de IK^3 y meterlos en el ker f y paralelos al ker f. [...] ¿Y eso por qué no nos lo han dicho nunca? [...] Es que yo veía IK^3 y ker f y no sabía lo que pasaba con cada uno. Ahora lo que hace es coges todo IK^3 y lo organizas según ker f. Si ker f es un plano, pues los otros planos paralelos, si ker f es una recta así, pues lo organizas en rectas así. #00:28:34-2# (S920110324_TutoriaG2).*

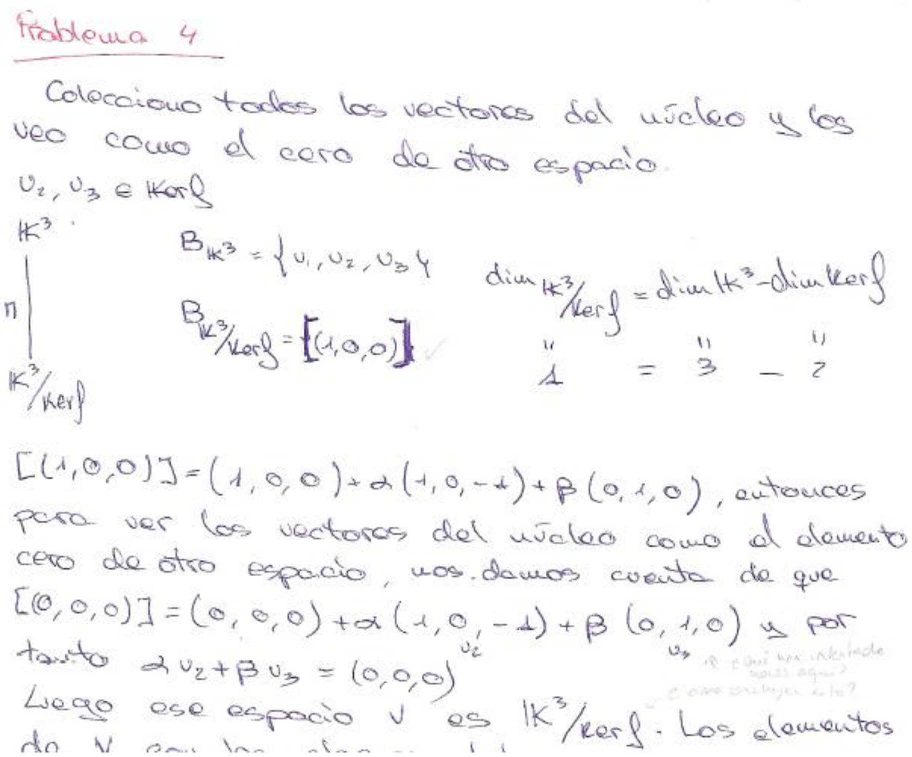


Figura 4. 97: Respuesta del Grupo 2 a la Pregunta 4.

Grupo 3

El Grupo 3 está formado por cuatro estudiantes: Marina, Nati, Noelia y Ana. No entregan borradores. A la tutoría sólo vienen Noelia y Ana. El **Problema 8.7** lo resuelven de un modo similar al Grupo 1, deduciendo que *imf =L[(0,0,1)]* y obteniendo una matriz que depende de dos parámetros. En la tutoría explican que comienzan utilizando sistemas de ecuaciones muy grandes, pero que después, ya en casa, lo piensan mejor. Comentan que han tenido problemas para concentrarse en clase debido a las grabaciones. Para hallar su valor, aplican directamente la condición 2. Basándose en esta condición y en que f es lineal, deducen correctamente, en la **Pregunta 1**, que es proyección (ver Figura 4. 98). Ana explica que la clave para ello es la Pista 2. Noelia reconoce que a ella le "*cuadraba*" que fuera una proyección, pero que tenía dificultades para "*expresarlo matemáticamente*". Entonces se pide a Ana que explique a Noelia cómo se le ocurre dar ese razonamiento formal. Ella responde que se basa en una imagen mental de la proyección: "*cuando tú haces una proyección tú ya estás reduciendo [...] ese vector a un solo eje, o a un plano o lo que sea. [...] Entonces si tú vuelves a proyectar lo que has hecho de la proyección va a ser esa misma proyección (mientras marca una recta sobre la mesa con los dedos)*".

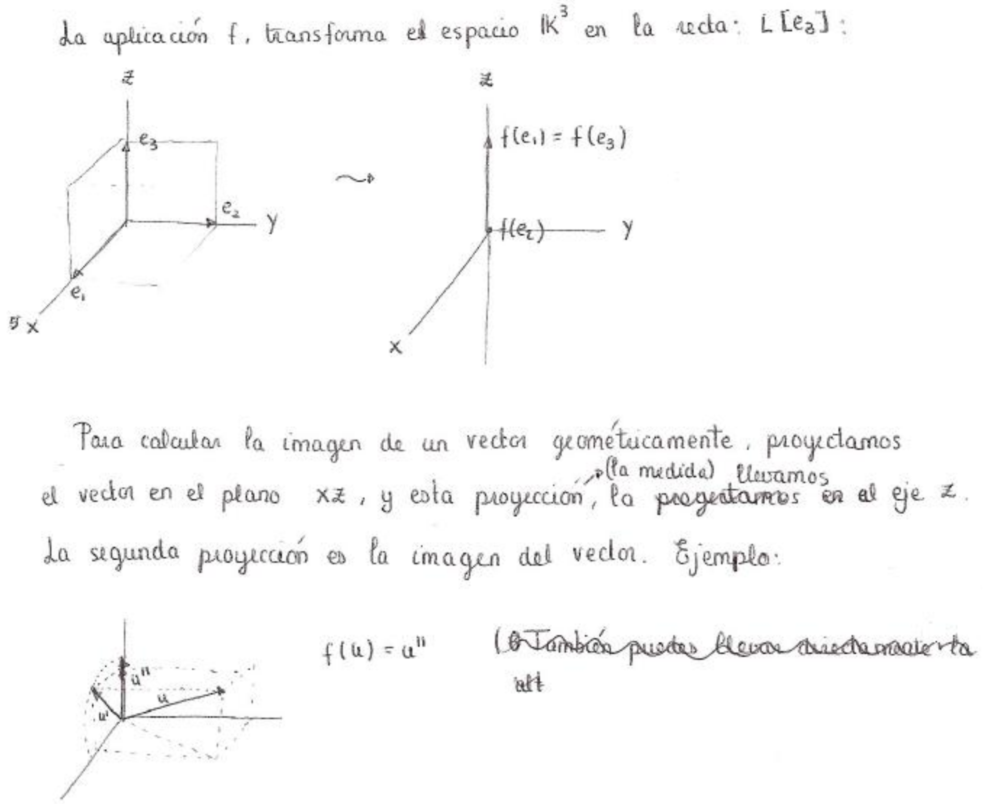


Figura 4. 98: Explicación del Grupo 3 del comportamiento geométrico de la proyección.

La **Pregunta 2** la responden correctamente, argumentando que la dimensión de la imagen es distinta a la del total y en lugar de dar un único vector, responden con la mayor generalidad posible: "*cualquier vector* $u \in L[(1,0,0),\ (0,1,0)] \notin im\ f$". Justifican la no inyectividad de la función en la **Pregunta 3** partiendo del hecho de que el núcleo tiene dimensión 2 y por tanto es distinto de cero. Esto lo traducen, de forma simbólica, en que existe un vector distinto de cero con imagen 0 y dan dos vectores: *(0,0,0)* y el *(0,1,0)*. Para describir geométricamente el núcleo siguen el siguiente proceso de transformación de representaciones, realizado coherentemente y de forma flexible: representación en ecuaciones implícitas del *ker f*; descripción según un sistema de generadores (una base); representación gráfica (similar a la de la Figura 4. 100, pero sólo con el plano del ker f); descripción de ésta en lenguaje natural ("*Geométricamente, son todos los vectores que pasan por el origen y pertenecen a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante*"). A pesar de esto, en la tutoría dudan al representar gráficamente el plano, necesitando un tiempo para volver a pensarlo. Durante este proceso se observa un problema del uso de imágenes y es la diferencia de interpretación que cada persona hace de una misma representación gráfica (Figura 4. 99).

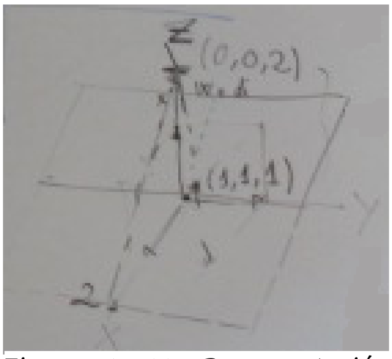
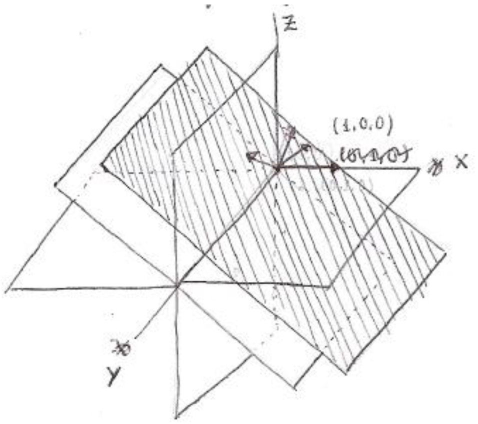


Figura 4. 99: Representación gráfica realizada en la pizarra durante la tutoría del Grupo 3: Ana dibuja el núcleo pero a Noelia le parece que es un plano paralelo que pasa por el *(0,0,2)* en lugar de por el origen (S920110324_TutoriaG3).

Como los dos grupos anteriores, la respuesta a la **Pregunta 4** parte del hecho, injustificado, de que *V* es el subespacio vectorial $IK^3/ker\ f$. Esto les permite describir algebraicamente este subespacio utilizando la definición formal de EVC. Sus elementos se describen de forma abstracta y simbólica como $[u]=u+ker\ f$. En la tutoría explican que el enunciado les da la clave para ver la relación entre los dos espacios: "*en cuanto nos dijiste que agrupáramos en uno solo los que fueran del ker, dijimos pues va a ser eso*". Entonces se les hace ver que hay que justificarlo y Ana da una explicación similar a la de G., en clase de teoría, sobre cómo hacer una función inyectiva:

> *#00:00:00-0# A: Porque lo que estás intentando hacer es coger todos los elementos que vayan a la misma imagen... Hacer una función inyectiva (B: Vale). Entonces, yo lo de la inyectividad, intento agrupar todos los elementos que tienen la misma imagen como una sola bolsa y ahí me imagino las clases de equivalencia que están relacionadas con el 0. No sé si... #00:00:21-8#*
>
> *#00:00:21-8# B: Si, o sea tú te imagina todos los que tienen la misma imagen los agrupas y haces una bolsa con ellos. #00:00:26-8#*
>
> *#00:00:26-8# A: Y hago como que eso es el núcleo de algo. ¿Sabes? Es que no sé... Porque si tienen la misma imagen, lo restas, la imagen va a ser cero. (Mientras habla hace como que escribe en el papel) #00:00:36-8# (S920110325_TutoriaG3).*

Esta explicación demuestra una mezcla de la definición formal de EVC con otras concepciones como colección de preimágenes o como proyección. Basándose en ella Ana prueba formalmente que "tener la misma imagen" equivale a que "la resta esté en el núcleo". Noelia, pensando en distancias perpendiculares que se deben mantener constantes, complementa la explicación con la idea de los EVC como colección de planos paralelos. Así se conecta con la descripción geométrica de los elementos de V, que en las respuestas escritas se describen utilizando el lenguaje natural – "*los elementos de V son el conjunto de vectores cuyo extremo se encuentra en el mismo plano, paralelo a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, y que pasan por el origen*"– acompañado de una representación gráfica (Figura 4. 100). Tanto esta descripción como sus intervenciones posteriores durante la tutoría, muestran que las estudiantes del Grupo 3 tienen una buena comprensión de las clases de equivalencia, han superado el obstáculo de su representación gráfica: en ambas descripciones dejan claro que la clase no está formada por los planos paralelos, sino por los vectores que nacen en el origen y mueren en esos planos. En las respuestas escritas, a la descripción geométrica de los elementos de V, le sigue un interesante y completo razonamiento mixto –que combina aspectos algebraicos y geométricos– para justificar por qué la dimensión de *V* es *1* (Figura 4. 100). En la tutoría, se utilizó la relación entre *V* y $IK^3/ker\ f$, que ya se ha establecido adecuadamente, para calcular la dimensión de forma más algebraica. Por último en la **Pregunta 5**, únicamente copian del libro el diagrama de la Factorización Canónica, destacando la definición de la ϕ y sus propiedades (sin justificación). Esta respuesta la dan basándose en las pistas. Se les pid que relacionen el diagrama con la construcción que se acaba de hacer y que lo interpreten geométricamente.



Podemos asegurar que la dim (V) = 1, ya que cada uno de sus elementos es ~~perper~~ proporcional a [u], donde u = (1,0,0), pues si [x] es el elemento de V tal que f([x]) = (0,0,a), [x] es el conjunto de vectores que pasan por el (0,0,0) y tienen su extremo en el plano x+z = a. que es paralelo a x+z = 0 y a x+z = 1. Luego los vectores de [x] son proporcionales a los vectores de [u] ⇒ ⇒ dim (V) = 1.

Figura 4. 100: Representación gráfica empleada por el Grupo 3 para describir geométricamente los elementos de *V* en la Pregunta 4; junto a un argumento mixto para calcular la dimensión del espacio *V*.

Comienzan interpretando cada aplicación por separado, sin que la acción de la ϕ quede muy clara. Con representaciones similares a las de la Figura 4. 92 (incluyendo una representación MACRO) se les explica el proceso seguido, justificando bien por qué es un isomorfismo y por qué está bien definido. Esto último se hace tanto geométricamente como algebraicamente: "*gracias a la relación que hemos encontrado entre V y el cociente, todos los vectores de las clases (los planos paralelos al núcleo) tienen la misma imagen*". Al hablar de representantes, como se toman sobre el eje Z, entienden que lo que hace la ϕ es "*pasar de clase a elemento*". Más tarde, con la **reflexión** sobre la actividad y las **preguntas de ampliación** entienden que esto sucede gracias a que es una proyección y la base se queda fija. En particular, para que reflexionen sobre la generalidad del proceso realizado en la actividad se les pregunta: "*¿creéis que este proceso que hemos hecho, o sea todo este razonamiento que hemos hecho, es sólo para la proyección o sirve para cualquier aplicación?*" También surgen preguntas sobre la interpretación geométrica de la inclusión, la elección de representante (motivada por la representación MACRO).

Las respuestas escritas de este grupo evidencian un buen entendimiento de la actividad, a excepción de la comprensión geométrica de la proyección (desconectada de la definición formal) y de la construcción de la ϕ (que se hace sin ningún tipo de justificación). Esto último puede deberse a la falta de comprensión de *V* como colección de preimágenes de la *f*. Por eso en la tutoría se trabaja en el desarrollo de esta concepción y en su conexión con todas las demás, que sí están presentes en su trabajo. Aunque la mayor parte del tiempo se consume en torno a la comprensión geométrico de la proyección. El resultado final es satisfactorio, ya que las estudiantes logran establecer, casi por sí solas, la relación entre *V* (entendida finalmente como colección de preimágenes) y la definición formal de $IK^3/ker\,f$. En este caso, las clases de teoría han tenido una clara influencia.

Grupo 4

El Grupo 4 lo forman 4 estudiantes: Inma, Judit, Eduardo y Daniel. A la tutoría sólo vienen los 3 primeros. El **Problema 8.7** lo resuelven de un modo diferente a los vistos hasta ahora: partiendo de la condición 3 (y con un razonamiento que no se entiende bien) encuentran la expresión algebraica de *f*, con ella calculan la matriz planteando un sistema de ecuaciones. En la tutoría, clarifican este método, explicando cómo se les ocurre. Como no queda claro del todo y además es difícilmente generalizable (aunque les conduce a la respuesta correcta), se utiliza otro más convencional (similar al método 1 explicado en el análisis a priori, ver sección 2.4.4.2). En la **Pregunta 1** clasifican la función como no inyectiva y no sobreyectiva y prueban, aplicando la definición, que es lineal. Se les hace ver que esta comprobación no es necesaria, puesto que es una condición impuesta desde el principio y que además es evidente al encontrarsu matriz. En sus respuestas escritas no mencionan en ningún momento la palabra proyección, tampoco cuando describen el comportamiento geométrico de la *f*: primero lo hacen representando gráficamente la imagen como el eje OZ (similar a la de la Figura 4. 94) y describiendo con lenguaje natural de forma no coherente ("*la recta que pasa por el eje OX*"); segundo, lo explican a partir de sus coordenadas, como una composición de dos transformaciones de forma similar al grupo anterior (ver Figura 4. 101). Comentan en la tutoría que, para responder esta pregunta, sólo se fijan en la Pista 1 y no en la 2 (que es la que da la clave al grupo anterior). Sin embargo, no dudan en responder que se trata de una proyección cuando se les pregunta: "*¿qué tipo de aplicación es? ¿Sabéis darle algún nombre que no sea inyectiva, sobreyectiva?*". La justificación es intuitiva: "*porque es una cosa que está mucho (gesto con la mano dando vueltas) volverla en un punto solo (junta los dedos y marca un punto)*".

Para dar una justificación más formal se les remite al Libro de Texto, siguiendo la Pista 2. Una estudiante (Judit) no encuentra su libro. Dice que le da rabia porque en él tenía los apuntes del dibujo que hizo G. y que ahí se veía muy fácil, que ella lo entendió así muy bien. De este modo, surge hacer una representación gráfica de las proyecciones en el plano que, junto a la identificación de su base y dirección (como imagen y núcleo respectivamente), ayuda a que lleguen a la comprensión del comportamiento geométrico de la proyección, con mayor facilidad que en otros grupos. Sin embargo, tienen dificultades a la hora de representarlo gráficamente porque no ven cómo encontrar el vector del plano que, sumado al de la imagen, dé el vector *u* (igual que ocurrió con el Grupo 1). La clave llega al descubrir que en el espacio también se puede usar la regla del paralelogramo, pero de nuevo encuentran dificultades con la representación gráfica en el espacio. Judit señala que ya lo veía, pero que "*no podría dibujarlo, claro*".

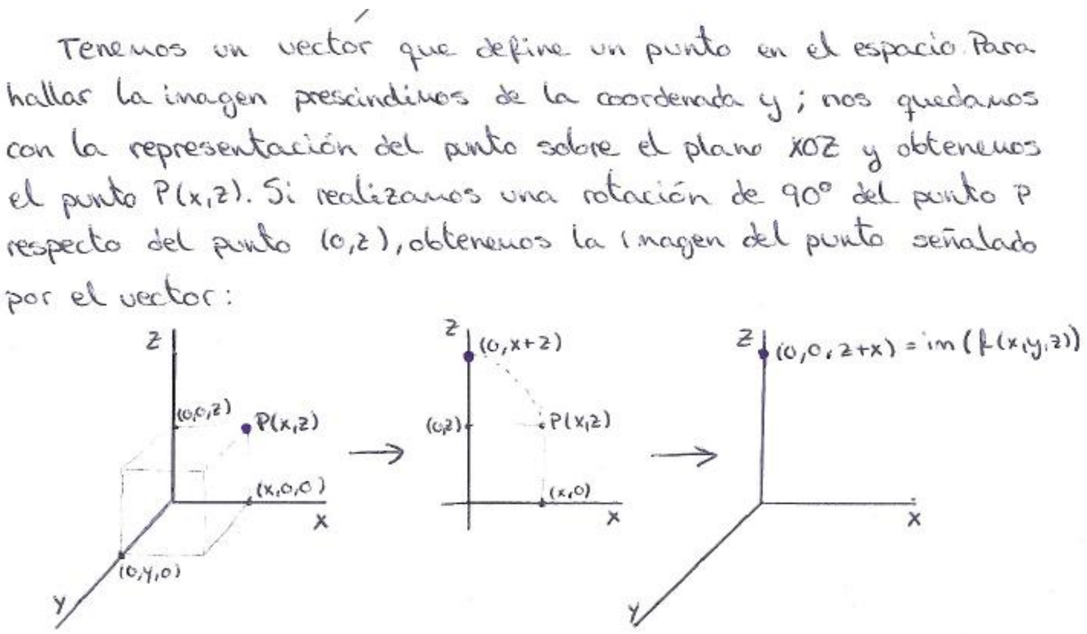


Figura 4. 101: Explicación del Grupo 4 del comportamiento geométrico de la *f*.

La **Pregunta 2** la responden bien argumentando geométricamente que "*la imagen de f es una recta*" y dando como contrajemplo, de vector que no está en la imagen, "*cualquiera que tenga alguna de las dos primeras coordenadas distintas de cero*". En particular, el *(1,4,7)*. En la **Pregunta 3** se justifica la no inyectividad de la *f* dando parejas de vectores con la misma imagen: (x,y_1,z), (z,y_2,x). Concretamente (2,5,7) y (7,9,2). Así explican que hay infinitos vectores que tienen la misma imagen y describen los que van al *(0,0,0)* tanto algebraicamente (dando su expresión paramétrica) como geométricamente de palabra: "*todos estos vectores pertenecen al plano que contiene a los vectores u = (1,0,-1)* y *v=(0,1,0)*". En la tutoría también utilizan, con éxito, esta idea de pensar en los generadores para representar el núcleo. La **Pregunta 4** se contesta en términos muy generales y sin hacer referencia a Clases de Equivalencia o Espacios Cociente. Los elementos de *V* se describen de diversas formas, que no terminan de ser coherentes entre ellas: primero se describen diciendo que "*forman un plano*", después se dice que son de la forma *(0,0,a)*; y por último señalan que "*dim V=3, pues obtenemos planos*". Durante la tutoría se evidencia que, pensando en las coordenadas de cada elemento *(x,y, -x+a)*, los estudiantes de este grupo son capaces de pensar en *V* como un conjunto de planos de vectores con la misma imagen. Sin embargo, esta representación de los elementos no permite verlos fácilmente como planos paralelos al núcleo. Esta comprensión llega al pedirles que los representen gráficamente, pensando en el comportamiento de la proyección. Como este grupo es el único que no identifica desde el principio *V* con $IK^3/ker\,f$, antes de justificar la relación hay que darles soporte para que la descubran. Esto se hace a través de la representación gráfica: restando dos vectores del mismo elemento de *V* , viendo que su resta pertenece al núcleo y demostrándolo simbólicamente. A continuación se les pregunta por la dimensión de *V*, y se prueba que es *1* tanto algebraicamente como geométricamente.

En la **Pregunta 5**, como no han establecido previamente la relación entre *V* y $IK^3/ker\,f$ no hacen ninguna referencia a la Factorización Canónica (Figura 4. 102). Sin embargo, sí parecen entender, mirando las coordenadas, que lo que hace el isomorfismo es identificar cada elemento de *V* con su punto de corte con el eje Z, (aunque no hay evidencias de que se esté entendiendo aquí el eje Z con la imagen de f tampoco está claro si ven el isomorfismo como tal). Esta idea puede resultar de ayuda para comprender mejor el isormofismo en la tutoría, que se explica utilizando la representación MACRO del Cociente. Al preguntar "*¿qué relación hay entre esto y la imagen de f?*" un estudiante responde: "*El representante de ese cociente [que eligieron como el vector del eje Z de la clase] es el mismo que la imagen que vamos a obtener*". Finalmente, para resumir todo el proceso, se escribe el diagrama de la Factorización Canónica y se interpreta cada una de las aplicaciones geométricamente. Los asentimientos de los estudiantes durante esta síntesis evidencian su comprensión. Cuando se les pregunta si creen que lo han entendido dos de los tres responden afirmativamente (la tercera estudiante participa muy poco durante toda la tutoría).

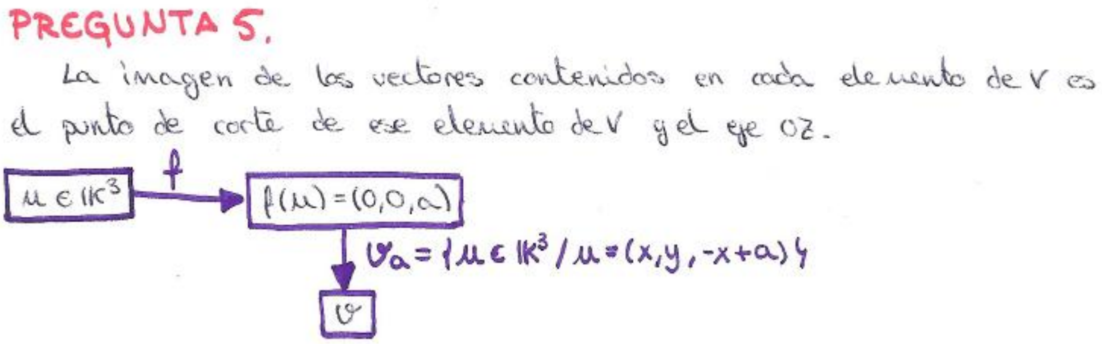


Figura 4. 102: Respuesta del Grupo 4 a la Pregunta 5.

En las respuestas escritas de este grupo no aparecen ni los términos *Proyección* ni *Cociente*, por lo que no podemos considerar que hayan alcanzado el objetivo último de la actividad, que es adquirir o conectar diversidad de puntos de vista de los EVC. En la tutoría, gracias a una buena comprensión previa de las proyecciones en el plano (adquirida a través de la explicación visual de las clases de teoría), se logra entender geométricamente el comportamiento de la aplicación. Este paso es de gran ayuda para ver que los planos de V son, de hecho, planos paralelos al núcleo y, por tanto, clases de equivalencia del cociente $IK^3/\ker f$. Así se logra que este grupo conecte las concepciones de los EVC como *Colección de Preimágenes* con la *Interpretación Geométrica* de los EVC y con su *Definición Formal*. Esta conexión se realiza de forma más rica que en los casos anteriores, gracias al hecho de no haber identificado rápidamente en el problema el $IK^3/\ker f$: antes de identificar V con $IK^3/\ker f$ tienen para cada uno de ellos una imagen mental diferente; al descubrir la relación entre los dos espacios, estas dos imágenes pasan a formar parte del esquema conceptual de los EVC a un mismo nivel (y no de forma subordinada, como ha ocurrido con los otros grupos). Éste era el verdadero objetivo de la actividad. Teniendo en cuenta los resultados de este grupo, consideramos que podría haber sido más fácil conseguirlo en los demás grupos si no les hubieran explicado la Factorización Canónica con anterioridad.

4.3.2.2 Evaluación y Revisión de la Actividad

La comparación de respuestas de todos los grupos con el análisis a priori, complementado con las respuestas de los estudiantes a las Encuestas (cuestiones 1, 4 y 12, ver Anexos) permite afirmar que no se llegan a alcanzar todos los objetivos planteados. En la Figura 4. 103 se sintetizan los logros.

	GRUPO 1	**GRUPO 2**	**GRUPO 3**	**GRUPO 4**
Aprender a calcular matriz	Si	Si	Si	Revisar
Practicar la representación gráfica de aplicaciones lineales	Imagen	Imagen	Dominio e imagen Composición de 2 transformaciones	Imagen Composición de 2 transformaciones
Conectar la definición formal de las proyecciones y su comportamiento geométrico	Hoja en sucio	No	No	No
Interpretar gráficamente el cociente $IK^3/ker\ f$ y conectar diversas concepciones (vía V)	Definición formal Interp. Geom. (con error)	Definición formal ¿Proyección?	Definición formal Interp. Geom.	No
Ver isomorfismo entre *im f* y $IK^3/ker\ f$ (geométricamente)	No	No	No	No
Construir el diagrama de la Factorización Canónica	Lo escriben (no lo relacionan)	Lo escriben (poca relación)	Lo escriben (no lo relacionan)	No lo escriben
Conectar distintas repr. de las proyecciones y $IK^3/ker\ f$	Diversidad, no flexible	Más algebraico (de tablas)	Diversidad, flexible	Diversidad (leng. natural), no flexible
Reconocer la importancia de la notación en Matemáticas	Según el estudiante	Les ha servido a nivel medio	Según el estudiante	---
Valorar la importancia de usar diversas representaciones	Poco	Entre bastante y mucho	Entre poco y medio	---
Desenvolver el lenguaje matemático con la intuición	Madurez	Falta madurez y claridad	Madurez y precisión	Falta madurez y precisión
Aprender a trabajar en grupo	Diferentes letras	Diferentes letras	Misma letra	Misma letra
Desarrollar el nivel META de pensamiento matemático	Responden todo, explicaciones completas Comprueban	No responden todo, explicaciones incompletas, saltos en el discurso	Responden todo; explicaciones completas	No responden todo; explicaciones incompletas

Figura 4. 103: Resumen de las características observadas en las respuestas escritas de los cuatro grupos, en relación a los objetivos de la actividad. Se han complementado con los resultados de las Encuestas (ver Anexos), especialmente para completar la valoración de los objetivos menos observables directamente por estar más relacionados con las percepciones de los estudiantes: Reconocer la importancia de la notación en Matemáticas; Valorar la importancia de usar diversidad de representaciones.

La mayoría responde de forma algebraica aunque la exigencia de visualización en la actividad está explicita. Según las razones alegadas, esto puede ser debido bien a que no están acostumbrados a este tipo de preguntas o bien a que les resulta más difícil y se lo saltan (como el Grupo 1) o directamente ni lo intentan. También afectan otros factores como las creencias en torno a la visualización (Pablo del Grupo 1 en algún momento dice de lo visual que "*son chorradas*") que a su vez están muy relacionadas con la preferencia por lo visual de cada estudiante. En el siguiente fragmento extraído de una conversación durante la tutoría del Grupo 2 se observa cómo dos estudiantes razonan visualmente mientras sus compañeros se excusan de no hacerlo argumentando que no se les da bien lo visual:

J: Vale, pero sería un plano. #00:22:53-9#

P: Sería una recta. #00:22:59-0#

Y: Es que yo eso de verlo visualmente, no... #00:23:01-0#

E: No, yo tampoco. #00:23:01-0#

B: ¿Por qué, qué os cuesta? #00:23:01-0#

E: No vemos nada #00:23:05-7#

Y: Algebraicamente y simbólicamente funciono bien #00:23:17-0#

J: Yo al revés #00:23:20-8#

E: A mí también me cuesta mucho verlo (S920110324_TutoriaG2)

Un hecho que ha posibilitado el pasar por alto lo visual, al resolver el problema, es la identificación inmediata del espacio V con $IK^3/ker\ f$, llevándolos a una resolución superficial o no adecuada. En el momento en que los estudiantes establecían esta relación, era posible razonar de forma puramente algebraica y utilizar todo lo visto en la teoría. De hecho, en el Grupo 1 reconocen que a partir de entonces se limitaron a copiar del Libro de Texto. Esto explica que en las Encuestas, los estudiantes de este grupo, califiquen el problema de "trivial" (Figura 4. 104). Sin embargo, después en las tutorías, se sorprendieron con la actividad y reconocieron que "*no teníamos ni idea de lo que iba el problema ni de lo que significaba*" y también que "*el problema estaba muy bien puesto*".

	1	2	3	4	5	0	MEDIA
¿Te ha gustado la actividad?		2	4	3	2		3,45
¿Te ha parecido difícil?		2	4	4	1		3,36
¿Te ha gustado trabajar en grupo?			5	3	3		3,81
¿Te han servido de ayuda las pistas?	2	4	2	1		1	2
¿Necesitarías más indicaciones en el enunciado del problema? ¿Cuáles? *Me parecían los enunciados muy abstractos (2.3)*	5	1	2	1		2	1,54
¿Te parece similar o diferente a las demás que hacéis en clase? *Bastante diferente (1.1)* *Diferente (1.2)* *En el buen sentido (2.3)* *Diferente (3.2)*							
¿Alguna idea para mejorar en caso de que quiera repetirla con mis alumnos del año que viene? *No, estuvo todo bastante bien (1.1)* *Poner a currar a cada uno con proyecciones por su cuenta y luego pedir un trabajo en grupo algo más difícil. (Sustituir algunas preguntas triviales por otras más complicadas) (1.3)* *Puede que un problema más complejo, con menos cuestiones, sea más productivo. (1.4)* *Llevar la asignatura diaria perfectamente (2.2)* *Explicarlo todo un poco por encima antes de hacer el ejercicio (2.3)* *Podría cambiar un poco las pistas del problema 4 – Al menos a mí no me ayudaron (2.4)*							

Figura 4. 104: *Respuestas de los estudiantes a la pregunta 13 de las Encuestas, sobre valoración de la actividad.* A cada estudiante se le asignó un número *(n)* dentro del grupo *(g)*, dando lugar a la etiqueta: *(g.n)* (aparece detrás de las respuestas escritas). Estas respuestas se dieron antes de realizar la tutoría.

La base para establecer dicha relación, que ninguno justifica, son las clases teóricas. Es natural que apliquen algo en la forma en que ya se les ha explicado (en este caso, la Factorización Canónica en el registro simbólico) en lugar de entrar en el proceso constructivo que propone la actividad. Éste implica, en cierto modo, olvidarse de lo que saben para poder descubrir un nuevo punto de vista de los EVC y, con él, un isomorfismo bien definido entre $IK^3/ker\,f$ e $im\,f$. Pero es difícil descubrir algo que ya se sabe. Este hecho nos conduce a pensar que quizá esta actividad resulte más adecuada para utilizar antes, y no después, de explicar formalmente la Factorización Canónica (ver Grupo 4), aunque habría que experimentar en esas nuevas circunstancias y revisarla en función de los resultados obtenidos.

A continuación se revisa la actividad para realizarla de modo similar al de la experimentación (después de la explicación formal de la Factorización Canónica) ya que, a pesar de las observaciones anteriores, en las tutorías se observan aspectos positivos de esta forma de aplicación que puede ser interesante reforzar:

- *Ayuda a la comprensión*: Con el soporte cognitivo del profesor, la actividad conduce a comprender mejor y dar sentido a la Factorización Canónica que, al ser un resultado conocido por los estudiantes, da lugar a la profundización en los EVC.
- *Desarrolla la visualización*: se confirma la validez de la actividad para desarrollar la habilidad de visualizar, generando un ambiente rico en intercambios sobre visualización, como constatan los diálogos sobre las imágenes mentales que los estudiantes tienen de las proyecciones.
- *Es valorada positivamente por los estudiantes*: sobre todo por los visualizadores, como Juan (Grupo 2) que ven legitimados sus métodos naturales de argumentación y encuentran respuesta a su necesidad de conectarlos con los métodos habituales de clase. Pero también entre los no visualizadores se encuentran valoraciones positivas (Figura 4. 104). Hay más estudiantes como Pablo, que terminan por apreciar el proceso constructivo que se plantea, sobre todo después de haberlo terminado de comprender en la tutoría (ver Anexos).

No obstante, la actividad requiere de una mayor adecuación, especialmente del enunciado (pues la parte que más falla es la de trabajo autónomo de los estudiantes).

Primero, el formato de pregunta con **pistas** no termina de funcionar. Muchos estudiantes o no las usan o consideran que no les sirve de ayuda (Figura 4. 104). Al mismo tiempo, los estudiantes que no las utilizan responden de modo diferente al que se espera, generalmente saliéndose del proceso constructivo que se plantea y acudiendo a un modo de pensamiento más algebraico. Por tanto, las pistas son 'pasos' necesarios que hay que recorrer en la construcción, más que ayudas a las que recurrir cuando se esté perdido o bloqueado (interpretación dada por los estudiantes). Consideramos que cambiando la palabra 'Pista' por 'Paso' e introduciendo una instrucción en la que se deje claro que hay que leer y responder todas las preguntas y pasos, este problema podría solventarse.

Segundo, el trabajo con **representaciones gráficas en el espacio** provoca muchas dificultades. Los estudiantes se quejan en diversas ocasiones de que "*no se veía nada*", que no pueden dibujar porque "*en el espacio es muy difícil*", de no poder sacar conclusiones de los dibujos espaciales en el plano porque "*depende de cómo lo mires*" (ver Figura 4. 100). Estos obstáculos influyen negativamente sobre los resultados de la actividad, que quizá resultase más sencilla si se hubiera planteado en el plano, donde las representaciones gráficas son isomórficas y no proyecciones como en el espacio (ver Marco Conceptual, secciones 1123.2.3.4 y 3.2.3.6). Sin embargo, esta opción se descarta por varias razones: (1)

los estudiantes están más habituados a este tipo de representaciones (precisamente por ser más sencillas, son las que han visto más en clase) siendo también importante el trabajo de la visión espacial; (2) las situaciones en el espacio son más ricas que en el plano, pudiendo ser de mayor utilidad para su posterior generalización a *n* dimensiones (Gueudet-Chartier, 2003).

En este sentido se considera pertinente conservar el *Problema 8.7* como punto de partida, pero se debe precisar mejor el segundo **objetivo** propuesto para la actividad: "*practicar la representación gráfica de endomorfismos de* IK^3 *y la visión espacial de su comportamiento como transformaciones del espacio*". El cambio de este objetivo va a tener consecuencias tanto en el enunciado, donde se deben incluir pasos más específicos que ayuden a adquirir esa visión espacial (empezar con la imagen de un punto, luego del cubo y finalmente pensar en las proyecciones en dos dimensiones para establecer una analogía con las de tres), como en la **mediación**, considerando la utilización de recursos que faciliten esta tarea a los estudiantes. En las tutorías ya surgen algunos como proyectar sobre un plano o "dibujar de perfil", establecer analogías entre situaciones familiares en el plano (las proyecciones o la representación gráfica del cociente con una recta), y también hablaron del diédrico y de otras experiencias en dibujo técnico. Otros huyen de la representación plana y proponen modelos espaciales, como usar cartulinas para los planos, construir el cubo en papel (Figura 4. 95) o la esquina de la clase para pensar. En el futuro se deben considerar estas ayudas, así como las posibilidades de visualización que ofrece el ordenador (Gutiérrez, 1996; M. Sinclair et al., 2011).

Tercero, hay **niveles de visualización**. Este hecho está muy ligado con el anterior. La familiaridad con representaciones en el plano hace más fácil una tarea análoga en el espacio. Del mismo modo, no se puede pretender que los estudiantes comprendan la interpretación geométrica de un cociente del espacio con un plano si tienen dificultades para representar gráficamente el plano con el que se quiere cocientar o no son capaces de restar gráficamente vectores en el espacio. Por eso, se señala la necesidad de comprobar con anterioridad que posean las habilidades de visualización necesarias para llevarla a cabo. Y si éste no fuera el caso, la conveniencia de proponerles tareas de menor dificultad donde puedan desarrollarlas. Esto también es aplicable al proceso de mediación. Es importante conocer bien los diferentes procesos y niveles de visualización que involucra el problema para ser capaz de distinguirlos, separarlos y en base a ellos, proponer tareas más simples o dar alguna ayuda. En este sentido, el **árbol del problema** resulta una herramienta extremadamente útil. A pesar de ello, a raíz de lo ocurrido en las tutorías, se proponen algunas modificaciones del mismo:

- Para comprender el comportamiento geométrico de la proyección es necesario establecer una conexión con la definición formal. Un camino eficaz para ello, no contemplado en el árbol, es pensarlo primero en dos dimensiones y después trasladar lo pensado a tres.
- Para determinar la dirección de la proyección y poderla utilizar hay que representar gráficamente el plano del núcleo. Es decir, esta representación gráfica no aparece por primera vez a raíz de la Pregunta 3, como se pensó inicialmente, sino dentro de la Pregunta 1.

- Para entender bien *V* geométricamente hay que llegar a ver sus elementos como planos paralelos al núcleo. Para ello resulta interesante la siguiente secuencia, no especificada suficientemente en el árbol: pensar en cómo se transformaba el vector (1,1,1) (se hace en la Pregunta 1), buscar otro vector con la misma imagen, ver qué tienen en común (teniendo en cuenta la dirección o bien teniendo en cuenta las coordenadas de vector resta), pensar en el lugar geométrico de los todos los vectores con esa misma imagen (como ya se ha pensado antes en el plano del núcleo, se puede establecer una relación con él); generalizar para cualquier vector. A otros estudiantes les resulta más fácil llegar a esa idea a través de la expresión de la aplicación, obteniendo ecuaciones implícitas.
- Para ver el isomorfismo entre *V* e imagen de *f* es importante concebir geométricamente *V* como una recta. Como se señala en el árbol, a esta idea se puede llegar calculando su dimensión (ya sea algebraica o geométricamente) y utilizando una representación MACRO. Sin embargo, lo que no se ha tenido en cuenta suficientemente es el problema de la elección de representantes[96] (y por tanto de una base) que, como hemos visto, provoca muchas dudas a los estudiantes. Esto además puede dar lugar a hablar de los EVC como un tipo de suplementario, concepción que hasta ahora no ha aparecido de forma clara en la actividad.

Cuarto, estas modificaciones del árbol del problema se deben tener en cuenta en el **enunciado**, especialmente en los pasos que se proponen, conduciendo a un cambio de orden o a un mayor nivel de detalle. También se deben considerar las **interpretaciones** que **los estudiantes** hacen del enunciado. La pregunta "*¿qué tipo de aplicación es?*" se plantea de forma abierta, resultando que al menos dos grupos no entienden lo que se pide. En general, provoca que el hecho de que la aplicación sea una proyección, pase más desapercibido. Para evitar esto se podría formular la *Pregunta 1* de forma similar a la *3*: afirmando que la aplicación es una proyección y pidiendo sólo la justificación. Debería quedar claro que éste es el punto de partida para entender el comportamiento geométrico de la aplicación. En la *Pregunta 4,* la descripción de *V* como el espacio obtenido al concentrar el núcleo en el cero sirve para que los estudiantes identifiquen sin más el *V* con el $IK^3/ker\, f$, y no lleguen a concebir este espacio como una colección de preimágenes. Esto se puede evitar dando una descripción de *V* donde se hace más énfasis en que es un conjunto cociente cuya relación de equivalencia es "*tener la misma imagen*". Hecho esto hay que dotar a V de estructura de Espacio Vectorial para que tenga sentido hablar de su dimensión. Finalmente, con la *Pregunta 5* se debe fomentar de alguna forma una interpretación geométrica de la Factorización Canónica y explicitar que es necesaria una justificación de la identificación de *V* con $IK^3/ker\, f$.

Quinto, cabe preguntarse si la **metodología** escogida para trabajar la actividad fue la más adecuada. Aunque los estudiantes valoraron positivamente el **trabajo en grupo** (Figura 4.

[96] Para realizar una representación MACRO hay que elegir unos representantes, es decir, una base. En principio sirve cualquier recta suplementaria al núcleo, pero por tratarse de una proyección hay una dirección especial donde los vectores son fijos: el eje Z. Esto hace que, si se elige esta recta de representantes, el isomorfismo se convierta, únicamente, "*en quitar los corchetes*" o como dice algún estudiante, "*en asignar a cada clase su representante*". Sin embargo, esta descripción depende del representante, por lo que se debe ser cuidadoso al utilizarla.

104), se observó que éste pudo no ser beneficioso para todos. Algunos estudiantes señalaron la importancia de tener un tiempo para pensar individualmente antes de trabajar en grupo el problema (ver los resultados de las Encuestas, Anexos). Por otro lado, en las tutorías de cada grupo, a pesar de los intentos de la profesora, hubo siempre algún estudiante que participó considerablemente menos que el resto. Entre las razones cabe destacar la timidez, la diferencia de niveles de rendimiento académico o la discrepancia entre el perfil visualizador del estudiante y el del discurso creado colectivamente.

Quinto, cabe preguntarse si la **metodología** escogida para trabajar la actividad es la más adecuada. Aunque los estudiantes valoran positivamente el **trabajo en grupo** (Figura 4. 104), se observa que éste puede no ser beneficioso para todos. Algunos estudiantes señalan la importancia de concederles un tiempo previo para pensar individualmente el problema (ver los resultados de las Encuestas, Anexos). También, a pesar de los intentos de la profesora en las tutorías, hay siempre algún estudiante que participa considerablemente menos que el resto. Entre las razones cabe destacar la timidez, la diferencia de niveles de rendimiento académico o la discrepancia entre el perfil visualizador del estudiante y el del discurso creado colectivamente (Figura 4. 95).

Cuando los estudiantes tienen un nivel académico parecido, son capaces de comunicarse adecuadamente sus ideas matemáticas y tienen caracteres similares (en términos de participación), entonces se puede crear un buen ambiente de trabajo y de discusión matemática, como ocurre en el Grupo 1. Sin embargo, si sucede que el estudiante más participativo es muy visualizador (a diferencia de sus compañeros) y además tiene dificultades para expresar sus ideas matemáticas, la discusión colectiva puede llegar a ser poco productiva en términos de oportunidades de aprendizaje y también de visualización, como sucede en ocasiones en el Grupo 2. Sin embargo, la discrepancia de perfiles de visualización y de nivel de pensamiento no siempre es un problema, sino que puede llegar a resultar enriquecedora, como ocurre con las dos estudiantes que participan en la tutoría del Grupo 3: una es de un perfil mixto de visualización y de nivel de avanzado de pensamiento; la segunda es más visual y de nivel medio. El hecho de que esta interacción se dé en un grupo reducido –una pareja– no se considera fortuito, si no que actúa favorablemente homogeneizando los niveles de participación (a pesar de la diferencia de carácter de ambas estudiantes).

Por todo ello, en una implementación posterior sería interesante plantear un tiempo de trabajo individual previo al de parejas, y una entrega de informes individuales tras las tutorías. Esto último puede facilitar la evaluación de la comprensión adquirida por cada estudiante, independientemente de su participación en las mismas. En caso de querer mantener el mismo formato, se recomienda detectar con antelación las características personales de cada estudiante y tenerlas en cuenta tanto en la formación de los grupos como en la preparación y la mediación en las tutorías.

En los Anexos, se puede consultar una versión revisada del enunciado que puede utilizarse en una segunda iteración de la experimentación con esta actividad.

4.3.3 Resumen y discusión sobre la enseñanza de la visualización de los EVC. Segundas conclusiones

4.3.3.1 ¿Qué hace de los EVC un Concepto tan Difícil de Enseñar y de Aprender?

Los EVC son difíciles de aprender porque son un concepto complejo, tanto desde el punto de vista epistemológico como cognitivo. Según hemos visto en el estudio de los EVC como concepto matemático (ver sección 4.3.1), esta noción depende de otros conceptos como: Relación y Clase de Equivalencia, Partición, estructura algebraica abstracta de Espacio Vectorial. Así, es un concepto que requiere de un elevado grado de abstracción para ser comprendido, motivo que explica su tardío desarrollo (a finales del s. XIX). En el contexto del AL, a esas ideas habituales en torno a la noción de cociente se les unen otras (como subespacios traslados, suplementarios, bases, coordenadas o dimensión), incrementando aún más su dificultad.

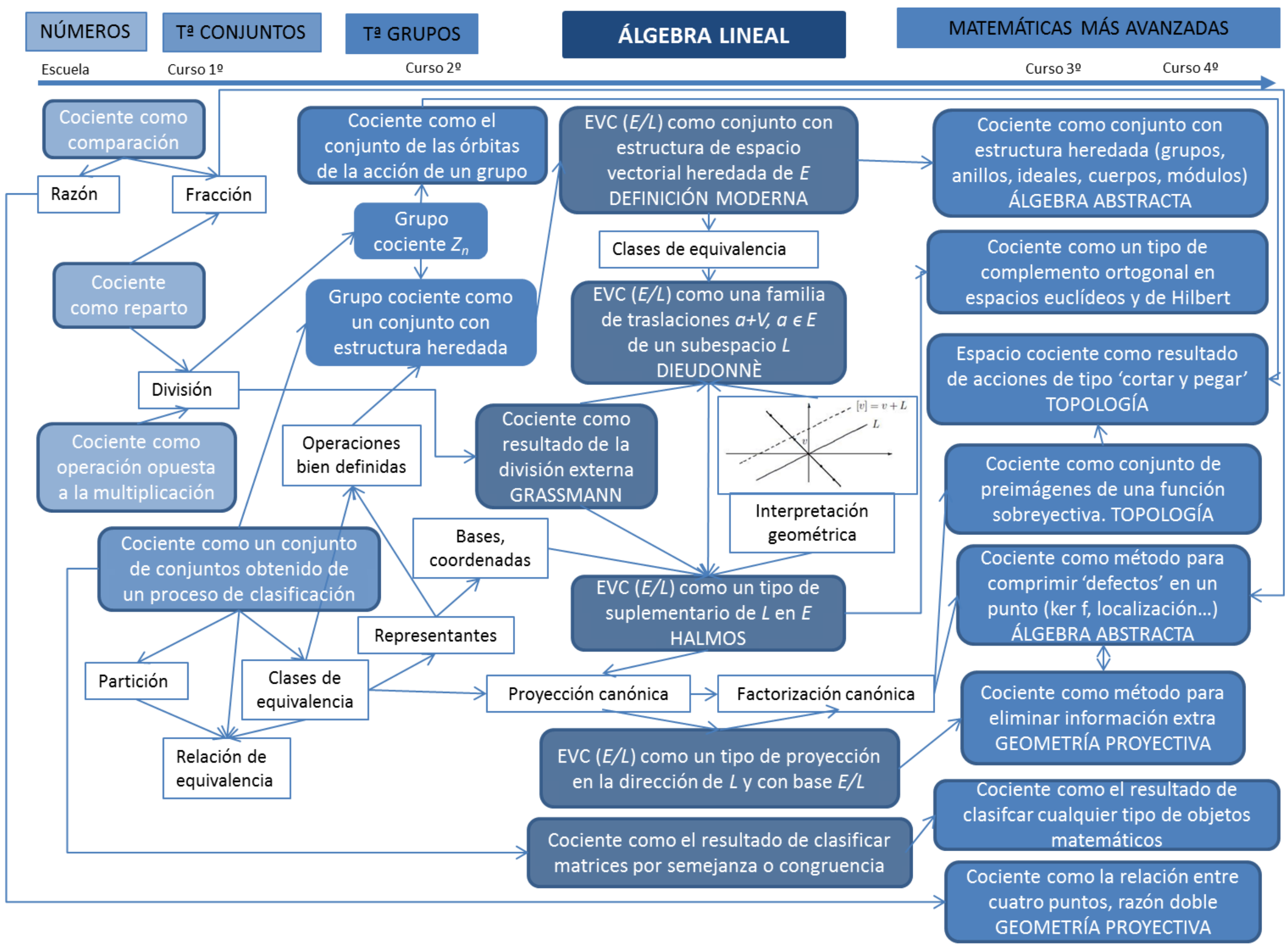


Figura 4. 105: Mapa conceptual que resume el análisis epistemológico, cognitivo e institucional realizado en torno a los EVC. En él se representan las diferentes concepciones de los Cocientes (en las cajas azules con bordes redondeados), sus interacciones (flechas) y las relaciones con otras nociones y representaciones necesarias para el desarrollo de los conceptos (en las cajas blancas con borde azul claro). Además se muestra el avance de todos estos elementos desde la escuela hasta los últimos cursos de Grado (gracias a la organización en columnas, cuya intensidad de azul está en correspondencia con los temas situados sobre la flecha que marca la dirección de dicho avance).

Por otro lado, la comprensión completa de los EVC no llega si no se logran coordinar las diversas concepciones a las que éste concepto da lugar (Figura 4. 105), necesarias para continuar construyendo conocimiento en torno a él en el futuro. Para ello no es suficiente con enseñar la definición formal de los EVC, ya que ésta no encapsula necesariamente todos estos puntos de vista. Por el contrario, la enseñanza de este concepto debe prestar atención explícita a cada uno de ellos, distinguiendo sus elementos principales y facilitando el establecimiento de conexiones, propiciando así la "flexibilidad cognitiva". Como se ha podido observar en los episodios de clase descritos, para facilitar esa tarea se recurre a diferentes representaciones y modelos de visualización, pues cada uno de ellos resulta más adecuado para resaltar diferentes elementos relevantes de cada punto de vista de los EVC. Realizar esto de forma flexible y adaptada al nivel de los estudiantes requiere de un gran conocimiento matemático por parte del profesor. Eso explica por qué los EVC resultan también difíciles de enseñar.

Los resultados mostrados en este capítulo permiten explicitar gran parte de ese Conocimiento Matemático del Profesor necesario para enseñar a visualizar los EVC. En la Figura 4. 106 se muestra la relación entre los contenidos cubiertos y los diferentes tipos de Conocimiento Matemático del Profesor especificados en el Marco Conceptual. A continuación se revisa uno a uno cada tipo de conocimiento, resumiendo las principales aportaciones de los resultados mostrados.

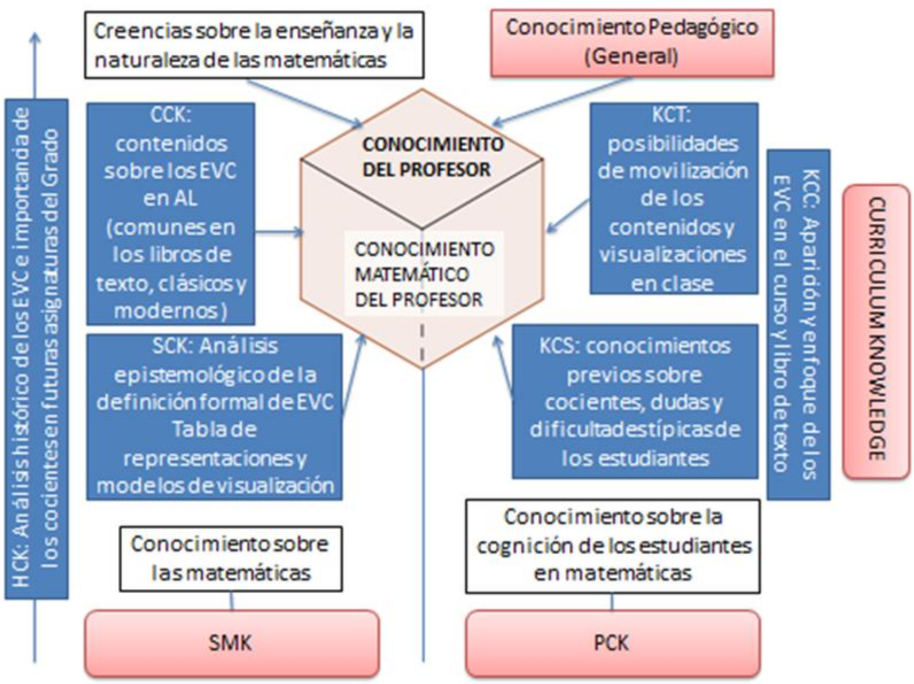


Figura 4. 106: Relación entre los contenidos de los capítulos anteriores y el Conocimiento Matemático del Profesor necesario para enseñar a visualizar los EVC (utilizando la taxonomía de la Figura 3. 7).

Hay unos contenidos matemáticos en torno a los EVC que se repiten en los libros de texto analizados de AL, tanto clásicos como modernos. Éstos componen el **Conocimiento Común del Contenido (CCK)**. En el estudio de los EVC como concepto matemático (sección 4.3.1) se ha explicado la parte de estos contenidos que cubre el curso. Ahora se resumen en la tabla de la Figura 4. 107. Ésta incluye su materialización en el Libro de

Texto, información que forma parte del **Conocimiento del Contenido y el Currículum (KCC)**. En relación a la visualización, dentro de este segundo tipo de conocimiento se incluye el estar familiarizado con el papel que la Geometría y las representaciones tienen en el curso. Esto se explicó de forma general en los resultados de la Fase I. Respecto a los EVC, se debe saber que, de los dos enfoques encontrados para presentar este concepto –algebraico y geométrico-, el curso sigue el primero. Esto afecta al orden en que se ven los contenidos, que es el que se muestra en la Figura 4. 107, y también al tipo de lenguaje que se emplea más frecuentemente, que es el algebraico: en registro simbólico para enunciar y generalizar; en registro de tablas para los ejemplos de bases y de cálculo de coordenadas. Es importante saber que en relación a la interpretación geométrica de los EVC aparece la única representación gráfica de todo el primer volumen del Libro de Texto.

CONTENIDO	**SITUACIÓN LIBRO TEXTO**	**DESCRIPCIÓN DE CONOCIMIENTOS**
Definición formal	Proposición 8.6	Dado un subespacio V saber construir el conjunto cociente asociado, entendiéndolo como un espacio cuyos elementos tienen diferente naturaleza que los del espacio original, y dotarlo de estructura de Espacio Vectorial definiendo operaciones sobre sus clases y comprobando que las operaciones están bien definidas Saber reconocer y construir EVC a través de su definición
Interpretación geométrica	Ejemplo 8.7	Dado un subespacio V, saber representarlo y construir a partir de él las clases de equivalencia a las que da lugar, dándose cuenta de que estas forman una partición del espacio original. Dado un u representado gráficamente saber calcular vectores (no) relacionados con u vía V, elegir diferentes representantes para su clase
Dimensión, bases y coordenadas	Proposición 8.12 y Ejemplo 8.13	Dado un subespacio V, saber calcular la dimensión del EVC al que da lugar como la del total menos la de V, saber justificar esta fórmula, por ejemplo calculando una base del EVC, conocer algún método para calcular las coordenadas de una clase
Proyección canónica	Ejemplos 9.3 y 9.9	Dado un subespacio V o un EVC poder definir la aplicación que envía cada vector a su clase, conocer los espacios de salida y de llegada, saber sus propiedades (sobreyectiva, núcleo V) y ser capaz de justificarlas
Factorización Canónica	Proposición 9.12	Conocer el diagrama, entender lo que significa, ser capaz de definir cada una de las aplicaciones involucradas y saber explicar sus propiedades, tener claras las comprobaciones necesarias, entender la presencia de un cociente
Aplicación Factorización Canónica	Ejemplo 9.13	Saber cuándo una aplicación lineal factoriza a través de una proyección canónica, entender por qué y ser capaz de aplicarlo Reconocer problemas donde sea necesario pensar en términos de factorizaciones
Otros	***Teorema (División entera):*** *Dados a,b ϵ Z, b≠0, existen dos únicos números enteros q y r que cumplen a=bq+r, 0≤r<|b|. Estos números q y r se llaman el cociente y el resto de la división entera de a por b. (Castellet y Llerena, 1996, p. 9)* ***Aplicación Cociente:*** *Teorema 11.16: Dado un operador lineal T y un W sev de V invariante, entonces T induce un operador T* en V/W, T*(v+W)=T(v)+W (Lipschutz, 1996, p. 446), (Lin, 2008, p. 211)* ***Otros Teoremas de Isomorfía:*** *2º Teorema: Si U y W son subespacios de un espacio vectorial V, entonces (U+W)/W≈U/(U∩W)* (Robinson, 2006, p. 185). *Como corolario sale la fórmula de la dimensión. 3º Teorema* (Robinson, 2006, p. 192)	

Figura 4. 107: Tabla con los contenidos matemáticos encontrados sobre los EVC en el curso (y en otros libros de texto) y su materialización en el Libro de Texto de la asignatura.

Como apunta uno de los autores de los libros revisados, el Cociente "*es una construcción que se encuentra a través de todo el Álgebra*" (Robinson, 2006, p. 143). En particular, se han establecido conexiones claras con Teoría de Conjuntos y de Grupos, y más tarde con las Estructuras y las Ecuaciones Algebraicas. De hecho, en la sección sobre los Cocientes como concepto matemático se ha visto que esta afirmación es extensible a otras partes de las Matemáticas. En cursos anteriores a la Universidad aparece relacionado con la operación de división y con problemas sobre comparaciones y repartos. Y más adelante, el Cociente tiene un papel destacado dentro de áreas como la Geometría Proyectiva, la Topología o el Análisis Funcional.

DIFICULTADES PREVIAS CON LOS COCIENTES	**ESCENARIOS EN LOS QUE SE HA TRABAJADO LOS COCIENTES**
- Desde los niveles más elementales: donde las nociones de *razón* y *fracción* ya resultan problemáticas para los estudiantes (Adjiage & Pluvinage, 2007; Charles & Nason, 2000; Confrey & Carrejo, 2005). - Hasta niveles más avanzados: donde las investigaciones, realizadas principalmente en el contexto del Álgebra Abstracta –bien dentro de *Teoría de Grupos* (Asiala et al., 1997; Dubinsky et al., 1994; Nardi, 2000; Nicholson, 1993) o bien dentro de la *Teoría de Conjuntos* (Chin & Tall, 2001; Hamdan, 2006) – ponen de relieve los conflictos de los estudiantes con la noción de *relación de equivalencia* y la pobreza de sus construcciones mentales en torno a otros conceptos relacionados con los EVC –*Clases de Equivalencia, Particiones o Conjuntos Cociente*–, que se manifiesta en una gran compartimentación y una escasa comprensión.	- Estudio de los números y las magnitudes (interpretación de la igualdad de números como aplicación uno a uno). - Estudio de la naturaleza de los números reales. - El estudio de la divisibilidad y los grupos Zn. - Estudio de problemas geométricos (estudio de las acciones del grupo de simetrías de un polígono regular sobre sus vértices o de $\mathbb{Z}$ sobre IR, la clasificación de los mosaicos según su grupo de simetría). - Estudio sobre Teoría de Conjuntos (estudio de los números transfinitos y definición de los cardinales). - Estudio de problemas algebraicos (clasificación de objetos como las formas cuadráticas, noción abstracta de estructura algebraica de grupo). - Estudio de los conjuntos de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo a partir de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Figura 4. 108: *Dificultades previas con los Cocientes (y conceptos relacionados con ellos) y escenarios, en los que han trabajado o han surgido los Cocientes*, que pueden servir como contexto o ejemplos donde introducir los EVC. Las primeras se han obtenido de la revisión de literatura relacionada y los segundos han surgido principalmente a raíz del estudio del desarrollo histórico del concepto y del análisis institucional de cómo lo aprenden los estudiantes del curso observado.

En la Figura 4. 105 se sintetizan las relaciones que existen entre todas estas apariciones de los Cocientes a diferentes niveles educativos, desde la escuela hasta los últimos cursos de Grado de Matemáticas. Conocer estas relaciones y entender cómo se comportan forma parte del **Conocimiento del Contenido en el Horizonte (HCK)**. Éste es importante para acompañar adecuadamente a los estudiantes en su trayectoria cognitiva, ayudando a identificar y prevenir errores conceptuales y favoreciendo la construcción de esquemas conceptuales más ricos y útiles para aprendizajes futuros. Así, saber los problemas previos de los estudiantes con nociones relacionadas con los Cocientes (Figura 4. 108) puede ayudar a explicar algunas de sus dificultades con la noción de EVC, no necesariamente relacionadas con la estructura de Espacio Vectorial del concepto. Igualmente, tener familiaridad con escenarios en que hayan trabajado conceptos relacionados con los Cocientes (Figura 4. 108) puede ser de utilidad para poner ejemplos que les sirvan de puente para conectar los conocimientos nuevos con los viejos. También saber contenidos posteriores relacionados puede ayudar a conectar conocimientos futuros, por ejemplo introduciendo una concepción de los EVC como colección de preimágenes de una función que, aunque no es esencial para el AL, es crucial para entender la definición de Espacio Cociente en Topología.

Por otro lado, el HCK ayuda a posicionarse en torno a la cuestión de si hay que enseñar o no los EVC en AL. Muchos de los libros analizados no incluyen los Cocientes en su temario. Teniendo en cuenta las dificultades que este concepto provoca, tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, esta podría ser la decisión más aconsejable. Sin embargo, el análisis sobre el desarrollo del concepto Cociente, sintetizado en la Figura 4. 105, pone de relieve que el contexto del AL es óptimo para introducirlo. La diversidad de puntos de vista a la que dan lugar los EVC sirve como puente entre los conocimientos previos del Cociente y los que están por venir. Por tanto, la enseñanza de los EVC en AL se considera totalmente recomendable. Ahora bien, para lograr una enseñanza más o menos exitosa –no dominada por dichas dificultades y donde la visualización sea una herramienta y no un impedimento– son precisos otros tipos de conocimientos que, aunque se alejan más de las Matemáticas, son fundamentales para enseñar a visualizar.

El **Conocimiento Especializado del Contenido (SCK)** es central en el modelo del equipo de Ball y es esencial para poder enseñar de forma efectiva. Este conocimiento abarca el análisis epistemológico de los EVC, y que muestra que la definición moderna de este concepto se apoya en dos ideas fundamentales: 1) construcción de un Conjunto Cociente a partir de una relación de equivalencia definida en este caso por un subespacio vectorial dado; (2) dotación de una estructura de Espacio Vectorial al definir operaciones heredadas del espacio vectorial de partida. En particular, la comprensión de esta noción llega a través de la coordinación de otras nociones, que el estudiante debe construir con anterioridad (ver Figura 4. 105):

- las Relaciones de Equivalencia y su Definición;
- la formación de Clases de Equivalencia y la elección de Representantes;
- las Particiones y sus propiedades;
- el Conjunto Cociente entendido como un conjunto de subconjuntos,
- las Operaciones Binarias y sus propiedades para dotar de estructura a un conjunto;
- la idea abstracta de Estructura Algebraica.

Este conocimiento ayuda al profesor a descomponer el conocimiento matemático facilitando su comprensión y favoreciendo el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Por otro lado, y más cercano al objeto de estudio de esta investigación, dentro del SCK están todos los conocimientos relativos al manejo de representaciones y modelos de visualización que van más allá de su mero uso como: entender explícitamente cómo funciona una determinada representación (por ejemplo, la interpretación geométrica de los EVC), saber distinguir sus unidades (clases de equivalencia) y las relaciones representadas en ella (dependencia entre unas clases y otras), discernir cómo se conecta con otras representaciones o concepciones (por ejemplo con la de EVC como proyección o suplementario), reconocer por qué es mejor en determinada situación (elegir entre MICRO y MACRO), poder hablar y comunicar todo este conocimiento, etcétera. Los resultados descritos en los este capítulo han permitido detectar mucho de este conocimiento para el caso concreto de los EVC. Éste se resume en tablas al final del capítulo (ver sección 4.3.3.3).

Pero el SCK no basta para enseñar eficazmente un contenido matemático como los EVC. También hace falta saber cómo movilizar ese conocimiento en clase, es decir, hace falta el **Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT)**. En este sentido, gracias a la observación y el análisis de episodios de clase y las tutorías, se han obtenido algunos resultados en relación a la visualización:

- Los ejemplos como los *enteros módulo n ó la parametrización de la circunferencia* son útiles para introducir y motivar el concepto, así como para establecer relaciones (por ejemplo de notación) con conocimientos previos.
- Las *representaciones gráficas MICRO* deben interpretarse correctamente para no llevar a engaño y entonces sirven para evidenciar que los EVC cumplen las propiedades de la partición.
- La *representación MACRO* logra mostrar geométricamente la estructura de Espacio Vectorial de los EVC a la vez que despierta sobre los estudiantes la duda sobre la dependencia de la base con la elección de representantes.
- El *pensamiento diagramático* ayuda a explicitar la idea de "transportar la estructura" y es esencial para entender la Factorización Canónica.
- La *metáfora de las bolsas* es útil para justificar por qué hay que probar que están bien definidas las aplicaciones que nacen de los Cocientes.
- La *metáfora de los tornillos* sirve para justificar por qué el Cociente no es un subespacio del original y para explicar la diferencia entre las dos representaciones simbólicas (de corchetes o global) de las clases de equivalencia.

En la Figura 4. 109 se muestran los usos que se hizo en las clases de las anteriores representaciones y modelos de visualización como muestra de una posible movilización de los mismos para explicar los EVC. Por supuesto la observación de otros cursos de AL donde se explique esta noción podría traer a colación otros modelos de visualización diferentes así como otras formas de movilización.

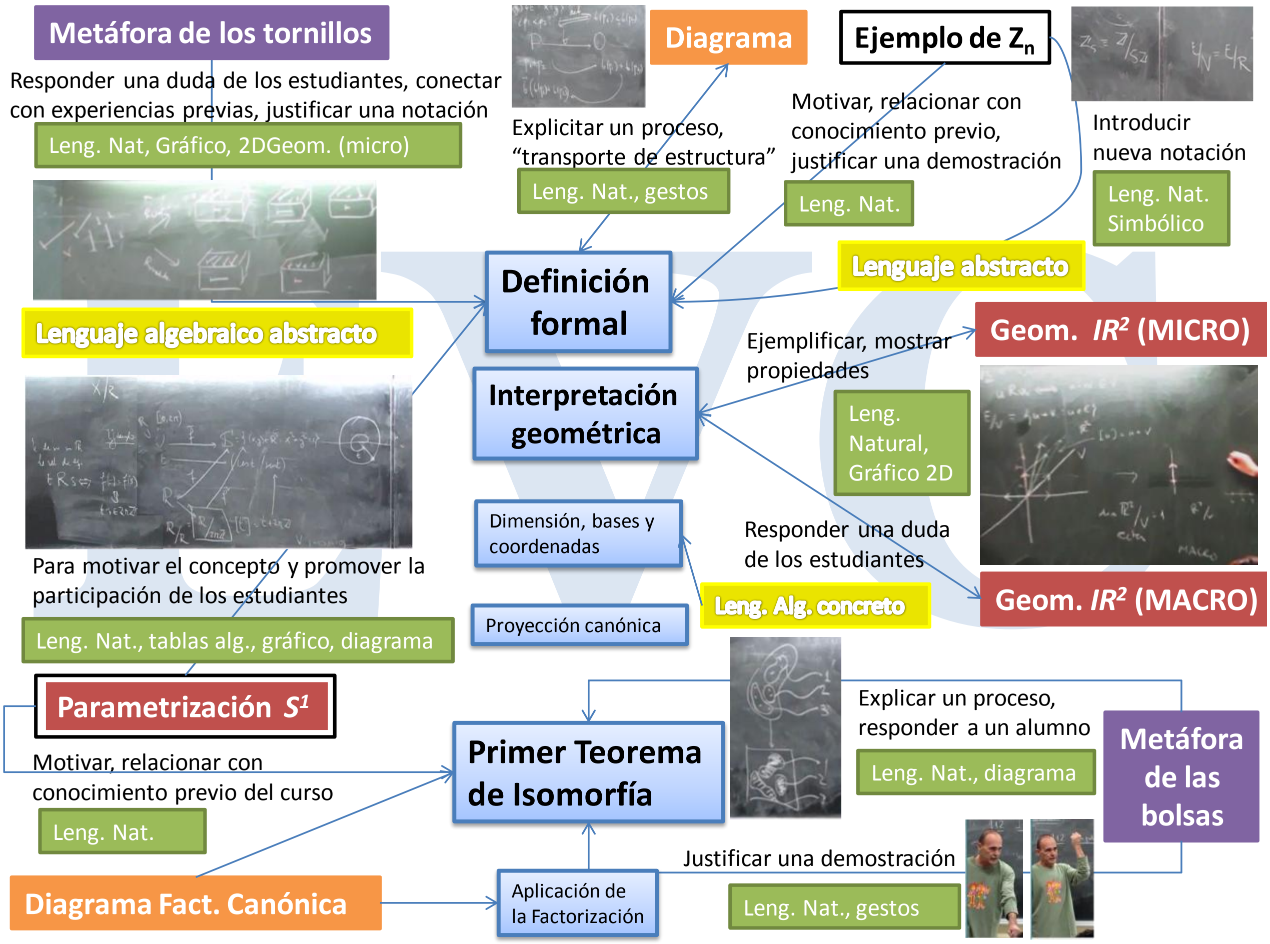


Figura 4. 109: *Esquema de los modelos de visualización utilizados en la enseñanza de los EVC en las clases teóricas y prácticas del curso de AL observado*. Están representados los contenidos relativos a los EVC (cajas azul claro centrales, son más grandes cuantas más visualizaciones se usan), los modelos de visualización empleados para explicarlos (cajas de colores, según el modelo de visualización), el modo de comunicación (cajas verdes) y los propósitos (descritas sobre las flechas).

Por último, la enseñanza de los EVC no será completamente efectiva si no se tiene en cuenta a los estudiantes: sus conocimientos previos, las dificultades que suelen encontrar, sus capacidades para aprender y, en particular, su preferencia por lo visual. Esto es, el **Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS).** El análisis de los conocimientos con los que llegan los estudiantes del Grado de Matemáticas de la UCM a la asignatura de AL muestra que en las asignaturas de Elementos de Matemáticas y de Matemáticas Básicas se introducen las nociones necesarias para comprender los EVC, en un orden similar a la evolución histórica del concepto. Sin embargo, en las clases teóricas se considera que esa enseñanza aún no es suficiente, especialmente en lo que se refiere a la comprensión y visualización de las particiones y las clases de equivalencia. De hecho, en repetidas ocasiones los estudiantes afirman, con generalidad, que "*no entienden el Cociente*", comprobándose en las clases de prácticas y las tutorías que lo que no terminan de entender es la idea de partición (y no tanto la parte de AL, de dotar de estructura de Espacio Vectorial): la mayoría de las dificultades observadas en el curso no tienen apenas relación con la estructura algebraica de los EVC (Figura 4. 110). Estas dificultades de los estudiantes para coordinar adecuadamente los conceptos de relación de equivalencia y de partición en un mismo esquema conceptual son coherentes con los resultados de investigaciones previas que también apuntan una gran compartimentación y falta de comprensión de esos conceptos (Chin & Tall, 2001; Hamdan, 2006, p. 129). Por otro lado, en relación a la visualización, es importante conocer el perfil visualizador de los estudiantes. En las tutorías en torno al "Problema 7 con Ampliación" se puso de manifiesto la importancia que éste tiene a la hora de comprender los conceptos matemáticos: cada estudiante precisa unas indicaciones y sigue trayectorias distintas, según su preferencia por lo visual.

Conocimientos previos sobre Particiones y Grupos Cocientes	Resultan insuficientes, la mayoría de estudiantes no tiene esos conceptos claros cuando se enfrentan por primera vez a los EVC
Preguntas comunes de los estudiantes	Preguntan mucho sobre la elección de representante, especialmente en relación a las representaciones gráficas (cuando se pasa de MICRO a MACRO): dudan de si, al coger otro representante, el cociente sale diferente
Dificultades con la definición	Al tener que definir un producto escalar en un cociente, no caen en la cuenta de que hay que comprobar que no depende del representante, es decir, que está bien definido Algunos estudiantes confunden el Conjunto Cociente total con cada Clase de Equivalencia (por ejemplo, en la respuesta escrita del Grupo 4) o con los Representantes (por ejemplo, a Ángel le parece que V y la imagen de *f* son iguales) Les cuesta darle sentido y conectarla con otras concepciones
Dificultades con la representación gráfica	No saben encontrar vectores relacionados a uno dado (tiene que ver con las dificultades en la resta gráfica de vectores) Les cuesta más imaginarla y representarla en el espacio Tienen problemas para ver el isomorfismo entre el cociente y la imagen de *f*
Dificultades para coordinar diversos puntos de vista de los EVC	No todos logran establecer conexiones entre las diferentes explicaciones de los EVC recibidas en clase (especialmente las más intuitivas) y el "Problema 7 con Ampliación", (por ejemplo, con la explicación de prácticas con la metáfora de los tornillos; ver las respuesta a las Encuestas en los Anexos) En la comprensión del isomorfismo del "Problema 7 con Ampliación", les ayuda pensar en el *Cociente como Ordenación*

Figura 4. 110: Resumen de los conocimientos previos, las dudas y las dificultades observadas en los estudiantes en torno a los EVC.

4.3.3.2 ¿Cómo lograr una enseñanza de la visualización más eficaz para este concepto?

El análisis realizado sobre los EVC como concepto matemático y en torno a su enseñanza y aprendizaje muestra que tanto el Libro de Texto como las clases cubren una gran cantidad de concepciones del concepto. Esto, junto a los diversos modelos de visualización empleados para explicarlo en clase (Figura 4. 109), debería contribuir a una buena comprensión por parte de los estudiantes. Y en parte es así: las explicaciones visuales de clase tienen influencia positiva sobre el aprendizaje de los estudiantes, como muestran algunas afirmaciones realizadas durante las tutorías del "Problema 7 con Ampliación". Por ejemplo, Pablo hace algunas referencias a esas explicaciones y además afirma que este curso lo está entendiendo mejor. Añade que "*estoy alucinando este año porque hay una diferencia entre cómo te están dando la Factorización Canónica entre este año y el anterior...*". También Ana utiliza argumentos similares a los de clase en sus explicaciones sobre cómo usar un cociente para hacer una aplicación inyectiva, demostrando una buena comprensión. Por otro lado, David aún se acuerda, un año después, de los Cocientes (aunque los confunde con los espacios duales) como los conjuntos de "*cajas de tornillos*", afirmando que "*es mejor pensar en una caja que en una relación de equivalencia*" (ver "Nota de David", Anexos).

Sin embargo, salvo estas excepciones, en general los estudiantes tienen dificultades con el concepto (Figura 4. 110) y demuestran, sobre todo en las clases prácticas, muchas limitaciones en su comprensión. La persistencia de esas dificultades con los EVC se podría explicar apelando a la ya mencionada complejidad epistemológica del concepto. Por otro lado, el análisis histórico del desarrollo del concepto pone de manifiesto que la abstracción propia de la definición formal sólo llega después de lidiar con situaciones más concretas, llevando a reflexionar sobre la adecuación de introducirla como punto de partida. Se han señalado también algunas debilidades en la trayectoria cognitiva de los estudiantes que necesitan reforzar conceptos previos necesarios para comprender de forma óptima la noción de EVC (como *Partición* o *Grupo Cociente*). Incluso se podría argumentar que la atención explícita a la "flexibilidad cognitiva" en las clases, aunque mejora la del Libro de Texto, aún se podría mejorar. A pesar de todas estas razones, según nuestra visión de cómo se produce el aprendizaje y la comprensión de los conceptos (ver Base Filosófica, Capítulo 3.1), la presencia de diversidad de puntos de vista y del uso de varias representaciones deberían actuar como agentes facilitadores. Esto hace cuestionarse si la visión inicial de partida está equivocada o, por el contrario, puede haber algo más que esté fallando en la enseñanza de la visualización del curso. La siguiente reflexión lleva a inclinarse por lo segundo.

Como se señaló en la Base Filosófica hay otro aspecto a considerar: la concepción de las Matemáticas como actividad. Éste conduce a prestar atención al análisis de los problemas planteados a los estudiantes en torno a los EVC. Los resultados de este análisis, en relación a las concepciones de los EVC, se resumen en la Figura 4. 111.

Lo primero que se observa es que no todos los contenidos se trabajan por igual. Los más trabajados son: dimensión, bases y coordenadas; y la aplicación de la Factorización Canónica para factorizar funciones dadas. En particular, hay algunos contenidos, como la interpretación geométrica de los EVC, que no se trabaja en absoluto. Si se compara los datos explicitados en la Figura 4. 109 con los de la Figura 4. 111 se observa que el conjunto de contenidos explicados con más visualización apenas interseca el conjunto de contenidos más trabajados en los problemas. En relación a la visualización, la mayoría de problemas están planteados en registro de tablas o simbólico y son de carácter rutinario y mecánico, bastando con esos registros y una comprensión instrumental para resolverlos. Estos problemas no están encaminados ni a visualizar ni a mejorar la comprensión del concepto. Por tanto, los estudiantes pueden dejar a un lado las visualizaciones empleadas en clase cuando los resuelven (ya que la mayoría de ellas se usan para dar sentido, esto es, para propiciar una comprensión más conceptual de los EVC y ésta no es necesaria para realizar los problemas). Es decir, hay un importante salto entre el papel de la visualización en las explicaciones de clase y en la actividad de los estudiantes: en las clases sirve para complementar, ilustrar y dar sentido a los EVC mientras que los estudiantes pueden pasar sin ello en los problemas porque no se les exige ni se les pide que lo practiquen. Teniendo en cuenta nuestra visión del aprendizaje, no están aprendiendo visualización: *el curso enseña con visualización, pero no enseña a visualizar*.

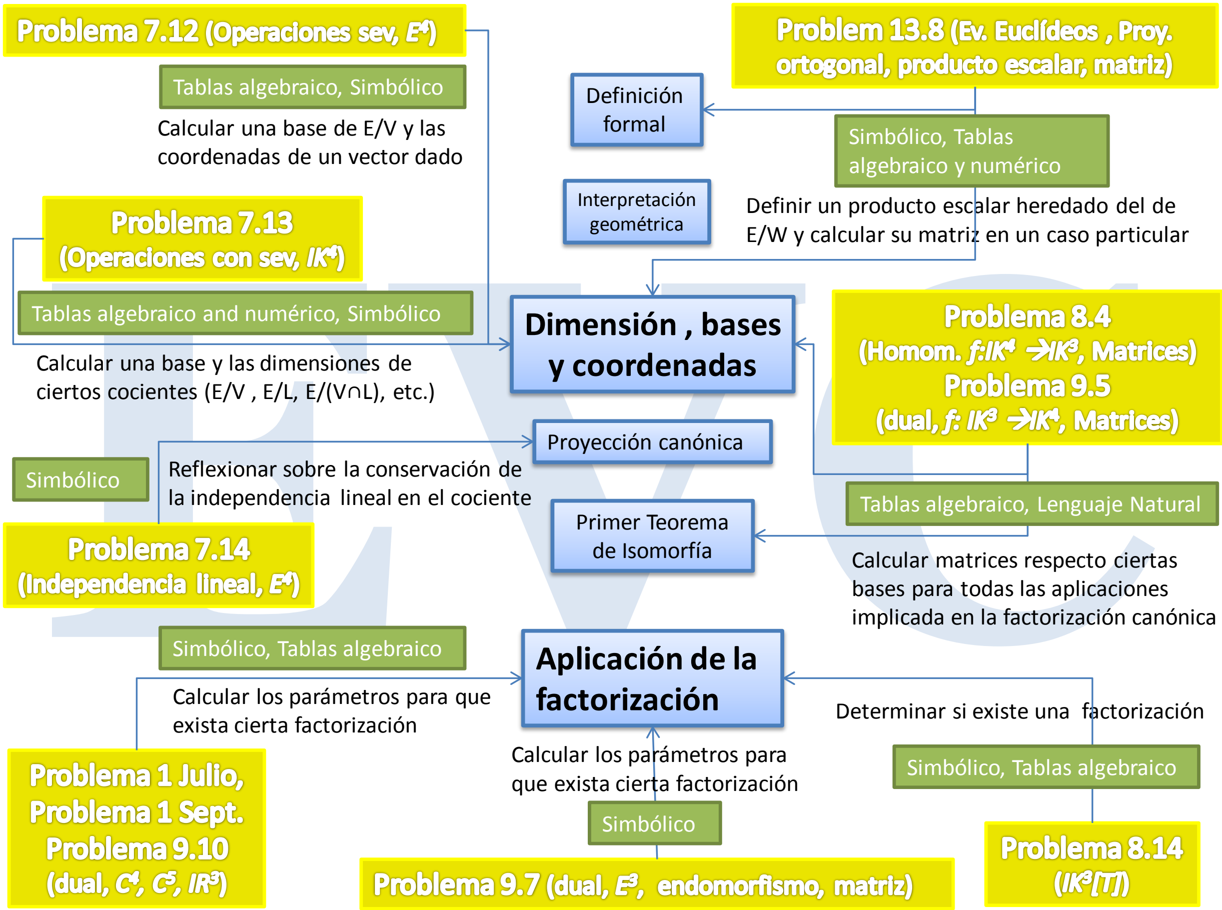


Figura 4. 111: Mapa conceptual que resume los resultados del análisis de los problemas relacionados con los EVC encontrados en las 14 Hojas de Problemas de la asignatura y los exámenes. En particular, en esta figura se incluye la siguiente información: los contenidos del Libro de Texto a los que hacen referencia los diferentes problemas (cajas con fondo azul claro situadas en el centro); los tipos de representaciones usadas en el enunciado de los problemas (cajas verdes) y el propósito del problema (letras minúsculas negras). Como el único aspecto relacionado con la visualización de estos problemas tiene que ver con el manejo de representaciones todos aparecen en cuadros amarillos. El tamaño de las cajas de los contenidos es proporcional al número de problemas que los refieren.

Para enseñar a visualizar, los estudiantes deberían poder y tener que visualizar. Esto supone proponerles tareas específicas de visualización. En esta línea se plantea el "Problema 7 con Ampliación", cuya experimentación complementa el análisis más teórico realizado en la primera sección y permite arrojar un poco de luz sobre algunas características que deben tener este tipo de tareas que "enseñen a visualizar":

- Se deben combinar y pedir multitud de representaciones en el enunciado, teniendo en cuenta que cada tipo de lenguaje es adecuado para objetivos y niveles cognitivos diferentes (así se puede observar en la discusión entre el lenguaje de Halmos, libre de coordenadas, y el del Libro de Texto). Para ello es importante considerar las tabla de la sección 4.3.3.3 en diálogo con las características personales de los estudiantes (nivel de pensamiento matemático, preferencias por lo visual).
- Es importante practicar no sólo las diferentes representaciones y lenguajes de un concepto, sino también los diferentes puntos de vista o concepciones que

conviven en las Matemáticas. Para esto es útil tener en mente el esquema de la Figura 4. 105 y explotar el hecho de que una misma representación puede servir para dos propósitos diferentes (como hemos visto en los ejemplos de Primaria, para distinguir el concepto de fracción y de razón, y de la representación gráfica de los EVC, para introducir dos concepciones diferentes).

- Hay una dimensión operativa de la visualización que se debe considerar. No basta con hacer problemas donde se usen diferentes representaciones o concepciones, también hay que hacer problemas que enseñen cómo se comportan y se manejan esas visualizaciones para aprender a: distinguir elementos son importantes en cada una, pasar de una a otra, elegir la que resulte más adecuada en una determinada situación, etcétera. (Por ejemplo, pedir en algún problema que se represente gráficamente un EVC dado, o al contrario, dada una representación gráfica escribir la ecuación; que se emparejen diferentes representaciones de un mismo objeto; que se señalen los elementos esenciales de los EVC –clases de equivalencia, representantes, operaciones binarias– en una representación gráfica).
- Hay niveles de visualización que también se deben tener en cuenta (por ejemplo, esto supone realizar algún ejercicio de suma de vectores en el espacio, de representación de planos o representación gráfica de EVC en el plano antes de pretender que un estudiante haga una representación gráfica en el espacio).
- Es fundamental realizar una buena anticipación del problema que tenga en cuenta todos sus caminos de resolución (visuales y no visuales) y posibles bloqueos, para evitar problemas innecesarios y proporcionar las ayudas adecuadas (por ejemplo, una visualización en 3 dimensiones por ordenador de la proyección puede ayudar a centrarse más en la visualización del cociente y del isomorfismo en el "Problema 7 con Ampliación"). Para ello, el árbol del problema es una herramienta de gran utilidad.

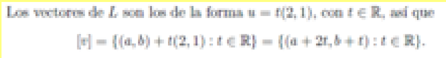
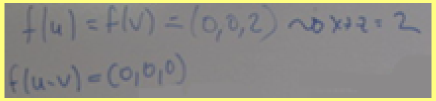
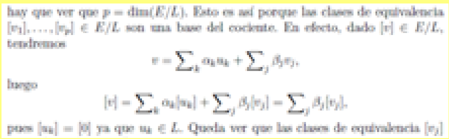
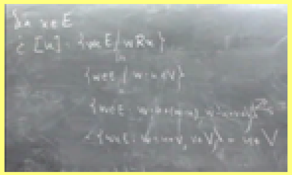
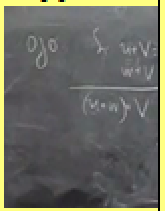
Otras observaciones que han surgido a raíz del análisis realizado y que pueden ser interesantes de cara al diseño de propuestas de enseñanza del concepto (no necesariamente de visualización) sin las siguientes:

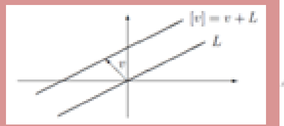
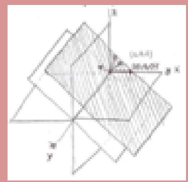
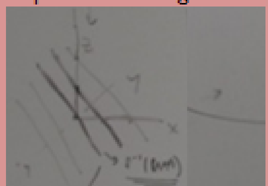
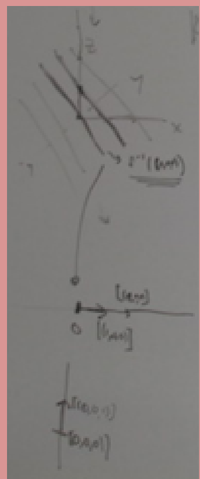
- <u>Idea de relación de equivalencia:</u> el análisis histórico muestra que esta idea surge esencialmente como una extensión de la idea de igualdad; investigaciones previas indican que este hecho puede explotarse actualmente en la enseñanza para complementar a la definición formal (Hamdan, 2006).
- <u>Operaciones binarias bien definidas</u>: se han detectado en la literatura (Asiala et al., 1997) varios métodos para definir las operaciones que dotan de estructura a los Espacios Cociente (por representantes, de forma global, o un método mixto). Cada uno posee un nivel diferente de dificultad según el tipo de representaciones utilizadas y plantea de forma distinta la idea de estar bien definida. A la hora de enseñar deben tenerse en cuenta estas diferencias y pueden aprovecharse para forzar a los estudiantes a pensar de diferentes modos.

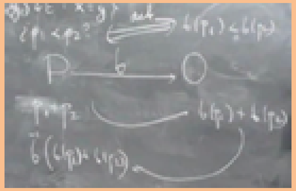
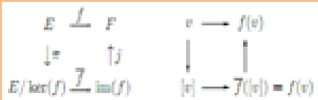
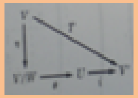
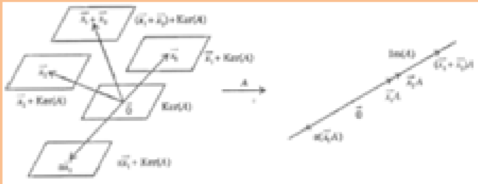
- Aproximación a la noción de EVC: en el análisis de los diferentes libros de texto de AL se han detectado dos posibles aproximaciones al concepto, una más algebraica (que es la que usa el Libro de Texto) y otra más geométrica. Esta última presenta los EVC como parte de la teoría de variedades afines o bien los introduce, de forma más aplicada, en relación al estudio de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneo respecto al conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado. Se podrían explorar las consecuencias sobre las dificultades de aprendizaje según la aproximación escogida.
- Cociente como suplementario y Factorización Canónica de Aplicaciones: en uno de los libros de texto analizados (Lin, 2005) se han encontrado enfoques constructivos para estas nociones basados en el estudio de propiedades geométricas de homomorfismos particulares. Estas ideas se emplearon en el diseño del "Problema 7 con Ampliación" pero se podrían explotar para hacer más énfasis en la concepción de *Cociente como Suplementario*.
- Conveniencia de mezclar los Cocientes con otras nociones: surgen dudas en torno a esta cuestión, pues hacerlo puede incrementar la dificultad (como ocurre en el "Problema 7 con Ampliación" al mezclarlo con la noción de proyección). Al mismo tiempo permite dar profundidad al concepto y controlar posibles conexiones entre nociones alejadas (que si no se enseñan pueden establecerse en cualquier caso de forma inconsciente en la mente del estudiante).
    - ¿Se podría aprovechar la interpretación geométrica de los determinantes como áreas o como volúmenes para dar unas nociones históricas del desarrollo del concepto de los EVC y referir el trabajo de Grassmann (ver sección 4.3.1)?
    - ¿Es buena idea hablar de los EVC en relación a la representación geométrica de las ecuaciones paramétricas de un subespacio? ¿Y en relación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos?
    - ¿Conviene explicar los procesos de clasificación como la construcción de una partición? Puesto que en el Libro de Texto no se procede siempre del mismo modo en este aspecto ¿cómo depende esta decisión del contexto.

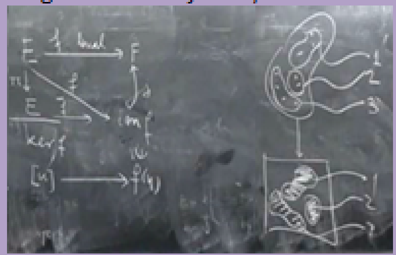
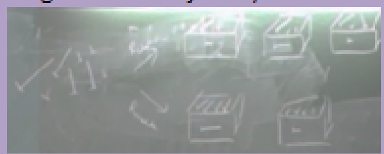
Se finaliza esta parte de los resultados sobre EVC recogiendo en tablas los modelos para la "enseñanza de la visualización" resultantes del análisis que acabamos de exponer.

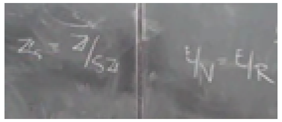
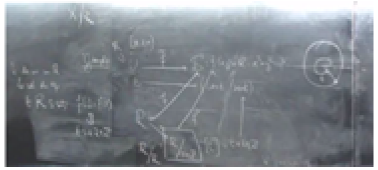
4.3.3.3 Modelos para la "Enseñanza de la Visualización" de los EVC

TIPO DE PRODUCTO	SIGNOS ASOCIADOS	UNIDADES Y RELACIONES REPRESENTADAS	CONCEPCIONES Y OTRAS INFORMACIONES RELACIONADAS CON LA VISUALIZACIÓN
(REPR) Lenguaje algebraico concreto	Registro de tablas numérico  Los vectores de L son los de la forma $u = t(2,1)$, con $t \in \mathbb{R}$, así que $[v] = \{(a,b)+t(2,1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(a+2t, b+t) : t \in \mathbb{R}\}$. 	*Espacio original: IK*ⁿ *Relación de equivalencia:* "tener la resta en *V* (dado en ecuaciones paramétricas o implícitas)" *Clases de equivalencia:* [(0,0,2)]=(0,0,2)+V o x+z=2 *Representantes:* en un suplementario (con coordenadas numéricas) *Operaciones:* + o ·*IK* coordenada a coordenada *Espacio cociente:* conjunto de todas las clases de equivalencia	*Concepciones:* EVC como conjunto cociente con estructura de espacio vectorial heredada de *IK*ⁿ, EVC como familia de espacios paralelos, cociente como conjunto de preimágenes de una función (según la situación) *VIS:* surgen cuando se trabaja con subespacios concretos, para elegir representantes, calcular bases y coordenadas. Paso intermedio entre la definición formal y la interpretación geométrica, fácil de coordinar con la representación gráfica
(REPR) Lenguaje algebraico abstracto	Registro de tablas algebraico combinado con el simbólico  hay que ver que $p = \dim(E/L)$. Esto es así porque las clases de equivalencia $[v_1], \dots, [v_p] \in E/L$ son una base del cociente. En efecto, dado $[v] \in E/L$, tendremos $v = \sum_k \alpha_k u_k + \sum_j \beta_j v_j$, luego $[v] = \sum_k \alpha_k [u_k] + \sum_j \beta_j [v_j] = \sum_j \beta_j [v_j]$, pues $[u_k] = [0]$ ya que $u_k \in L$. Queda ver que las clases de equivalencia $[v_j]$	*Espacio original: E* finito *Relación de equivalencia:* "tener la resta en *V*" *Clases de equivalencia:* u+V o [u] *Representantes:* cualquiera (escrito como combinación lineal de vectores de una base) *Operaciones*: heredadas de *E* *Espacio cociente:* E/V	*Concepciones:* EVC como conjunto cociente con estructura de espacio vectorial heredada de *E*, EVC como un tipo de suplementario o como proyección (según situación) *VIS:* surgen cuando se trabaja con espacios vectoriales finitos, con bases y coordenadas generales (por ejemplo en la demostración de la proposición sobre la dimensión de los EVC). Paso intermedio entre la definición formal y el trabajo con subespacios concretos, ayudan a explicitar métodos de cálculo, resulta un lenguaje más familiar para los estudiantes que el siguiente
(REPR) Lenguaje abstracto, registro simbólico	Lenguaje natural matemático: mezclado con notaciones simbólicas: *E/V, u+V o [u]*  	*Espacio original*: E *Relación de equivalencia*: R, "tener la resta en V" *Clases de equivalencia*: u+V o [u] (notación global o de corchetes) *Representantes*: cualquiera *Operaciones*: heredadas de E *Espacio cociente: E/V*	*Concepciones:* EVC como conjunto cociente con estructura de espacio vectorial heredada de *E* *VIS:* aparece para definiciones formales (de los EVC y la proyección canónica), para probar que la relación es de equivalencia, que las operaciones están bien definidas o las propiedades de π; para pensar con generalidad (como Halmos que utilizaba este lenguaje para poder extenderlo a dimensiones infinitas). Es muy abstracto para los estudiantes. Se coordina bien con representaciones en registro de tablas y gráfica, no tanto con modelos de visualización más intuitivos.

TIPO DE PRODUCTO	SIGNOS ASOCIADOS	UNIDADES Y RELACIONES REPRESENTADAS	CONCEPCIONES Y OTRAS INFORMACIONES RELACIONADAS CON LA VISUALIZACIÓN
(GEOM) Interpretación geométrica MICRO	Lenguaje natural matemático: "*E/V es el conjunto de rectas (o planos) paralelas a V*" Representación gráfica  	*Espacio original:* IR^2 o IR^3 (IR^n) *Relación*: "tener los extremos en la misma variedad paralela a *V*" *Clases*: variedades paralelas a *V* (los vectores con extremos en ellas) *Representantes*: en un suplementario *Operaciones*: + y $\cdot IK$ gráficos (regla paralelogramo y homotecia) *Espacio cociente*: conjunto de variedades paralelas a V	*Concepciones:* EVC como una familia de variedades paralelas a *V*, EVC como un tipo de suplementario, EVC como conjunto con estructura de espacio vectorial heredada de IR^2 o IR^3 (IR^n) *VIS*: se debe tener cuidado con el cambio de punto de vista –de flecha a punto– que implica sobre los vectores; entonces sirven para evidenciar que se cumplen las propiedades de la partición. Permite la manipulación directa y así comprobar que las operaciones están bien definidas (complementando la prueba simbólica que acompaña a la definición formal); aunque la estructura de espacio vectorial queda un poco oculta. Es más fácil realizarla partiendo de descripción las clases de equivalencia (global u+V o en registro de tablas) que de la definición formal (aparece la resta gráfica de vectores, más desconocida para los estudiantes)
(GEOM) Interpretación geométrica MACRO	Lenguaje natural matemático: *"A good way to think about E/V is that its elements arise by identifying all the elements in a coset, so that each coset has been "compressed" to a single vector"* (Robinson, 2006, p.144) Representación gráfica  	*Espacio original:* IR^2 o IR^3(IR^n) *Relación*: "tener los extremos en la misma variedad paralela a *V*" *Clases*: "vectores gordos" (cada variedad se concentra en un vector) *Representantes*: en un suplementario *Operaciones*: + y $\cdot IK$ gráficos (regla paralelogramo y homotecia) *Espacio cociente*: espacio vectorial de "vectores gordos"	*Concepciones:* EVC como un tipo de suplementario, EVC como un tipo de proyección, Cociente como método para comprimir 'defectos' en un punto (ker f, localización…), EVC como conjunto con estructura de espacio vectorial heredada de IR^2 o IR^3 (IR^n) *VIS:* facilita la visión geométrica de la estructura de espacio vectorial del EVC, su base, dimensión y la dependencia entre las clases; oculta el subespacio *V*, las propiedades de las particiones y el hecho de cada elemento del cociente es un subconjunto de vectores del espacio original. Es útil para hacer emerger la cuestión de cómo afecta la elección de la base sobre los representantes de cada clase y ayuda a ver el isomorfismo de la factorización canónica. En combinación con la interpretación geométrica MICRO da una visión bastante completa de los EVC. Además sirve para ilustrar al lenguaje algebraico abstracto.

TIPO DE PRODUCTO	SIGNOS ASOCIADOS	UNIDADES Y RELACIONES REPRESENTADAS	CONCEPCIONES Y OTRAS INFORMACIONES RELACIONADAS CON LA VISUALIZACIÓN
(DIAG) "Transportar la estructura"	Lenguaje Natural: "*Fabrico cualquier biyección entre IK y esto ([IK/V] y uso esa biyección para dotarle de estructura de espacio vectorial*" Diagrama 	*Espacio original:* no hay *Relación:* no hay *Clases:* no hay *Representantes:* no hay *Operaciones:* heredadas del espacio ordenado *Espacio cociente:* espacio "pobre" al que se está intentando dar estructura	*Concepciones:* Cociente como conjunto con estructura heredada (grupos, anillos, ideales, cuerpos, módulos…) *VIS:* ayuda a comunicar un proceso abstracto de pensamiento, sirve para motivar la definición "de forma natural" de las operaciones sobre las clases al explicar la definición formal.
(DIAG) Diagrama conmutativo factorización canónica	Lenguaje natural, diagrama, representaciones gráficas, metáfora de la imagen proyectada sobre una pantalla y de las bolsas   	*Espacio original:* E *Relación:* "tener la misma imagen" o "tener la resta en ker *f*" *Clases:* $f^{-1}(w)$ o u+ ker *f* *Representantes:* en un suplementario isomorfo a la *im f* *Operaciones:* heredadas de E, compatibles con *f* *Espacio cociente: E/ker f = im f*	*Concepciones:* todas las posibles en AL, incluyendo la de cociente como conjunto de preimágenes de una función (que abre camino para la de "cortar y pegar" de Topología). Además también aparece la de cociente como método para comprimir 'defectos' en un punto (ker f, localización…) que enlaza con la de cociente como método para eliminar información extra. VIS: entender el proceso de construcción que se esconde detrás del diagrama de la Factorización Canónica ayuda a conectar muchos puntos de vista diferentes de los EVC. En particular, da buen resultado combinarlo con la interpretación geométrica MICRO/MACRO, pues actúa como bisagra entre varios de esos puntos de vista.
(DIAG) De Venn para clasificaciones	Lenguaje natural, Diagrama 	*Espacio original:* conjunto de objetos que se van a clasificar *Relación:* "tener la misma… (dimensión, matriz de Jordan)" *Clases:* subconjuntos que comparten el criterio de clasificación *Representantes:* cualquiera *Operaciones:* no hay *Espacio cociente:* conjunto de subconjuntos obtenidos al aplicar el criterio de clasificación	*Concepciones:* Cociente como un conjunto de conjuntos obtenido de un proceso de clasificación *VIS:* útil para resaltar las propiedades de las particiones y la diferente naturaleza entre los elementos del espacio original y del cociente. No hay estructura algebraica y por tanto queda lejos de la definición formal. Sin embargo puede resultar familiar a los estudiantes y ayudarlos a conectar con conocimiento previo sobre cocientes.

TIPO DE PRODUCTO	SIGNOS ASOCIADOS	UNIDADES Y RELACIONES REPRESENTADAS	CONCEPCIONES Y OTRAS INFORMACIONES RELACIONADAS CON LA VISUALIZACIÓN
(INT) Metáfora de las bolsas	Lenguaje Natural: "*Estoy en una ferretería, tengo clavos y los quiero ordenar...*" Diagrama de conjuntos/ilustraciones, gestos 	*Espacio original*: conjunto de elementos *Relación*: "tener la misma imagen vía una aplicación" o "pertenecer a la misma bolsa" *Clases*: bolsas *Representantes*: la imagen o cualquier elemento de la bolsa *Operaciones*: no están *Espacio cociente*: conjunto de bolsas, sin estructura algebraica	*Concepciones*: Cociente como un conjunto de conjuntos obtenido de un proceso de clasificación; Cociente como conjunto de preimágenes de una función *VIS*: Resalta las propiedades de las particiones, mostrando la diferente naturaleza entre los elementos del espacio original y del cociente; es útil para justificar por qué hay que probar que están bien definidas las aplicaciones que nacen de los cocientes ("*si dos personas sacan elementos diferentes de la bolsa deben obtener el mismo resultado*"). Sirve para explicar y motivar la presencia de un cociente en la Factorización Canónica. Da a un apoyo intuitivo a los estudiantes, quienes lo usan cuando piensan en EVC.
(INT) Metáfora ferretería, ¿Analógica o homeomórfica?	Lenguaje Natural: "*Estoy en una ferretería, tengo clavos y los quiero ordenar...*" Diagrama de conjuntos/ilustraciones 	*Espacio original*: conjunto de clavos *Relación*: criterios de clasificación (color, tamaño…) *Clases*: cajones *Representantes*: etiqueta de los cajones *Operaciones*: no están *Espacio cociente*: conjunto de cajones, sin estructura algebraica	*Concepciones*: Cociente como un conjunto de conjuntos obtenido de un proceso de clasificación *VIS*: Resalta las propiedades de las particiones, mostrando la diferente naturaleza entre los elementos del espacio original y del cociente. Útil para explicar la diferencia entre las dos representaciones simbólicas (de corchetes o global) de las clase de equivalencia. Ayuda a dar sentido a la interpretación geométrica MICRO (aunque se debe tener en cuenta que ahí hay estructura y en esta no) y desde ella a la definición formal de los EVC.

TIPO DE PRODUCTO	SIGNOS ASOCIADOS	UNIDADES Y RELACIONES REPRESENTADAS	CONCEPCIONES Y OTRAS INFORMACIONES RELACIONADAS CON LA VISUALIZACION
(FLEX) Ejemplo $\mathbb{Z}_n$	Lenguaje natural: "*para explicar lo que es Z_4 pues se explica que es el conjunto cociente de la relación de equivalencia definida en Z que dice que dos cosas están relacionadas si su resta es múltiplo de cuatro*"  Notaciones simbólicas	*Espacio original*: $\mathbb{Z}$ *Relación*: "tener el mismo resto *r* al dividir por *n*" *Clases*: $r + n\mathbb{Z}$, o subconjuntos de enteros cuya resta es n *Representantes*: suele ser el resto *r* *Operaciones*: + y · heredadas de $\mathbb{Z}$ *Espacio cociente*: *{[0],..,[n-1]}*	*Concepciones*: Cociente como operación opuesta a la multiplicación; Grupo cociente Z_4; Cociente como el conjunto de las órbitas de la acción de un grupo; Cociente como conjunto con estructura heredada (grupo) VIS: útil para introducir y motivar el concepto, estableciendo relaciones (por ejemplo de notación) con conocimientos previos. Sirve para justificar por qué hay que probar que una aplicación que nace en un cociente está bien definida. Tiene estructura algebraica (se debe tener en cuenta que es de grupo y no de espacio vectorial).
(FLEX) Parametrización de la cirunferencia	Lenguaje natural: *¿Cómo parametrizarías…? Se llama S^1…*" Diagramas y representaciones en todos los registros (gráfico, de tablas y simbólico) 	Espacio original: $\mathbb{R}$ *Relación*: "tener la misma imagen vía la parametrización de S^1" *Clases*: $x + 2\pi\mathbb{Z}$, o conjuntos de enteros con resta 2π *Representantes*: en [0, 2π) o cada punto de S^1 *Operaciones*: + y · heredadas de $\mathbb{R}$ *Espacio cociente*: $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, enrollar la recta real de forma que el 0 pegue con el 2π o el "intervalo" [0, 2π) donde cada valor representa a toda su clase	*Concepciones*: Cociente como el conjunto de las órbitas de la acción de un grupo; Cociente como conjunto de preimágenes de una función sobreyectiva; Espacio cociente como resultado de acciones de tipo 'cortar y pegar *VIS*: útiles para motivar la importancia de los cocientes, sirven para introducir el concepto de EVC estableciendo relaciones con elementos conocidos por los estudiantes (como la circunferencia). Además ayuda a introducir, en un contexto más concreto, el proceso realizado en la Factorización Canónica.
(FLEX) Puntos de vista MICRO y MACRO	Lenguaje Natural: "*Si me acerco/ me alejo, si miro dentro de cada clase de equivalencia…*" Gestos, Ilustraciones (una lupa o un telescopio); Representaciones diversas (gráficas, simbólicas)	*Espacio original*: no importa *Relación*: no importa *Clases*: subconjuntos de vectores (MICRO) que al alejarse se ven como un punto (MACRO) *Representantes*: no importa *Operaciones*: no importa *Espacio cociente*: colección de subconjuntos de vectores (MICRO) o de puntos (MACRO)	*Concepciones*: Cociente como método para comprimir 'defectos' en un punto (ker f, localización…), como método para eliminar información extra. *VIS*: este cambio de punto de vista es útil para manejar el problema de representación gráfica de los EVC (como se ha explicado), pero también aparece en relación a otros modelos. Por ejemplo, es de este tipo el cambio de la descripción simbólica de las clases global (MICRO) o de corchetes (MACRO); o en las metáforas descritas, cuando se pasa de ver el contenido de cada clase (MICRO) a ver sólo los cajones o bolsas como elementos (MACRO)

By being not just 'consumers' of visual representations, but also their collective creators, communicators and critics, these students developed meta-representational expertise, establishing and using criteria concerning the quality and adequacy of representations. Thus visualization was for them not only a way to work with pre-established products, but also was in itself the object of analysis. (Arcavi, 2003, p. 237)

5 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta última parte se ofrece un análisis crítico de las aportaciones del estudio global en sus dos fases y del estudio sobre el concepto de los Espacios Vectoriales Cociente (EVC). Primero, se presentan los resultados en los que: (1) se constata la presencia de la visualización en los procesos de enseñanza-aprendizaje universitarios, identificándose modelos y características específicas; (2) la enseñanza de la visualización aparece particularmente inestable, produciéndose una serie de paradojas que envuelve al alumno en situaciones de no aprendizaje. En segundo lugar se presentan las conclusiones y prospectiva referentes a cómo contribuir a la enseñanza de la visualización.

5.1 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados obtenidos responden positivamente a la finalidad de caracterizar y potenciar la enseñanza de la visualización en un curso de Álgebra Lineal (AL) para mejorar la comprensión de los estudiantes. En particular, se obtienen evidencias de que es posible enseñar de forma explícita parte del conocimiento que los matemáticos poseen y les permite utilizar la visualización de modo eficaz en su actividad. A continuación, se discuten estas evidencias en relación a los objetivos específicos.

5.1.1 Sobre la Caracterización de la Enseñanza de la Visualización

El primer objetivo planteado es el siguiente:

1. *Observar, caracterizar y explicar la enseñanza de la visualización en un ambiente natural (un curso de AL del primer año de Grado de Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de Universidad Complutense de Madrid).*

Este objetivo se ha alcanzado al tratar en profundidad de un caso de enseñanza universitaria, tanto de clases teóricas como prácticas. Esta es una de las principales aportaciones de este trabajo, respondiendo a la demanda de este tipo de estudios a nivel universitario.

En esta sección seguimos la estructura marcada por los dos sub-objetivos en que se dividió el objetivo inicial:

2.3. *Describir modelos de visualización y sus formas de uso (estilo de enseñanza, causa, comunicación, propósito, dificultades de los estudiantes).*

2.4. *Identificar factores influyentes, posibilidades y limitaciones en el uso de visualización en clase y acciones relativas a ellos.*

5.1.1.1 Modelos de Visualización y sus Formas de Uso en un Ambiente Natural de Clase

En general, **las clases observadas presentan las características de lo que se conoce como modelo de enseñanza *Definición- Teorema- Demostración* (DTD)** (Slomson, 2010; Weber, 2004; Wood et al., 2007). En especial las clases teóricas, pero también algunas prácticas (descritas en las narrativas de las secciones 4.1.2.3, 4.2.1 y en los episodios de enseñanza de los EVC de la sección 4.3.1). Sin embargo, la visualización tiene un papel en el curso más destacado del que cabría esperar. Esto nos lleva a afirmar, en coherencia con estudios previos (Bergsten, 2007; Weber, 2004, p. 191), que **el modelo DTD no es un paradigma único de enseñanza**, sino que más bien consiste en una colección diversa de técnicas que comparten algunos rasgos comunes. **Nuestra investigación aporta conocimiento en esta línea describiendo nuevos estilos y modelos de enseñanza (de la visualización**).

Los datos recogidos han conducido a la reformulación de la clasificación de Weber (2004) de estilos de enseñanza, estableciendo uno adicional[97]: ***el estilo educativo*** (ver sección 4.1.2.3 y la descripción del código EDU en la sección 4.2.3.2). Estos estilos han sido **útiles para situar la actividad observada en las clases y en particular, los episodios de visualización.** Wood et al. (2007) detectan diversos modos de representación y describen las formas de mediación empleadas por el profesor en clase. Consideramos que nuestro trabajo contribuye al avance de esta incipiente línea de investigación mediante el análisis de dichos episodios (secciones 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 de la Fase II y 4.3.1 de los EVC) combinado con la fundamentación teórica del Marco Conceptual (ver secciones 3.2.2 y 3.3.2) y el análisis de libros de texto (sección 4.1.2.3). Se han **identificado cinco modelos diferentes de visualización, describiéndose sus principales características y sus formas de uso** (ver sección 4.2.3 y 4.3.3.3 para los EVC): **manejo y coordinación de representaciones, pensamiento diagramático, uso de la Geometría, desarrollo de la intuición y las imágenes mentales y fomento de la flexibilidad.** Éstas se sintetizan en la tabla de la Figura 5. 1 atendiendo a: la descripción de los aspectos de la visualización –producto, proceso y habilidad– observados en cada modelo; el estilo de enseñanza donde es más habitual; propósitos que suelen motivarlo; modos empleados en su comunicación; dificultades de los estudiantes; ejemplos concretos para el concepto de Espacios Vectoriales Cociente (EVC).

MODELO	DESCRIPCIÓN	FORMA DE USO
Manejo y coordinación de representaciones **Ejemplos (EVC):** Definición formal y Notación clases de equivalencia	<u>Producto</u>: representaciones en los registros de tablas y simbólico (ver tipos de representaciones en AL en Figura 4. 7 y Figura 4. 8). <u>Procesos</u>: representación, tratamiento, conversión, discusión, comunicación. <u>Habilidades</u>: saber representar, transformar, elegir representaciones; ser capaz de compararlas, de predecir los efectos de una transformación.	<u>Estilo de enseñanza</u>: lógico- estructural y procedimental (episodios más formales). <u>Propósito</u>: para enunciar resultados, aclarar notaciones, presentar representaciones equivalentes, explicar pasos técnicos de una demostración, desarrollar ejemplos, explicitar ideas matemáticas; debidos a las dudas de los estudiantes. <u>Comunicación</u>: bastante explicitación sobre su manejo, a veces con ayuda de diagramas o de metáforas. <u>Dificultades</u>: abundantes, relacionadas con la notación y el aprendizaje mecánico.
Pensamiento diagramático o uso de diagramas **Ejemplos (EVC):** Transporte de estructura, diagrama Factorización Canónica, Venn para clasificaciones	<u>Producto</u>: diagramas (relativos a los juegos de implicaciones o igualdades; a los razonamientos con matrices, de flechas o conmutativos, de conjuntos). <u>Procesos</u>: transformación, interpretación, abstracción, discusión, comunicación, reflexión. <u>Habilidades</u>: saber las reglas de manipulación, ser capaz de identificar elementos relevantes, crear esquemas conceptuales flexibles.	<u>Estilo de enseñanza</u>: procedimental. <u>Propósito</u>: para sintetizar información, resumir procesos, comunicar ideas tipo META, ayudar a comprender o recordar, hacerse una idea de lo que ocurre; como un contenido en sí mismo. <u>Comunicación</u>: su uso aclaratorio va en detrimento de su explicitación; se usan configuraciones específicas, símbolos como como □, ○, Δ para llamar la atención sobre ciertos elementos y simplificar la escritura, flechas para las relaciones. <u>Dificultades</u>: pocas, los usan como apoyo al estudio, a veces con errores.

[97] Que es coherente con los dos últimos tipos de clases magistrales definidos por Saroyan y Snell (citado en Bergsten, 2007).

Desarrollo de la intuición y las imágenes mentales **Ejemplos (EVC):** Metáforas de las bolsas y de los tornillos	Producto: metáforas, ejemplos de la vida cotidiana, ilustraciones, lenguaje natural. Procesos: codificación y decodificación, abstracción, cambio de punto de vista, comunicación, reflexión y discusión. Habilidades: crear esquemas conceptuales rico y flexible; ser consciente de los posibles equívocos de la intuición; saber utilizar el lenguaje oral para explicar visualizaciones.	Estilo de enseñanza: semántico. Propósito: para establecer analogías, dar sentido a una definición; ayudar a comprender o recordar procesos META; explicar de forma intuitiva el manejo de representaciones, justificar algún paso en una demostración o establecer analogías con otras similares; mostrar algo como evidente; explicitar conexiones mentales (resolución de problemas). Comunicación: poca explicitación; uso de lenguaje matemático para comentarios META, natural para ejemplos y metáforas; a veces con apoyo de ilustraciones o diagramas. Dificultades: algunas, debidas a un exceso de confianza (no controlada) en la intuición.
Pensamiento geométrico o uso de la Geometría **Ejemplos (EVC):** MICRO MACRO	Producto: representación en registro gráfico, gestos y lenguaje matemático. Procesos: interpretación, representación, poco tratamiento, conversión, ejemplificación, cambio de punto de vista. Habilidades: saber identificar elementos relevantes, aprehender globalmente, conectar puntos de vista; ser capaz de elegir e invocar la visualización; apreciar lo concreto y lo abstracto; ser consciente de posibles equívocos.	Estilo de enseñanza: en todos (papel más destacado en el semántico). Propósito: para ilustrar o ejemplificar (lógico-estructural); como complemento, apoyo o guía de argumentos algebraicos (procedimental); para dar sentido, convencer o establecer conexiones (semántico); como argumento matemático (más en las prácticas); debidos a la interacción con los estudiantes. Comunicación: difícil; gráfico (IR^2), pero no necesariamente; explicitación de elementos por la interacción; subordinada o coordinada con lo algebraico. Dificultades: bastantes; confunden afín con vectorial; falta de fluidez; les cuesta distinguir elementos relevantes o imaginar cambios en las imágenes; no lo suelen invocar de forma natural.
Fomento de la flexibilidad **Ejemplos (EVC):** Ejemplos ($\mathbb{Z}_n$, S^1) Diferentes concepciones (ver Figura 4.129)	Producto: los del resto de modelos y además analogías y ejemplos matemáticos. Procesos: todos, en particular coordinación de representaciones; abstracción, ejemplificación, concreción, reflexión. Habilidades: ser capaz de conectar visualizaciones, articular el esquema conceptual, comprobar.	Estilo de enseñanza: todos (combinados con otros modelos). Propósito: para relacionar con conocimientos previos, ejemplificar, hacerse idea de lo que ocurre, resolver un problema de formas diferentes, comprobar; como un punto de vista nuevo como contenido; debidos a dudas de estudiantes. Comunicación: vaga, a pesar de que se favorece desarrollando terminología específica. Dificultades: bastantes; no cambian flexiblemente de modo de pensamiento; respuestas poco coherentes.

Figura 5. 1: *Modelos de visualización encontrados en la investigación, a nivel teórico y práctico, y formas de uso en las clases observadas.* Exceptuando el último modelo de fomento de la flexibilidad (que se ha situado abajo porque engloba a los modelos anteriores), los demás están ordenados de mayor frecuencia de aparición (arriba) a menor (abajo).

La visión general de la enseñanza de la visualización del curso observado ofrecida por la Figura 5. 1 pone de relieve que, en las explicaciones de las clases, se **usan diversidad de modelos de visualización.** Como era de esperar al dominar el estilo DTD de enseñanza, los modelos más abundantes son el manejo de representaciones (en los registros de tablas y simbólico) y el pensamiento diagramático; y el pensamiento geométrico tiene un papel limitado (aunque está presente en el curso). Un resultado remarcable es que **el papel de los modelos de visualización más relacionados con la intuición y la flexibilidad cognitiva (metáforas y desarrollo de imágenes mentales ricas) ha sido mayor del esperado.** También destacamos el **grado de explicitación del manejo de la**

visualización encontrado, especialmente en torno al manejo de representaciones y al pensamiento geométrico, y las **discusiones o reflexiones en torno a dicho manejo** (por ejemplo en torno a la elección de una representación frente a otra, o sobre cómo nos puede ayudar, o no, el pensamiento geométrico en ciertas situaciones).

A pesar de estos aspectos positivos, **la visualización tiene un papel limitado en el curso y no es una herramienta que esté realmente a disposición de los estudiantes**, como muestra el análisis focalizado en los EVC (sección 4.3.3) y los resultados en torno a la "Cuestión 6" (sección 4.2.4.2). Evidencias de ello son: los mensajes contradictorios emitidos en torno al uso de la visualización; la falta de actividades específicas en las Hojas de Problemas encargados a los estudiantes y la ausencia de la visualización en la evaluación. Todo ello contribuye a la **devaluación del estatus de la visualización**, alejándola de los estudiantes, y hace que no se pueda hablar de una verdadera enseñanza de la visualización en el curso.

Por tanto, en relación al primer sub-objetivo concluimos que:

> **En el curso observado, que sigue estilo de enseñanza DTD, hay uso de la visualización, aunque limitado ya que ésta juega el papel de herramienta didáctica (*se enseña con visualización*) más que de herramienta provechosa en el quehacer matemático (*no se enseña visualización*).**

5.1.1.2 Factores Influyentes en la Enseñanza de la Visualización: Posibilidades y Limitaciones

Los resultados en torno al segundo sub-objetivo ayudan a explicar el papel de la visualización en el curso y a obtener factores influyentes en su enseñanza, que se deben tener en cuenta para la propuesta de mejora. Partiendo del estilo de enseñanza DTD observamos que éste tiene al mismo tiempo características que posibilitan y, con mayor frecuencia, obstaculizan la enseñanza de la visualización.

Posibilidades

De los aspectos positivos de las clases magistrales con estilo DTD señalados por Körner (2004), nuestros datos confirman que:

- *Se presentan las Matemáticas como algo vivo, que se crea en tiempo real*: esto permite acelerar o decelerar el ritmo de explicación según la dificultad de los contenidos, incluyendo visualizaciones cuando se considere oportuno (ver Narrativa, sección 4.2.1).
- *Existe la posibilidad de la interacción con los estudiantes, que es clave para la aparición de la visualización en clase*: el profesor utiliza visualización para aclarar en el momento ideas que los estudiantes no están entendiendo; también ocurre a menudo que las dificultades de los estudiantes obligan al profesor a buscar nuevas explicaciones, a veces más visuales (ver secciones 4.2.1 y 4.2.4.1).
- *Se abre la puerta a comentarios y juicios de valor más personales que pueden ser útiles para los estudiantes*: se han descrito mensajes que se dan en clase sobre cómo

visualizar, por qué puede ser útil y sobre si se aconseja o no su uso (ver sección 4.2.3.2 y 4.2.4.1).

- *Se aprenden Matemáticas viendo a expertos hacerlas y luego imitándolos*: en particular, se pueden aprender aspectos de la visualización observando cómo la maneja el profesor en clase y después, poniéndola en práctica al resolver problemas (por ejemplo, esto se observa en torno a las proyecciones en las tutorías del Grupo 3 y 4, ver sección 4.3.2.1).

Estos aspectos han favorecido episodios donde se explota alguna de las posibilidades que ofrece la visualización. En particular, la Figura 5. 2 muestra los *propósitos* para introducir visualización. Éstos tienen que ver con los verbos ilustrar, complementar, comunicar y comprender; menos frecuentes son los relacionados con la resolución de problemas relativos a demostrar, investigar, descubrir y experimentar (excepto en algunos episodios más experimentales de las clases de prácticas).

VISUALIZACIÓN ÚTIL PARA…	VISUALIZACIÓN UTILIZADA EN CLASE PARA…
	Ayudar a la memoria
Convencer	Convencer de la falsedad o veracidad de algo mediante algún ejemplo concreto
	Justificar un resultado o la necesidad de una demostración
Complementar	Complementar un argumento simbólico
	Comprobar
Comprender	Explicitar ideas o procesos tipo META
	Ayudar a la comprensión
	Dar sentido, concretar
	Relacionar con conocimiento previo
	Motivar una definición
Intuir	Explicar conceptos difíciles (como EVC)
Comunicar	Explicar o guiar manejo de representaciones
	Resolver preguntas de los estudiantes y ver si están entendiendo
	Facilitar la comunicación y la participación de los estudiantes
	Sintetizar información y explicitar relaciones
Salir de un bloqueo	Ayudar a salir de un bloqueo
Investigar y decidir	Investigar y decidir en la resolución de problemas
Experimentar	Hacerse una idea de qué ocurre y razonar
Descubrir	
Demostrar	

Figura 5. 2: Comparación de los propósitos de la visualización detectados en el Marco Conceptual (a la derecha) y los observados en los episodios de clase (a la izquierda).

Limitaciones y obstáculos a la enseñanza de la visualización

Nuestros datos confirman que algunas de las limitaciones del estilo de enseñanza DTD ya señaladas por Bergsten (2007) y Weber (2004) también obstaculizan fuertemente el uso de la visualización en clase:

- *El rol dominante en la comunicación del profesor genera con frecuencia en los estudiantes actitudes pasivas en la interacción*: yendo en detrimento del uso de la visualización (ver narrativas de las secciones 4.1.2.3, 4.2.2 y la reflexión de la 4.2.4.1 sobre la aplicación del Primer Principio de Diseño).

- *Los contenidos presentados como un producto finalizado, da a los estudiantes una idea equivocada sobre la naturaleza de las Matemáticas*: quedando implícitos muchos de los procesos visuales que se usan en el pensamiento matemático (ver Estudio Epistemológico de la sección 4.1.1 o la 4.3.1, para los EVC).
- *Los mensajes, las prácticas y los criterios de evaluación del curso relativizan o no valoran la intuición*: en consecuencia muchos estudiantes indican que no usarían la visualización en un examen por miedo a ser penalizados, a pesar de que es una herramienta que consideran de utilidad para la comprensión (ver la sección 4.2.4.2, sobre la "Cuestión 6" incluida en el Examen y las percepciones de los estudiantes, o las respuestas a las Encuestas del "Problema 7 con Ampliación", en los Anexos).

Por otro lado, desde el campo de la visualización, autores como Eisenberg and Dreyfus (1991), Guzmán (2002), Arcavi (2003) o Souto-Rubio (2009) han señalado razones que dificultan el uso de esta herramienta en clase, tanto por parte de los profesores como de los alumnos, agrupándolos en cuatro categorías diferentes: cognitivas, sociológicas, culturales y afectivas (ver Marco Conceptual, sección 3.2.3.7). Combinando esta clasificación con las características anteriores del estilo de enseñanza DTD, se puede hacer una descripción de los obstáculos para enseñar a visualizar, observados en esta investigación (ver Figura 5. 3).

	OBSTÁCULOS DE LA VISUALIZACIÓN	**OBSTÁCULOS DE LA ENSEÑANZA DE LA VISUALIZACIÓN**
SOCIO-CULTURALES	Tiene un bajo estatus, condicionado por: - Creencias de las Matemáticas ("*No son Matemáticas serias*") motivadas por los obstáculos epistemológicos (debajo). - Es difícil de enseñar debido a obstáculos intrínsecos de la visualización (debajo). - Es subjetiva, al estar sujeta a convenciones y depender del sujeto que la maneja.	Limita su papel en la enseñanza mediante: - Mensajes negativos o contradictorios en torno a su uso. - Ausencia en el currículo y la evaluación. - Falta de práctica los estudiantes, quienes al no estar acostumbrados a usarlo en clase tienen más dificultades para entenderla e incluso les lleva a pensar que utilizar no es lo que se espera de ellos. - Dificultades en la interpretación de imágenes ajenas.
COGNITIVOS	Obstáculos intrínsecos de la visualización: - Cognitivos: necesita de más conocimiento para ser comprendido; es no lineal, pudiendo llegar a ser algunas figuras muy complejas; hay niveles de visualización. - Epistemológicos: algunos ejemplos geométricos son pobres; hay conceptos difíciles de imaginar; puede llevar a engaño o ser una limitación para la abstracción. Diferentes perfiles de preferencia por lo visual	La inclusión de la visualización en clase puede ser causa de nuevas dificultades en los estudiantes, siendo necesaria una mayor cantidad de conocimiento por parte del profesor para enseñarlo sobre: - Diferentes tipos de visualización que atiendan a los diferentes perfiles de estudiantes. - Mecanismos de control de las imágenes. - Lenguaje específico de comunicación. - Dificultades relacionadas con la visualización). - Conocimiento previo necesario para visualizar.
AFECTIVOS	La elección de un individuo del método de resolución o tipo de representación depende de diversos factores: - Los contextos. - La motivación. - Las creencias de autoeficacia. - Las metas.	Análogamente, la decisión de un profesor de enseñar a visualizar está condicionada por muchos factores: - Su motivación para evitar la inercia en el estilo de enseñanza derivado de su perfil visualizador. - Su creencia sobre la importancia de la visualización. - Su autoconfianza y capacidad crítica para dar una visión de la visualización alternativa a la dominante en el curso.

Figura 5. 3: Obstáculos de la visualización y la enseñanza de la visualización observados en el contexto de investigación.

Factores influyentes en la enseñanza de la visualización

De la discusión de las posibilidades y las limitaciones que ofrece el contexto de enseñanza, deducimos factores influyentes en la enseñanza de la visualización que se deben tener en cuenta a la hora de formular una propuesta de mejora. Los agrupamos en torno a las siguientes categorías:

- El contenido: qué se enseña es sustancial e importante para determinar la cantidad, el tipo y la forma de uso de la visualización (así lo muestran los EVC como caso paradigmático, ver Capítulo 4.3).
- Los agentes: quién visualiza también es esencial, influyendo su grado de experiencia, sus creencias sobre la visualización (y las Matemáticas) y su perfil visualizador. Este último se muestra como un factor clave en la forma de uso de la visualización (como se observó en las tutorías del" Problema 7 con Ampliación", ver sección 4.3.2).
- El medio: con qué se visualiza afecta a su dificultad de interpretación, manipulación o comunicación (algunos episodios de clase muestran que, para la visualización geométrica en el espacio, es más fácil disponer de un modelo 3D que representar gráficamente en la pizarra, ver por ejemplo Figura 4. 95).
- El propósito y el estilo docente: para qué se enseña afecta al cómo se visualiza en clase. No aparecen los mismos tipos de visualización cuando se explican las Matemáticas como un producto estático –por ejemplo cuando se enuncia, en un estilo lógico-estructural, y demuestra un teorema, procedimentalmente– que cuando se intenta dar sentido a un concepto o se construye un resultado de forma constructiva en un estilo más semántico. Del mismo modo no aparece el mismo tipo de visualización en las clases teóricas que en las prácticas (ver las narrativas de las secciones 4.1.2.3 y 4.2.1).
- La cultura y las prácticas de clase: cómo y dónde se enseña afecta al uso de la visualización. De acuerdo con Presmeg (1999, 2006b), se ha observado en este estudio que las normas de clase que fomentan la participación, que admiten varias respuestas como válidas y que enfatizan no sólo los resultados sino también el proceso fomentan el uso de la visualización (ver la aplicación del Primer Principio de Diseño , en la sección 4.2.4.1). En contraste, este uso se ve reducido ante un índice bajo de participación y una penalización por dar respuestas incorrectas (ver 4.1.2.3). De acuerdo Cobb y Yackel (1996), hemos observado que éstas prácticas de clase se transmiten a los estudiantes por medio de acciones (como la evaluación, ver sección 4.2.4.2) y mensajes específicos (sección 4.2.3.2) y están fuertemente condicionadas por la visión institucional de la visualización (Estudio Institucional, sección 4.1.2) y las creencias individuales (sección 4.2.3.2).

Por tanto, en relación al segundo sub-objetivo se puede concluir lo siguiente:

> **La visualización es situada**, es decir, aparece a lo largo del curso de forma transversal, pero no uniforme, variando según la influencia de diversos aspectos y, en general, del momento y del contexto de enseñanza.

5.1.2 Sobre la Propuesta de Mejora de la Enseñanza de la Visualización

Una vez caracterizada la enseñanza de la visualización en el curso observado, pasamos a discutir el segundo objetivo:

2. *Realizar una propuesta de mejora de la enseñanza de la visualización del curso observado a través de la formulación de principios de diseño para los materiales y las estrategias de enseñanza.*

Los resultados del objetivo anterior ponen de manifiesto una inestabilidad en torno al uso de la visualización que se convierte en un círculo vicioso para su enseñanza: es una herramienta didáctica útil para la comprensión, pero se usa de forma limitada debido a diversos obstáculos (algunos intrínsecos a la propia visualización, otros relacionados con su bajo estatus en el curso). Esto nos lleva a preguntarnos: ¿vale realmente la pena insistir en la enseñanza de la visualización a pesar de esos obstáculos? Respondemos afirmativamente a esta pregunta, respaldados por los resultados obtenidos que confirman nuestros supuestos de partida y, en particular, por los argumentos para la defensa de la enseñanza de la visualización obtenidos con el objetivo 2.1, a través del análisis del papel que juega la visualización en la disciplina del AL desde diversos puntos de vista: epistemológico, cognitivo, institucional y afectivo. **Los resultados muestran que la visualización es una herramienta necesaria para la comprensión que, se quiera o no, aparece en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas Avanzadas. Por tanto la pregunta que se debe plantear no es si se debe o no insistir en la enseñanza de la visualización, sino cómo manejar la visualización en la enseñanza.** La respuesta a esta nueva pregunta nos conduce de nuevo al punto de partida de esta investigación: prestando atención explícita a la visualización en clase y evitando dejar toda la responsabilidad de aprender a visualizar a los estudiantes, pues hacerlo tiene consecuencias nefastas para su comprensión; esto es, habría que "**enseñar a visualizar**". Las respuestas al objetivo 2.2 ofrecen distintas vías para ello, constituyendo otra de las aportaciones significativas de este trabajo: la propuesta de mejora.

2.1 *Comprender desde diversos puntos de vista (epistemológico, institucional, cognitivo y afectivo) el rol de la visualización en la comprensión (de la disciplina del AL, en general, y de un concepto, en particular) obteniendo ideas innovadoras de mejora.*

2.2 *Realizar experimentaciones en torno a esas ideas innovadoras y constatar sus efectos mediante la formulación de principios de diseño de estrategias de enseñanza y materiales para la enseñanza de la visualización.*

5.1.2.1 Relevancia de la Visualización para la Comprensión del AL

Desde un punto de vista epistemológico

El análisis epistemológico desarrollado en esta investigación (en las secciones 3.2.3.5 y 4.1.1 a nivel más global y en la 4.3.1 para los EVC) pone de manifiesto dos posturas complementarias respecto a la visualización, en general, y al uso de la Geometría, en particular: por un lado ésta se presenta como una fuente de experimentación, inspiración e intuición y en definitiva como la base de las ciencias y las Matemáticas; por otro, aparece como un primer paso, que hay que superar, para poder llegar a razonamientos más generales (ver sección 4.1.1.2). Ambas posturas han convivido históricamente hasta que finalmente la segunda se impone sobre la primera, relegando la visualización a un segundo plano (Davis, 1993; Guzmán, 1996). Sin embargo, esta visión olvida la importancia que la visualización tuvo y continúa teniendo en el desarrollo de las ideas matemáticas, tanto dentro de la Geometría como fuera (Bråting & Pejlare, 2008; Burton, 2004; Guzmán, 1996; Nardi, 2008), generando obstáculos epistemológicos que dificultan a los estudiantes la comprensión de los conceptos (como ocurre si sólo se explica la definición formal de los EVC, ver sección 4.3.1).

En el caso del desarrollo del AL, es verdad que la noción abstracta de Espacio Vectorial no deriva directamente de la Geometría, pero en su construcción juega un papel esencial su coordinación con el pensamiento algebraico. Otros elementos clave en el avance de esta disciplina están relacionados con la visualización: el establecimiento de una notación adecuada y el desarrollo de la capacidad de reconocer el mismo objeto bajo diferentes aspectos. En el caso concreto de los EVC, el estudio histórico y epistemológico del desarrollo del concepto (sección 4.3.1) ha evidenciado la importancia de la visualización para dar sentido a la definición formal y en general, para construir un esquema conceptual rico y bien articulado que posibilite el establecimiento de conexiones con conocimiento previo y futuro. En particular nos ha llevado a reconocer el valor de la representación gráfica para conectar diversidad de concepciones, idea que se explotó posteriormente con éxito en la experimentación.

> **Por tanto, desde un punto de vista epistemológico, la omisión de la visualización en la enseñanza da lugar a obstáculos epistemológicos en los estudiantes, al jugar ésta un papel fundamental en la construcción de los conceptos matemáticos y, en general, en la actividad matemática.**

Desde un punto de vista institucional

La visión actual de las Matemáticas está muy influenciada por su evolución histórica, de modo que en las instituciones actualmente domina la preocupación por el formalismo y el rigor frente a la búsqueda de conexión con la intuición y el uso de la visualización. Así ocurre en el curso observado, cuya visión institucional del papel de la visualización en el curso se ha explicitado a través del análisis de la Guía Docente, de los materiales del curso (Libro de Texto y Hojas de Problemas) y de la observación de las clases (ver Estudio Institucional, sección 4.1.2). El resultado es que, en términos generales (según la Guía Docente), el curso relega la visualización a un papel secundario, subordinado al pensamiento algebraico. Los registros dominantes en los materiales analizados son el simbólico (para enunciar definiciones y demostrar teoremas) y de tablas (para los ejemplos y las resolución de problemas). En las explicaciones de las clases hay mayor diversidad y riqueza de visualizaciones, pero después no se pide a los estudiantes que la practiquen (ver sección 4.3.3.2) ni se incluye en la evaluación (ver secciones 4.2.1.5 y 4.2.4.2). Por tanto, institucionalmente, la visualización tiene un papel pobre dentro del curso.

Esta visión perjudica fuertemente a los estudiantes, quienes tratan de adaptarse a ella imitando y repitiendo las pautas de actuación que observan, incluso aunque éstas vayan en contra de sus propias necesidades. En esta investigación hemos alterado las prácticas y la cultura de clase tradicionales en favor de la visualización, obteniendo respuestas positivas de los estudiantes, quienes se sentían más relajados (sobre todo los más visualizadores) y con una mejor predisposición para la comprensión (ver secciones 4.2.4.2 y 4.3.2). El análisis de 20 libros de texto de AL (escogidos de acuerdo a tres criterios diferentes) también muestra que otras alternativas, más afines con la idea de enseñanza de la visualización, son posibles (ver sección 4.1.2.3). En particular, el libro del autor chino Lin (2005) muestra que una aproximación evolutiva y más visual del AL (en la línea de la que Harel presentó en 1989) no está reñida con un nivel elevado de abstracción, en contra de algunas de las críticas que esta aproximación ha recibido (Gueudet-Chartier, 2004; Harel, 1999).

> **Por tanto, institucionalmente existe la posibilidad de elegir una aproximación más favorable para la enseñanza de la visualización, que tenga en cuenta las necesidades de los estudiantes y que no está reñida con la abstracción o el formalismo.**

Desde un punto de vista cognitivo

Las teorías en torno al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) (Artigue et al., 2007; Tall, 1991) y a la transición de educación secundaria a terciaria (Gueudet-Chartier, 2008) surgen para explicar las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan por primera vez a las Matemáticas Avanzadas que se enseñan en la Universidad (ver sección 3.2.1.1, 3.2.1.2 y en particular la Figura 3. 2 y la Figura 3. 3). Al comparar las habilidades del experto con las del aprendiz surge la cuestión de la importancia de la *flexibilidad cognitiva*, que permite al primero pasar coherentemente de un modo de representación a otro, de un tipo de lenguaje a otro, de una concepción matemática a otra, de un punto de vista a otro, etcétera (ver sección 3.2.1.2). Esta cuestión toma más fuerza dentro del campo de la didáctica del AL, pues la falta de flexibilidad es una de las principales causas de problemas de comprensión de los estudiantes en esta disciplina (ver Teorías Locales, Capítulo 3.3).

Se han detectado dificultades de los estudiantes en AL relacionadas con la falta de visualización a través de la Observación Participante desarrollada en la Fase II (ver sección 4.2.4.2, Figura 4. 45). La focalización en algunos conceptos como las Aplicaciones Lineales o los EVC ha permitido profundizar en la relación entre visualización y comprensión, confirmando su existencia. Por una parte, el Cuestionario del Estudio Exploratorio (ver sección 4.1.3) evidencia la relación entre falta de coordinación de registros y modos de pensamiento y una comprensión deficiente de los conceptos matemáticos (en ese caso, de la Aplicación Lineal). De otra parte, el análisis de los EVC como concepto matemático (sección 4.3.1) pone de manifiesto que la falta de coordinación entre sus diferentes concepciones o puntos de vista imposibilita la construcción de un esquema conceptual rico, impidiendo una comprensión completa y el establecimiento de conexiones con conocimiento en el horizonte. Estos resultados son coherentes con investigaciones que enfatizan el papel de la visualización en la comprensión realizadas en los campos del PMA (Tall, 1991), la semiótica (Duval, 1999a, 1999b; Hitt, 2002, 2003) y la didáctica del Álgebra Lineal (Alves-Dias, 2007; Artigue et al., 2000; Aydin, 2009; Dorier & Sierpinska, 2001; Dreyfus et al., 1999; Gueudet-Chartier, 2000, 2004, 2006; Hillel, 2000). Así, **una enseñanza**

que no presta atención a este tipo de dificultades relacionadas es una enseñanza que no potencia la comprensión.

Los resultados de esta investigación muestran que la visualización surge en clase, independientemente de la visión institucional o de los propósitos personales del profesor. Esto se debe a que, como se ha señalado, desde un punto de vista epistemológico la visualización forma parte de las Matemáticas y, en particular, del AL. Pero sobre todo se debe a la *interacción* con los estudiantes, que es una de las principales causas de aparición de visualización en clase (ver resultados de la Fase II, Capítulo 4.2). Aunque no ha sido objeto principal de estudio, existen diversos perfiles cognitivos de estudiantes si se toma en cuenta su nivel de pensamiento y su preferencia por lo visual (Souto-Rubio, 2009). Esto tiene como consecuencia que a menudo, como profesores, nos veamos obligados a incluir argumentos visuales para responder a una duda determinada o para convencer de la veracidad de un determinado argumento. Ejemplos como el episodio de pensamiento geométrico en torno al *Problema 7.7* (ver Semana 6, sección 4.2.1.2) o la mediación realizada para el "Problema 7 con Ampliación" (ver sección 4.3.2) muestran que la inclusión de la visualización en la enseñanza es más eficaz en la medida en que se haya realizado una reflexión previa sobre ella, principalmente porque ésta es compleja desde el punto de vista cognitivo y requiere una gran cantidad de conocimiento (ver sección 4.3.3.1 y Figura 5. 3). También hay estudiantes más visualizadores que recurren de forma natural a argumentos visuales como medio para razonar. Si no se dota a estos estudiantes de mecanismos de control sobre este tipo de argumentos, es cuestión de azar que los utilicen con éxito en su actividad matemática. Así ocurría por ejemplo con Juan, del Grupo 2 (ver sección 4.3.2.1). Por tanto, desde el punto de vista cognitivo, la enseñanza de la visualización no sólo está suficientemente justificada sino que además es necesaria. De lo contrario, no se está atendiendo a dificultades relacionadas con la visualización y no se asegura una respuesta adecuada a su aparición en clase que, debido a la diversidad de perfiles de preferencia por lo visual, puede ocurrir en cualquier momento.

> Por consiguiente, este trabajo aporta evidencias concretas de **la complejidad cognitiva de la visualización** (ver Figura 5. 3) poniendo de manifiesto la importancia de presentar atención explícita en la enseñanza a las **dificultades relacionadas con la falta de flexibilidad cognitiva (en particular, con la falta del dominio de la visualización) y a la diversidad de perfiles cognitivos.**

Desde un punto de vista afectivo

Finalmente, aunque no de forma central, se han estudiado las percepciones de los estudiantes en torno al uso de la visualización (ver sección 4.2.4.2). Al hablar en el Marco Conceptual de la visualización como "*imaginar, como ver con el ojo de la mente*" (sección 3.2.3.4) se señala la importancia del papel de las imágenes visuales en relación a la memoria y la motivación. Entre los datos recogidos en esta investigación hay referencias a la capacidad de las imágenes visuales para incorporar a largo plazo ideas en la mente, provenientes tanto de los profesores como de los alumnos: por ejemplo, G. lo expresa así en torno a la explicación teórica sobre la Desigualdad de Cauchy-Schwartz (sección 4.2.1.4) o también se observa en la carta de David donde un año después aún recuerda la metáfora de los tornillos en relación a los EVC (ver Anexos).

Por otro lado, se observan relaciones afectivas de los estudiantes con el uso de la visualización (Gómez-Chacón, 2012b). En las clases de prácticas se observó en diversas ocasiones rechazo hacia los problemas más formales (ver sección 4.2.4.2). Es frecuente que los estudiantes afirmen que no entienden algo si no son capaces de imaginárselo (como ocurrió con los EVC, ver sección 4.3.1.1 y 4.3.2.1). Estas relaciones afectivas se presencian de forma diferente según los perfiles de los que se habla en el apartado anterior. Así, por ejemplo hay estudiantes que dan muestras de incomodidad o incluso sentimientos de rechazo cuando visualizan: Yaser, del Grupo 2, cuando se le pide que razone visualmente se excusa diciendo "*es que yo eso de verlo visualmente, no...*" (ver sección 4.3.2.2). Sin embargo hay otros que afirman sentirse bien cuando lo hacen: David, del Grupo 1, explica que cuando ve algo piensa "*qué rápido, sale fácil y lo entiendo y ¡guay!*" (ver Anexos).

> Por tanto, desde este punto de vista más afectivo, enseñar a visualizar es importante porque puede aumentar la motivación y da respuesta a necesidades y preferencias manifestadas por los estudiantes.

5.1.2.2 Consecuencias de la Experimentación

El análisis anterior aporta argumentos e ideas para una mejora de la enseñanza de la visualización. Éstas se contrastaron con los datos empíricos obtenidos mediante una experimentación continuada a lo largo del curso, de la que en esta Memoria se han destacado ciertos episodios como: el "*Problema 7 con Ampliación*" (ver sección 4.3.2), la "*Tutoría Final*" (ver sección 4.2.1.5) o la "*Cuestión 6*" en el Examen Final (ver sección 4.2.4.2).

Propuesta de mejora para el curso observado

Tres principios de diseño, formulados desde la práctica pero con una fundamentación teórica fuerte (ver sección 4.1.4), han guiado dicha experimentación y han facilitado la reflexión en torno sus efectos (ver sección 4.2.5). En general la aplicación de los tres principios de diseño sirvió para mejorar la enseñanza de la visualización dando respuesta a algunas dificultades de los estudiantes (como las debidas a deficiencias en el manejo del registro gráfico y al rechazo de los métodos visuales) y produciendo: (1) cambios de cultura de clase que fomenten la aparición de los métodos visuales y permiten que los estudiantes se acostumbren a ellos; (2) una explicitación y un entrenamiento adecuados que les ayuden a controlar las dificultades de la visualización; (3) una legitimación de la visualización que muestre a los estudiantes la validez de los métodos visuales y les ayude a discernir cuándo es conveniente usarlos.

La revisión tras el análisis de los datos recogidos da lugar a una **propuesta de mejora de las estrategias para la enseñanza de la visualización adecuada a las posibilidades y limitaciones del curso observado** (se resume en la tabla de la Figura 5. 4).

PRINCIPIOS	ACCIONES	ADECUACIÓN AL CONTEXTO
1. Fomento de una cultura de clase más participativo: *Para favorecer la construcción individual y colectiva de significados se deben buscar otras formas diferentes de organizar la clase que aumenten la interacción social y la participación (como son el trabajo cooperativo y el debate científico), pues así se acercan las prácticas y el lenguaje del matemático experto a los estudiantes y en particular se posibilita la comunicación con y sobre la visualización*	- Haciendo una buena anticipación (métodos de resolución, dificultades de los estudiantes).	- Se mejora la mediación, se reducen obstáculos afectivos (da seguridad) y cognitivos (da más conocimiento), y se facilita el aprovechamiento del tiempo.
	- Fomentando la búsqueda de diversidad de métodos (también visuales, intuitivos o incorrectos) y la reflexión sobre ellos. - Aceptando diversidad de respuestas, estableciendo conexiones entre ellas y formalizando bien las más intuitivas. - Comprobando y dando sentido al final.	- Se atiende a la diversidad de perfiles y se muestran prácticas deseables (que los estudiantes luego aprenden a imitar).
	- Promoviendo y estando presente en la interacción con los estudiantes, obligándoles a explicitar sus pensamientos y manejo de la visualización.	- Se aprovechan las oportunidades para enseñar a visualizar que ofrece la participación.
2. Manejo explícito de la visualización: *Para favorecer la coordinación y la conexión de la diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento característicos del AL, éstos se deben utilizar y manejar flexiblemente comunicando explícitamente las relaciones existentes entre ellos; pues así se favorece su incorporación en la mente de los estudiantes facilitando la comprensión de la disciplina*	- Aprovechando la presentación de nuevos contenidos para proveer múltiples representaciones y mostrar cómo pensar con cada una de ellas. - Comparando visualizaciones (para ello son útiles las tablas y las metáforas), distinguiendo sus elementos y resaltando las relaciones relevantes representadas. - Conociendo las características de cada modelo de visualización y explotando sus posibilidades comunicativas.	- Se tienen en cuenta los procesos de visualización y se aprovechan las características del estilo DTD para explicarlas y potenciarlas.
	- Planteando actividades específicas de visualización (ver características en la Figura 5. 5).	- Se evita la inercia y la tendencia natural a usar el mismo modo de pensamiento. - Se reducen obstáculos socioculturales, (al legitimar el uso de la visualización) y cognitivos (al practicarla más).
	- Desarrollando un lenguaje específico que permita hablar, comprender, compartir y reificar conocimiento sobre la visualización.	- Responde a obstáculos cognitivos, pero da lugar a la paradoja de la comunicación, - Facilita el aprovechamiento del tiempo.
	- Teniendo en cuenta que las respuestas de los estudiantes pueden ser pobres en la explicitación del manejo de la visualización.	- Se tienen en cuenta las dificultades de los estudiantes y da oportunidad de aclarar obstáculos cognitivos.
3. Legitimación de la visualización: *Para lograr que la visualización sea una herramienta válida para razonar y que sirva de camino a la intuición, ésta debe legitimarse adecuadamente (cuidando mensajes y acciones en torno a ella), ya que permite el acercamiento a los estudiantes posibilitando su posterior desarrollo.*	- Planteando una reflexión colectiva sobre la visión institucional de la visualización (que incluya las actividades y la evaluación). - Planteando una reflexión individual de los docentes que refuerce sus creencias positivas en torno al uso de la visualización.	- Se atiende a los obstáculos socioculturales y a la paradoja del status de la visualización.
	- Desarrollando anticipadamente el conocimiento necesario para su adecuado manejo y comprensión (tanto en los profesores y estudiantes) para evitar un manejo "naïf" de la visualización que no reconozca su complejidad.	- Se atiende a las demandas cognitivas de la visualización (y se previene la falta de conocimiento de los estudiantes) y a la paradoja de la sencillez de la visualización.

Figura 5. 4: Propuesta de mejora de las estrategias para la "enseñanza de la visualización" del curso observado, elaborada a partir de la formulación, aplicación (a través de acciones) y revisión (en relación al contexto) de tres principios de diseño.

La reflexión en torno a la experimentación del "Problema 7 con Ampliación" ha permitido avanzar hacia algunas de los **elementos y las características que se deben tener en cuenta al diseñar una actividad específica de visualización potenciadora de comprensión**. Éstos se resumen en la tabla de la Figura 5. 5 y se ejemplifican con características incluidas en este problema

ELEMENTOS	CARACTERÍSTICAS	EJEMPLO DE APLICACIÓN
Anticipación	Que se base en un estudio profundo de los contenidos matemáticos y los modelos visuales involucrados (hace falta un Conocimiento Matemático del Profesor completo).	Se ha realizado un análisis de los EVC como concepto matemático que ha permitido precisar el Conocimiento Matemático del Profesor asociado.
Objetivos específicos	Que involucren aspectos de la visualización como PRODUCTO o HABILIDAD: - <u>Más operativos</u>: interpretar, crear, transformar representaciones; aprender a coordinar dos representaciones, a elegir la representación adecuada, etc. - <u>Más conceptuales</u>: construir un nuevo punto de vista de un concepto, comprenderlo mejor al establecer una nueva conexión en el esquema mental asociado, reflexionar sobre el manejo de la visualización (mecanismos de control), etc.	Practicar las representación gráficas, construir un diagrama y entenderlo geométricamente, conectar diversidad de representaciones y concepciones (proyecciones, EVC), imaginar y entender un isomorfismo, valorar la notación en Matemáticas, aprender a profundizar y visualizar problemas después de resolverlos.
Metodología	Que combine fases consecutivas de construcción de significado (inspirada en las Teorías de Mediación Semiótica): - <u>Individual</u>: en el trabajo inicial (de familiarización con el problema) o final (de META reflexión). - <u>Colectivo</u>: en el trabajo de desarrollo (trabajo en parejas o en grupos) y de formalización del problema (puestas en común).	1) Trabajo en grupos (de 4 o 5). 2) Desarrollo individual y en grupo; redacción de la respuesta escrita. 3) Puesta en común en las tutorías por grupos. 4) Reflexión individual (faltó).
Enunciado	Que tenga en cuenta las interpretaciones de los estudiantes y contemple el uso de los modelos de visualización (teniendo en cuenta su aspecto de PRODUCTO): - <u>Explícitamente</u>: incluyendo o pidiendo representaciones en registros concretos, diagramas, ilustraciones, metáforas, etc. - <u>Implícitamente</u>: dando datos suficientes para conectar con otro modelo de visualización o admitiendo diversidad de métodos de resolución (entre ellos uno visual).	El enunciado está formulado en lenguaje natural, el registro simbólico y de tablas; pero además se pide representar gráficamente, explicar algebraica y geométricamente (dando pistas explícitas para ello), imaginar espacialmente y construir un diagrama.
Mediación	Guiada por un árbol de problema que tenga en cuenta: - <u>El contenido matemático y de visualización</u>: conceptos y niveles de visualización necesarios para entender el problema. - <u>Los objetivos visuales de la actividad</u>: preguntas que inciten a cambiar de modo de representación o de punto de vista, a la reflexión sobre el uso de cierta visualización, etc. - <u>Los estudiantes</u>: su conocimiento previo, sus diferencias individuales (de preferencia por lo visual y de carácter a la hora de participar).	El árbol de problema incluye preguntas para ver si se comprenden los conceptos necesarios; propuestas de tareas de visualización más sencillas, juegos de ramas de pensamiento algebraico y geométrico; y ramas que tienen en cuenta los posibles métodos y dificultades de los estudiantes.

Figura 5. 5: Elementos y características recomendadas para actividades específicas de visualización que potencien la comprensión de los estudiantes, es decir, actividades para "enseñar a visualizar".

Paradojas en torno a la enseñanza de la visualización

La experimentación en torno a los principios de diseño no ha estado exenta de dificultades. En este estudio se aportan datos empíricos a nivel universitario que ilustran las paradojas que surgieron:

- *Paradoja en torno a la participación de los estudiantes:* La participación fomenta la enseñanza de la visualización pero al mismo tiempo la dificulta (pues los estudiantes no logran ser tan explícitos con sus manejos de representaciones como el profesor). Esto lo observamos al combinar los resultados en torno a la aplicación de los dos primeros principios de diseño (sección 4.2.4.1).
- *Paradoja en torno a la sencillez de la visualización:* una vez entendida se hace evidente, pero es cognitivamente difícil. Esto lleva a que los profesores a veces confíen ciegamente en su poder y no la expliquen suficientemente, argumentando que es obvia (como muestran algunos mensajes de G). En cambio, se observa que la visualización es más difícil para los estudiantes de lo que los profesores pensamos a priori (ver Tutoría Final, sección 4.2.1.5, los estudiantes tardaron más de lo previsto) siendo a veces incapaces de utilizarla adecuadamente al no terminar de entenderla (ver resultados de las tutorías sobre el "Problema 7 con Ampliación" en la sección 4.3.2.1).
- *Paradoja en torno a la comunicación de la visualización:* por una parte, las imágenes tienen un fuerte poder de comunicación y de explicitación de relaciones y patrones ocultos; y de otra, para que ese poder se haga efectivo es preciso comprender la imagen, pero su explicación a alguien que no esté familiarizada con ella, puede ser una tarea difícil y que requiere tiempo (Souto-Rubio, 2012). Para ello, puede resultar de ayuda la creación de un lenguaje específico (basado en las Matemáticas o en las investigaciones en Educación Matemática), pero éste a su vez puede ser fuente de nuevas dificultades. Así ocurre con el ejemplo de la aplicación "*coord*." que, aunque es útil en las clases de G. se evita en el libro para no dificultar más la lectura a los estudiantes (ver sección 4.2.3.1, modelo REPR). Otro ejemplo de este lenguaje es la idea de MACRO y MICRO (De Vleeschouwer & Gueudet-Chartier, 2011).
- *Paradoja en torno a la explicitación:* explicitar el manejo de una imagen es necesario para ayudar a la comprensión, pero si se explicita demasiado se está privando a los estudiantes de descubrirlo por sí mismos, obstaculizando su aprendizaje al introducir en sus mentes conexiones automatizadas sobre las que no ha habido reflexión. Por ejemplo así ocurre con la idea intuitiva de los subespacios como algo que está encerrado en sí mismo (ver sección 4.2.1.1).
- *Paradoja en torno a la legitimación de la visualización:* se quiere usar la visualización porque es importante en las Matemáticas y ayuda a la comprensión, pero después se hace lo contrario debido al miedo a generar otros obstáculos (Duval, 2006, p. 127). Estas tensiones se ponen de manifiesto en torno a la aplicación del Tercer Principio de Diseño (sección 4.2.4.1). En particular, surge una paradoja con la evaluación de la visualización. Esta acción, necesaria para legitimar su uso, a su vez requiere de una legitimación previa, pues si no resulta perjudicial para los estudiantes (ver resultados de la "Cuestión 6", sección 4.2.4.2).

Por tanto, en relación al segundo sub-objetivo concluimos

Es posible mejorar la enseñanza de la visualización del curso mediante las acciones derivadas de la aplicación de los tres principios de diseño y el diseño

de actividades de visualización con las características descritas, pero ésta es una cuestión compleja que plantea paradojas aún por resolver.

5.1.3 Sobre el Proceso de Investigación

Antes de concluir la respuesta a nuestra pregunta de investigación, reflexionamos sobre las aportaciones teóricas y metodológicas de la investigación.

5.1.3.1 Relevancia de la Teoría

A nivel teórico, **la caracterización que hacemos en este trabajo de los diferentes modelos de visualización es una aportación novedosa.**

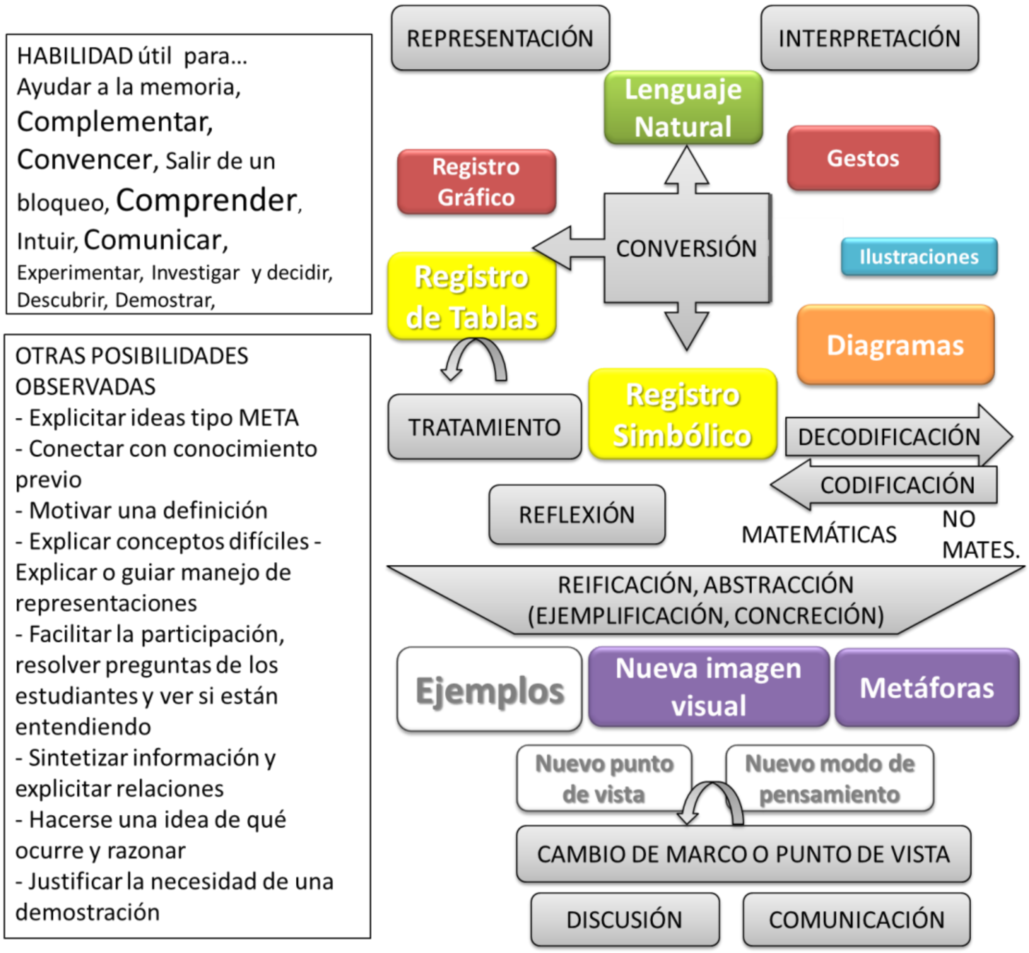


Figura 5. 6: Reconceptualización de la idea de visualización, adaptada al contexto del AL, realizada a partir de los resultados de esta investigación. Incluye la distinción de Arcavi (2003) de tres aspectos importantes de la visualización: productos (cuyo fondo se ha coloreado de acuerdo con el modelo de visualización correspondiente); procesos y habilidades (se han coloreado en gris, pues pueden aparecer asociados a diversos modelos de representación). El tamaño de letra ayuda a caracterizar el uso de la visualización observado en el curso, permitiendo resaltar los aspectos de la visualización más presentes (letras más grandes) y más ausentes (letras más pequeñas).

Primero, en el *área de la visualización*, **permite extender la riqueza que esta noción tiene en estudios realizados en niveles de enseñanza obligatoria** (Arcavi, 2003; Presmeg, 2006a; Rivera, 2011) **a nivel universitario**, al incluir la complejidad propia de las Matemáticas Avanzadas (Artigue et al., 2007; Holton et al., 2001; Tall, 1991). También proporciona evidencias de que la visualización es posible en disciplinas no puramente geométricas (Whiteley, 2004). Inicialmente se consideraron seis modelos, pero el último –visualización como modo de comunicación– resultó más un propósito que un modelo en sí mismo (ver sección 4.2.3.1, categoría COM). También hubo que reformular la descripción de pensamiento diagramático a favor de la definición de Guzmán (1996). Se identificaba demasiado con el manejo de representaciones si se consideraba únicamente la perspectiva de Dörfler (ver sección 4.2.3.1, modelo DIAG). La conceptualización de la visualización elaborada en el Marco Conceptual (sintetizada en la Figura 3. 43) ha sido clave en la identificación de esos modelos y en general en la construcción de la noción de la visualización. En este sentido, la distinción de aspectos –producto, proceso y habilidad– realizada por Arcavi (2003) ha resultado especialmente útil. Finalmente, el contraste con los resultados obtenidos en torno a los modelos observados y sus formas de uso proporciona una versión revisada y más adaptada al contexto del AL, de dicha conceptualización (Figura 5. 6).

Figura 5. 7: Revisión del esquema de las investigaciones en AL sobre visualización, teniendo en cuenta los modelos de visualización encontrados en esta investigación (los colores se corresponden con los de la Figura 5. 1).

Segundo, en la *didáctica del Álgebra Lineal*, la caracterización de modelos de visualización obtenida ofrece patrones y conocimiento útil para todo aquel que pretenda enseñar visualización en esta disciplina desde una perspectiva más amplia que cualquiera de las expuestas en las Teorías Globales sobre flexibilidad cognitiva: representaciones (Artigue et al., 2000, pp. 247–252, sobre el trabajo de Pavlopoulou; Duval, 1999a), lenguajes (Hillel, 2000), modos de pensamiento (Dörfler, 2005, 2007; Gueudet-Chartier, 2000, 2002, 2004; Sierpinska, 2000) y puntos de vista (Alves-Dias, 2007). En la Figura 5. 7, se muestra que **los modelos descritos son compatibles con dichas investigaciones y podrían ser integrados de forma coherente**.

Tercero, en el ámbito de la *investigación a nivel universitario* esta caracterización de la visualización ha ayudado notablemente a explicitar el conocimiento matemático (Ball et al., 2008) que el profesor necesita para enseñar a visualizar (en concreto los EVC, ver sección 4.3.3.1). Esto ha sido posible gracias a la compatibilidad de estos marcos sobre conocimiento matemático con las teorías sobre PMA, y en particular con la idea de esquema conceptual, dando como resultado contribuciones significativas para la mejora de la enseñanza de la visualización de este concepto: el mapa conceptual con las diferentes concepciones (ver Figura 4. 105) y la tabla con los características de los diversos modelos (ver sección 4.3.3.3). Por tanto, destacamos como una aportación teórica importante de esta investigación la conveniencia de usar los marcos de Conocimiento Matemático del Profesor como herramienta para la innovación y la mejora de la docencia a nivel universitario.

5.1.3.2 Adecuación y Revisión de la Metodología

La *investigación de desarrollo* ha ofrecido una respuesta eficaz y operativa para la investigación de la pregunta tanto desde un punto de vista teórico como práctico. La metodología DR, con su división en Base filosófica, Teorías Globales y Teorías Locales, ha posibilitado la elaboración de un Marco Conceptual amplio y bajo una articulación coherente, resultando clave en el proceso de desarrollo teórico. El desarrollo práctico también se ha visto favorecido por la distinción de experimento pensado y práctico que plantea el DR. Sin embargo, ha estado algo más eclipsado que el teórico al estar vehiculado a las demandas del contexto. Para iteraciones futuras o estudios con estrategias similares que ya tengan un conocimiento profundo sobre el contexto (y su enseñanza de la visualización) y quieran profundizar más en algún aspecto concreto de los aquí precisados, se recomienda valorar la posibilidad de realizar experimentaciones más definidas y controladas definiendo a priori el comienzo y el final. También se podría contemplar la incorporación de la variable del ordenador como medio para producir nuevos modelos de visualización y estudiar si éste ayuda a evitar algunos de los obstáculos descritos (es difícil de realizar y comunicar), en particular los derivados de la falta de visión espacial (Gutiérrez, 1996; M. Sinclair et al., 2011).

La elección del *contexto* del estudio, *el curso observado*, también ha resultado favorable, presentando características que facilitan la generalización (ver Capítulo 2.1). En particular destacamos como aspecto enriquecedor la diversidad de profesores observados. En cualquier caso, para ampliar el alcance de la investigación se deberían estudiar más cursos de AL, con un número mayor de estudiantes, y ver si coinciden los modelos de visualización, los obstáculos detectados y las acciones en torno a ellos.

La elección de la *disciplina del Álgebra Lineal,* con su diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento, ha ofrecido un medio rico e interesante desde el punto de vista de la visualización, adecuado para un primer acercamiento al objeto de estudio como el efectuado en nuestra investigación. Pero, dado que ha condicionado los modelos de enseñanza de la visualización resultantes, consideramos que para lograr una verdadera comprensión de la enseñanza de la visualización a nivel universitario, convendría realizar investigaciones similares en otras disciplinas y contrastar los resultados obtenidos.

El desglose en *objetivos específicos* ha propiciado una secuencia de actuación –describir, explicar y prescribir– que ha contribuido positivamente en generar conocimiento para responder la respuesta la pregunta de investigación.

La *estrategia de investigación* es una de las aportaciones fundamentales de este trabajo al facilitar el acercamiento y la adaptación progresiva del problema al contexto. Su método resulta útil en investigaciones sobre de la enseñanza de la visualización a nivel universitario. Destacamos como aspectos positivos: el tipo de estudio previo a la experimentación realizado en la Fase I; la Observación Participante prolongada en el tiempo (incluyendo períodos de evaluación) como método de investigación para la Fase II de experimentación; la combinación de la perspectiva global con la focalización en un concepto de la Fase III; el uso de instrumentos de investigación que permiten incluir la visualización de forma explícita (como "*El póster*" y "*El árbol del problema*"); la elaboración de productos útiles para la enseñanza de la visualización (como el "*Eje cronológico*", el "*Problema 7 con Ampliación*" o el desglose del Conocimiento Matemático del Profesor necesario para visualizar los EVC).

La abundancia de *datos recogidos* ha favorecido la triangulación de los datos y la fiabilidad interna de los resultados, pero ha dificultado considerablemente el análisis. Éste se ha realizado en base a los objetivos de la investigación. En futuras iteraciones o estudios similares con conocimiento del contexto de investigación se podría focalizar más desde el principio (por ejemplo fijando un concepto o modelo de visualización concreto). Algunos de los datos recogidos también se podrían analizar con mayor profundidad o desde otros puntos de vista para responder a objetivos diferentes a los de este estudio:

- *Análisis de libros de texto*: para profundizar en la relación entre las creencias de las Matemáticas y el uso de la visualización se podría no sólo describir el uso de las imágenes sino también intentar relacionarla con la perspectiva educativa descrita en el prefacio de cada uno.
- *Observación de clases*: para comparar con otros contextos se podría hacer un estudio más cuantitativo de los datos; también se podría elegir otro concepto (como la Aplicación Lineal o los Espacios Duales) u otro foco de atención (una unidad didáctica, un modelo concreto de visualización); para profundizar en la relación entre la visualización y el *Meta-level* (Dorier et al., 2000a) se podría analizar en profundidad los comentarios tipo META.

- *Diario de observación*: para diseñar nuevos materiales se podrían revisar las propuestas concretas de mejora de la enseñanza que surgieron durante la observación y que se registraron en el Diario de Observación.
- *Entrevistas con el profesor*: para tratar de estudiar más la relación entre las creencias y la forma de enseñanza o la relación entre lo planeado y lo realizado, se podrían analizar más en profundidad.
- *Encuestas y tutorías del "Problema 7 con Ampliación"*: para investigar la relación entre el perfil visualizador de los estudiantes y su aprovechamiento de la actividad sería interesante volverlos a analizar desde esta perspectiva. Para ello se podría adaptar el instrumento del Póster de modo que reflejara mejor la interacción entre el grupo y la profesora.
- *Diario de la investigadora*: para estudiar la evolución docente de la profesora-investigadora.

Por último, consideramos que las *medidas tomadas para asegurar la calidad y la ética de la investigación* han resultado adecuadas.

5.2 CONCLUSIONES

A continuación respondemos a la pregunta de investigación, *¿Cómo "enseñar a visualizar" para potenciar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos del Álgebra Lineal?* Para ello nos apoyamos en la discusión que se acaba de presentar y en la definición tentativa que se dio al principio de la investigación sobre la enseñanza de la visualización como "acciones, más allá del mero uso de imágenes, que se deben realizar en clase para ayudar a los estudiantes a visualizar de forma efectiva para la comprensión".

5.2.1 ¿Cómo "enseñar a visualizar"?

Acabamos de señalar que **en el curso observado se enseña con visualización pero no se enseña suficientemente a visualizar.** Para hacer esta afirmación hemos argumentado que "se enseña con visualización" porque en clase se observan diversidad de modelos, que se usan con diversidad de propósitos, se explican y explicitan sus elementos principales y a veces incluso se fomenta una reflexión en torno a estos elementos. Sin embargo, objetamos que "no se enseña a visualizar" porque no se propone a los estudiantes actividades sobre visualización que potencien la comprensión ni se incluye en la evaluación, no estando suficientemente legitimado su uso en clase. Esta argumentación nos lleva a concluir cinco acciones esenciales relativas a la enseñanza de la visualización que precisan la definición anterior:

- Uso de la visualización en clase.
- Explicación y explicitación de los elementos relevantes en la visualización.
- Promoción de la discusión y reflexión en torno a su uso.
- Realización de actividades específicas de visualización.
- Legitimación y evaluación de su uso.

Partiendo de las estrategias útiles para llevar a cabo estas acciones, detectadas durante la elaboración de una propuesta de mejora para el curso observado, formulamos las siguientes recomendaciones didácticas para la enseñanza de la visualización.

5.2.1.1 Recomendaciones Didácticas para Enseñar a Visualizar fomentando la Comprensión

Usar la visualización en clase

Dos puntos de partida son claves: (1) el Conocimiento Matemático del Profesor para enseñar a visualizar; (2) los perfiles visuales y conocimientos de los estudiantes. Una acción de enseñanza efectiva requiere anticipar estos aspectos. Para ello han sido de utilidad instrumentos como los mapas conceptuales (que sirven para sintetizar el esquema conceptual del concepto) y los árboles del problema (útiles para gestionar la mediación del profesor durante la resolución de problemas).

Una vez en clase, se debe utilizar la visualización:

- Teniendo en cuenta los factores apuntados y combinando los diferentes modelos descritos.

- Favoreciendo la participación y estando presente en la interacción con los estudiantes.
- Transmitiendo no sólo los resultados sino también los procesos y explicando las visualizaciones que intervienen en ellos.
- Dando sentido a lo que se está trabajando.

Explicar y explicitar los elementos relevantes en la visualización

Para enseñar a visualizar no basta con usar la visualización en clase. También hay que explicarla y hacer explícitos sus elementos relevantes, pues así se ayuda a los estudiantes a dar a las imágenes el sentido matemático adecuado. Podemos conseguirlo:

- Mostrando diversidad de representaciones y modelos de visualización.
- Aclarando notaciones.
- Ayudando a distinguir los elementos y las relaciones representadas (son útiles las preguntas concretas).
- Utilizando otros modelos de visualización (diagramas o metáforas).
- Recordando reglas de transformación.
- Guiando la conducta de abducción.
- Explicitando procesos de tratamiento y conversión de las representaciones (en la última es de ayuda situar una representación al lado de la otra, de modo que sea más fácil ver los paralelismos).
- Enfatizando aspectos relacionados con la generalización y la abstracción
- Advirtiendo de posibles equívocos.
- Estableciendo un lenguaje específico.

Promover la discusión y reflexión en torno a su uso

Se puede trascender el manejo de la visualización en clase, fomentando en los estudiantes un conocimiento META en torno a él. Esto se consigue promoviendo la discusión y reflexión en torno al uso de la visualización y en particular:

- Aprovechando los inicios de tema y de los problemas.
- Aceptando soluciones erróneas y analizando qué falla.
- Comparando y contrastando representaciones y modelos de visualización (son útiles para ello las tablas, las metáforas y los diagramas).
- Fomentando la búsqueda de métodos alternativos y de comprobaciones.
- Planteando preguntas y actividades tipo META sobre el proceso seguido.
- Utilizando el Conocimiento Matemático del Profesor para hacer preguntas de reflexión.

Realizar actividades específicas de visualización

La “enseñanza de la visualización” del curso observado llega hasta el paso anterior, no siendo suficiente para que los estudiantes aprendan a visualizar. No basta con exponerles a la visualización, por muy buenas que sean las explicaciones que la acompañen, los estudiantes tienen que practicarla. Deben verse obligados a manejarla para poder incorporarla de forma coherente en sus esquemas conceptuales. Se han identificado algunas características básicas que deben tener las actividades específicas de visualización (Figura 5. 5). Éstas se deben plantear:

- Involucrando diversidad de representaciones y puntos de vista.
- Entrenando los distintos procesos asociados a ella por separado.
- Teniendo en cuenta los diversos niveles de visualización y la dimensión operativa de la visualización, que también se debe practicar.

Legitimar y evaluar su uso

Por último, ninguna de las estrategias anteriores será posible ni efectiva si no se acompaña de la legitimación de la visualización que, en los cursos universitarios, está estrechamente relacionada con la evaluación. Se puede legitimar la visualización en el curso:

- Apelando a la visualización cuando sea pertinente.
- Usando argumentos visuales siempre que sea posible.
- Aceptando en las discusiones matemáticas argumentos visuales e intuitivos.
- Definiendo criterios de evaluación e incluyéndola en la misma.
- Dando mensajes positivos que refuercen su uso.

5.2.1.2 Condiciones Necesarias para la Enseñanza de la Visualización

Desarrollar de forma eficaz todas las recomendaciones indicadas requiere de unas condiciones específicas, entre las que destacamos las siguientes:

1. Un dominio suficiente del conocimiento matemático necesario para enseñar a visualizar (tanto en los textos de apoyo como por parte del profesor), incluyendo el desarrollo de un lenguaje específico con el que comunicar aspectos importantes de la visualización.
2. Un catálogo rico de actividades específicas de visualización, donde ésta se practique en todas sus dimensiones (producto, proceso y habilidad) y que sirvan para desarrollar la comprensión visual de los conceptos.
3. Una cultura de clase participativa (donde se fomente la interacción con los estudiantes y el trabajo colaborativo) en la que la visualización esté legitimada tanto a través de los mensajes y las acciones como de la evaluación.

Para la consecución de estas condiciones no sólo el profesor debe proponerse llevarlas a cabo, sino que debe haber un soporte institucional que brinde instrumentos para superar los obstáculos descritos. Una vía posible para lograr dicho soporte institucional sería considerar la visualización como un CONTENIDO más de un curso reglado. Éste sería transversal y estaría compuesto de las correspondientes definiciones, proposiciones, actividades, estrategias y criterios de evaluación. Sin embargo, para lograr un impacto positivo en el modo de enseñanza a través de esta propuesta, ésta no se puede imponer.

Por el contrario, las partes involucradas deben elegirla y decidir qué nuevos métodos quieren implementar. Coincidimos con Weber (2004) en que el único modo de lograr esto es potenciando el intercambio entre matemáticos y a educadores matemáticos en torno a los objetivos de los cursos de Matemáticas Avanzadas y a creencias adecuadas sobre Educación Matemática (p.132). Apuntamos tres líneas de acción que se podrían tener en cuenta en dicho intercambio:

1. *Investigar más sobre qué Conocimiento Matemático que necesita el Profesor para enseñar a visualizar y realizar una transposición del conocimiento procedente de la investigación en Educación Matemática (EM) al espacio de docencia universitaria.* Para ello se debe tener en cuenta que no existen cursos de formación de profesorado a este nivel y que los docentes tienen muchas más funciones además de la docencia.
2. *Decidir qué parte del conocimiento propuesto debe aprender el estudiante para saber visualizar y realizar una trasposición didáctica del mismo.* Esto supone convertirlos en contenidos enseñables en el aula (como la interpretación gráfica del Cociente), desarrollar un lenguaje adecuado para hablar de esos contenidos y, sobre todo, diseñar actividades para que el estudiante pueda trabajar y adquirir ese nuevo contenido.
3. *Fomentar una reflexión sobre la importancia de la visualización que conduzca a su revalorización y legitimación.* De lo contrario, dudamos que algunas de las acciones anteriores sea efectiva. A nivel colectivo, esta reflexión requerirá cambios en los currículos y la evaluación. A nivel individual, esta reflexión debe generar una revisión de las creencias sobre las Matemáticas y la visualización de los docentes que finalmente promueva las condiciones necesarias para la enseñanza de la visualización.

5.2.2 Limitaciones y Prospectiva

Consideramos que la investigación que se presenta ha contribuido al desarrollo de las acciones anteriores, pero pensamos que se requiere más estudios que lo confirmen y que superen las posibles limitaciones de este trabajo.

Primero, el estudio realizado sobre los EVC como concepto matemático ha sido utilizado para precisar el Conocimiento Matemático del Profesor necesario para enseñar a visualizar este concepto. Como hemos indicado anteriormente, se precisan investigaciones en otros contextos sobre la enseñanza de este mismo concepto para completar esta aportación, así como investigaciones similares sobre otros conceptos. Nuestra investigación proporciona un método para abordar este tipo de estudios, a falta de desarrollar métodos que permitan evaluar el impacto de las prácticas de "enseñanza de la visualización" sobre el "aprendizaje de la visualización" de los estudiantes.

Más difícil de conseguir es la trasposición de este conocimiento a los docentes universitarios. Una vía que se ha explorado en esta investigación es la colaboración, surgida a través de la Observación Participante. Ésta motivó algunos episodios de visualización descritos. Sin embargo, se observaron diferencias entre la forma de explicar los argumentos propios, mucho más clara, y la de los adquiridos mediante la colaboración. Otros impedimentos derivan de la diferencia de posicionamiento en torno a las

Matemáticas y la visualización (en nuestro caso este fue uno de los motivos de la disminución de la colaboración). Harían falta más investigaciones sobre cómo generar una colaboración efectiva entre investigadores en EM y docentes universitarios. Otra vía que se contempla es la escritura de un libro de divulgación sobre cómo enseñar a visualizar los EVC, que acerque a los docentes interesados al conocimiento desarrollado.

Segundo, esta investigación ha contribuido con la trasposición didáctica de ese contenido mediante la creación de un lenguaje específico (con la idea de MACRO y MICRO) y sobre todo con el diseño de una actividad específica de visualización, pero sería necesario desarrollar muchas más aportaciones en esta dirección. Para desarrollar el lenguaje hemos visto que pueden resultar de utilidad tanto las Matemáticas como las investigaciones en EM, aunque en este último caso es necesario reflexionar sobre cómo acercarlo al aula para que no se convierta en una dificultad más (paradoja de la comunicación). Para el diseño de actividades específicas de visualización que desarrollen la comprensión, nuestra investigación aporta unas características básicas que pueden servir como punto de partida para avanzar por este terreno tan poco explorado, pero tan necesario al mismo tiempo.

Tercero, esperamos que los resultados de esta investigación promuevan la reflexión sobre la enseñanza de la visualización a nivel universitario al mostrar que éste es un fenómeno presente actualmente en las aulas sobre el que aún falta mucho por hacer. Los episodios aquí descritos ya han servido de base para la reflexión individual (como hemos reflejado en la redacción de esta memoria) y para debates colectivos (Souto-Rubio, 2012). Pero para que los argumentos aquí presentados en defensa de la enseñanza de la visualización ganen fuerza son precisas muchas más investigaciones que los apoyen con evidencias concretas.

Otras líneas de investigación abiertas por este trabajo son las relativas a las paradojas y dilemas en la enseñanza de la visualización. ¿Cómo manejarlos para lograr una enseñanza de la visualización eficaz?

6 RESÚMENES

6.1 RESUMEN EN ESPAÑOL

6.1.1 Introducción y Planteamiento del Problema

En estas últimas décadas se han realizado numerosos estudios sobre el nivel universitario entre las que se destaca las que tratan las dificultades de los estudiantes en su entrada a la Universidad (Artigue et al., 2007; Gueudet-Chartier, 2008; Holton et al., 2001; Tall, 1991). Con esta investigación queremos avanzar vías de mejora de la enseñanza, centradas en la visualización, que contribuyan a la superación de dichas dificultades. Elegimos la visualización porque, aun estando reconocida su importancia para la comprensión de las Matemáticas Avanzadas (Arcavi, 2003; González-Martín & Camacho, 2004; Guzmán, 1996, 2002; Tall, 1991; Zimmermann & Cunningham, 1991), son escasas las experiencias de docencia y de investigación que la consideran a nivel universitario (Bergsten, 2007; Presmeg, 2006a; Weber, 2004; Wood et al., 2007).

La formulación del problema de investigación ha tenido en cuenta los resultados de un estudio exploratorio previo sobre el papel de la visualización en el aprendizaje de los estudiantes de nuestro contexto de investigación (Souto & Gómez-Chacón, 2011b; Souto-Rubio, 2009). Éste mostró la dependencia entre algunas dificultades de comprensión y las deficiencias en el uso de la visualización. Las investigaciones sobre el uso que los matemáticos hacen de las imágenes (Stylianou & Silver, 2004; Stylianou, 2002; Wilkerson-Jerde & Wilensky, 2011) muestran que éstos poseen un conocimiento en torno a la visualización que les permite disponer de ella de forma efectiva en su actividad matemática. En nuestro estudio partimos del supuesto que la enseñanza explícita de este conocimiento sería una excelente contribución a la mejora de la enseñanza universitaria. Por eso, tomando en cuenta los resultados del estudio previo, planteamos como objeto de estudio la "enseñanza de la visualización", entendida como:

> *las acciones, más allá del mero uso de imágenes, que se deben realizar en clase para ayudar a los estudiantes a construir modelos de visualización (procesos y productos) y mecanismos de control sobre ellos (habilidad) de tal modo que éstos resulten de ayuda en su quehacer matemático y faciliten la comprensión de los conceptos matemáticos (al igual que para el matemático experto).*

Situamos el tema de la "enseñanza de la visualización" en la disciplina del Álgebra Lineal (AL). Tres razones nos mueven a ello: (1) el AL es importante a nivel curricular que, con su poder de unificación, juega un papel esencial para el posterior desarrollo de otras asignaturas del Grado de Matemáticas (Dorier, 2000); (2) a pesar de su importancia, parece que ni profesores ni investigadores consiguen encontrar con un modo eficaz de enseñanza (Hillel, 2000, p. 191); (3) es una asignatura compleja para los estudiantes, entre otras razones debido a la dificultad que supone el manejo flexible de la diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento que conviven en ella (Dorier & Sierpinska, 2001). Por todo ello nos planteamos como finalidad la caracterización y potenciación de la "enseñanza de la visualización" en un curso de Álgebra Lineal (AL) para mejorar la comprensión de los estudiantes, lo que nos conduce a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo "enseñar a visualizar" para potenciar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos del Álgebra Lineal?

Con el fin de hacer esta cuestión más operativa para el estudio empírico, la desglosamos en dos objetivos específicos que a su vez se precisan en sub-objetivos a lo largo del proceso de investigación:

1. *Observar, caracterizar y explicar la "enseñanza de la visualización" en un ambiente natural (un curso de AL del primer año de Grado de Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de Universidad Complutense de Madrid).*

    1.1. *Describir modelos de visualización y sus formas de uso (estilo de enseñanza, causa, comunicación, propósito, dificultades de los estudiantes).*

    1.2. *Identificar factores influyentes, posibilidades y limitaciones en el uso de visualización en clase y acciones relativas a ellos.*

2. *Realizar una propuesta de mejora de la enseñanza de la visualización del curso observado teniendo en cuenta los resultados del objetivo anterior.*

    2.1. *Comprender desde diversos puntos de vista (epistemológico, institucional, cognitivo y afectivo) el rol de la visualización en la comprensión (de la disciplina del AL, en general, y de un concepto, en particular) obteniendo ideas innovadoras de mejora.*

    2.2. *Realizar experimentaciones en torno a esas ideas innovadoras y constatar sus efectos mediante la formulación de principios de diseño de estrategias de enseñanza y materiales para la "enseñanza de la visualización".*

El primer objetivo conduce a un tipo de estudio *descriptivo-explicativo, c*entrado en las prácticas de enseñanza actuales. El segundo es de naturaleza más *prescriptiva* (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006, p. 54) y explora otras posibilidades de la "enseñanza de la visualización" que no aparecen de forma natural en el curso observado, pero que podrían ser más efectivas. Este objetivo se plantea a raíz del estudio previo, cuyos resultados evidenciaron deficiencias en el aprendizaje de la visualización de los estudiantes.

6.1.2 Metodología

La demanda de más investigaciones sobre el tema de la "enseñanza de la visualización" que contribuyan a la mejora de las prácticas actuales aparece acompañada de la falta de un marco teórico sólido en que situar este tipo de estudios (Presmeg, 2006a; Rivera, 2011). Este hecho nos lleva a elegir la metodología Developmental Research (DR) (Gravemeijer, 1994) que, dentro del paradigma de Desarrollo Educacional (Van den Akker, 2000) da respuesta a la necesidad de una articulación teórico-práctica.

Aunque el centro de esta investigación son las Matemáticas, es importante para la interpretación de los resultados, situar el contexto y sus participantes. Este estudio se desarrolla, durante los años 2009 y 2011, en el primer curso del *Grado de Matemáticas* impartido en Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), una de las más grandes de España. Este ámbito de estudio tiene características representativas del sistema de enseñanza universitario español: el programa de estudios del Grado, los contenidos de la asignatura de AL, la organización en clases magistrales teóricas y clases prácticas de problemas, el estilo de enseñanza y los métodos de evaluación. Los participantes de esta investigación son cuatro profesores (G., J., S. y B., la investigadora), de características variadas (en experiencia y perfiles de visualización), y los estudiantes que asisten de forma regular a las clases de AL.

Los objetivos planteados y la necesidad de adaptarnos al contexto han requerido sucesivas iteraciones de ciclos de desarrollo e investigación, característicos del DR. Finalmente, la estrategia de investigación es la siguiente:

- Fase I. Estudio Inicial (ciclo de desarrollo-investigación): es la fase de preparación de la experimentación y se plantea para adquirir un conocimiento mayor sobre el contexto de investigación. Se distinguen tres partes según el enfoque escogido.
    - El *Estudio Epistemológico* profundiza en el papel de la visualización en el desarrollo del AL como disciplina matemática a través del análisis de textos históricos.
    - El *Estudio Institucional* se propone conocer mejor el contexto y la visión oficial de la visualización en la Facultad de Matemáticas de la UCM, a través del análisis de documentos oficiales, de materiales del curso (Libro de Texto y Hojas de Problemas) y de observación de clases. Esta visión se sitúa y contrasta a través del análisis de otros 20 libros de texto de AL.
    - El *Estudio Exploratorio* sirve para explorar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del AL, relacionadas con la visualización, a través de sus respuestas a un cuestionario elaborado específicamente para ello.

  La revisión de los resultados obtenidos da lugar a la formulación de tres principios de diseño para la "enseñanza de la visualización".
- Fase II. Observación Participante (ciclo de desarrollo-investigación): es la fase donde se llevan a cabo las experimentaciones, aplicando los principios de diseño, junto a una observación en profundidad y prolongada en el tiempo del curso (tanto de las clases teóricas como de las prácticas). Se divide en seis etapas establecidas a posteriori. Durante la Observación Participante se graban vídeos o audios, se toman notas de campo y se recogen documentos escritos por los estudiantes que se analizan al final de cada etapa, sirviendo para tomar decisiones en la siguiente. Una reflexión final sobre los resultados da lugar a la revisión de los principios de diseño y los Espacios Vectoriales Cociente emergen como un concepto relevante para nuestro estudio.
- Fase III. El caso de los Espacios Vectoriales Cocientes (EVC) (estudio de un caso): es la fase de profundización en la relación entre visualización y comprensión mediante la focalización en un concepto concreto del que es posible construir el esquema conceptual asociado. Se divide en tres etapas. Primera, se estudia los EVC como concepto matemático (ampliando los Estudios Epistemológico e

Institucional). Segunda, se hace una relectura de todos los episodios relativos a su enseñanza. Finalmente, en la tercera etapa, se analiza en profundidad una actividad específica de visualización que involucra el concepto, el "Problema 7 con Ampliación".

La recogida de datos se ha basado en los principios de redundancia, triangulación y sustituto más próximo (Pratt & Jones, 2010). El análisis combina la perspectiva holística (en las dos primeras fases) y específica (en la Fase III) y se realiza de forma granulada, mediante un análisis microgenético, un análisis intermedio y finalmente un análisis reflexivo (Pratt & Jones, 2010). La comunicación de la información y presentación de los resultados obtenidos toma forma de *narrativa*, complementada en ocasiones con formatos más *visuales* como *tablas*, *gráficos*, *mapas conceptuales* o *fragmentos de "El póster"* (que es un instrumento de análisis para la observación de clases). En el diseño de la estrategia también se han tenido en cuenta los dilemas característicos del DR, como los derivados de la diversidad de roles de la investigadora o la pérdida de generalidad al centrarse en un contexto concreto. Estos aspectos metodológicos, entre otros, se establecen para promover la calidad y la ética del estudio.

6.1.3 Marco Conceptual

Se elaboró un Marco Conceptual estructurado en tres partes, siguiendo los principios de la metodología DR para realizar el desarrollo teórico: Base Filosófica, Teorías Globales y Teorías Locales.

En la *Base Filosófica* se expone la visión de la investigadora-profesora en torno a la naturaleza de las Matemáticas, cómo éstas se aprenden y cómo se enseñan. Las *Matemáticas* se conciben como una actividad humana tanto individual como colectiva (Cobb et al., 1992, p. 17). Se considera que la forma principal de acceso a los objetos en Matemáticas es a través de sus representaciones y que comprenderlas, y por tanto *aprenderlas*, implica la construcción de una imagen mental rica que incluya la articulación de dichas representaciones. La *enseñanza* no se contempla separada de los procesos de aprendizaje, es similar a un proceso de ósmosis (Guzmán, 1984), e involucra el ofrecimiento del estímulo y la guía necesarios para facilitar ese proceso de construcción.

Las *Teorías Globales* se estructuran, de acuerdo con el planteamiento del problema y los objetivos de investigación, en torno a tres pilares fundamentales:

- *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas a Nivel Universitario*: se comienza con la problemática del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y las diversas teorías que surgieron en torno a él (Artigue et al., 2007; Tall, 1991), destacando la noción de *esquema conceptual* (Azcárate & Camacho, 2003). Se continúa con la revisión de investigaciones en torno a la transición de Secundaria a Universidad (Gueudet-Chartier, 2008), que lleva a perspectivas más globales de análisis las cuales contemplan elementos de la "*cultura o prácticas de clase*" (Presmeg, 2006a) y de las "*normas y creencias*" (Cobb & Yackel, 1996). Finalmente, se sientan las bases teóricas para hablar de innovación en la enseñanza universitaria. Se revisan: (1) experiencias previas, como los debates científicos (Selden & Selden, 2001); (2) investigaciones sobre clases magistrales (Bergsten, 2011; Weber, 2004; Wood et al., 2007); (3) teorías sobre el Conocimiento Matemático del Profesor (Ball et al., 2008; Petrou & Goulding, 2011).

- *Representaciones y Comprensión de las Matemáticas Avanzadas*: las teorías sobre signos y sistemas de signos (Goldin, 1998; Kaput, 1998), sobre Pensamiento Diagramático (Dörfler, 2003a, 2004, 2005, 2006) y sobre registros de representación semiótica (Duval, 1993, 1999a, 1999b, 2004, 2006; Hitt, 2002, 2003, 2006) ayudan a precisar el tipo de elementos que debe incluir el esquema conceptual, modelando los procesos de comprensión y obtención de significado que se producen en la mente. Las teorías de Vygotsky y de Mediación Semiótica (Mariotti & Bartolini Bussi, 2008) aportan la faceta social de dichos procesos, destacando la mediación del profesor como dimensión clave.

Figura 1: Síntesis de la conceptualización propuesta para el estudio de la visualización en los procesos de enseñanza-aprendizaje del AL para "enseñar a visualizar" teniendo en cuenta las tres dimensiones –producto (cajas azules y verdes), proceso (cajas naranjas) y habilidad (cuadros de texto de la izquierda)– de la noción de visualización (Arcavi, 2003).

- *Visualización en Educación Matemática (EM):* esta investigación parte de un punto de vista amplio sobre el tema (Figura 1), en el que se distinguen tres dimensiones –

producto, proceso y habilidad– de la noción de visualización (Arcavi, 2003). La revisión de literatura relacionada también permite recoger algunas recomendaciones didácticas y obstáculos para su uso.

Las *Teorías Locales* concretan cada uno de los temas anteriores al contexto específico del AL, haciendo hincapié en aquellas investigaciones más relacionadas con la *flexibilidad cognitiva* y la visualización (Alves-Dias, 2007; Dörfler, 2007; Gueudet-Chartier, 2000, 2004; Harel, 1999; Hillel, 2000; Pavlopoulou, 1994; Sierpinska, 2000; N. Sinclair & Gol Tabaghi, 2010; Stewart & Thomas, 2007). Se detallan los antecedentes en la didáctica del AL (Aydin, 2009; Carlson, 2004; Dorier & Harel, 1997; Dorier & Sierpinska, 2001; Dorier, 2000, 2002) que sirven para guiar la investigación, para situar y explicar nuestros resultados y finalmente acaban siendo objeto de desarrollo (Figura 2).

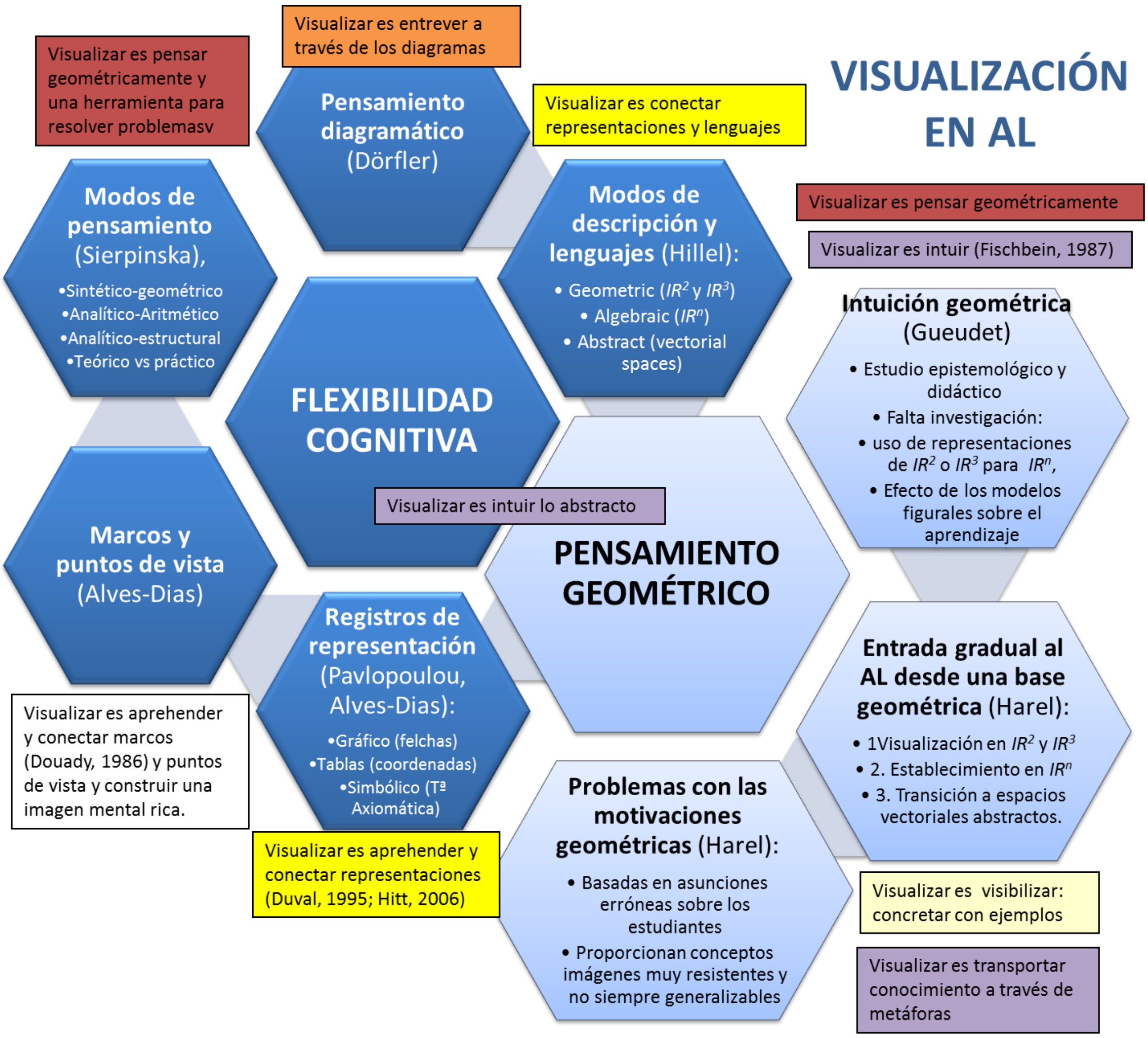


Figura 2: Revisión del esquema de las investigaciones en AL sobre visualización, teniendo en cuenta los modelos de visualización encontrados en esta investigación.

6.1.4 Fase I: Estudio Inicial

El *Estudio Epistemológico* se basa en la revisión de fuentes bibliográficas secundarias que elaboran estudios sobre el desarrollo del AL (Bourbaki, 1972; Dorier, 2000, Parte I; Gueudet-Chartier, 2000; Kleiner, 2007, pp. 79–89; O'Connor & Robertson, 1996; Tucker, 1993; Vitulli, 2004). Da lugar a un Eje Cronológico que explicita las circunstancias históricas, psicológicas y sociológicas que intervinieron en él. Este análisis muestra que la Geometría, a pesar de comenzar siendo un pilar fundamental de búsqueda de inspiración y credibilidad, no conduce de forma natural a la consolidación de la teoría formal de los Espacios Vectoriales. Sin embargo, la coordinación de lenguajes y modos de pensamiento (algebraico y geométrico) y el desarrollo de una notación adecuada son claves en este proceso. La consulta de libros de texto clásicos (Dieudonné, 1964; Grassmann, 1995; Halmos, 1974) completa esta panorámica aportando evidencias más directas de las dos posturas complementarias que los matemáticos toman en torno al uso de la visualización en el AL: una donde ésta se presenta como una fuente de experimentación, inspiración e intuición; y otra donde aparece como un primer paso, que hay que superar, para poder llegar a razonamientos más generales. Ambas posturas han convivido históricamente hasta que finalmente se impuso la segunda sobre la primera, relegando la visualización a un segundo plano (Davis, 1993; Guzmán, 1996). Sin embargo, esta visión olvida la importancia que la visualización tuvo, y continúa teniendo, en el desarrollo de las ideas matemáticas y puede derivar en obstáculos epistemológicos para los estudiantes.

El *Estudio Institucional* revela una visión institucional acorde con la evolución histórica de la disciplina, es decir, dominada por el formalismo y el rigor. Tanto en la Guía Docente de la asignatura como en el Libro de Texto los registros predominantes son el simbólico y el de tablas, y éstos aparecen junto a un lenguaje muy algebraico. En las clases se mantiene un elevado grado de rigor y de tecnicismo, pero al mismo tiempo se observa un aumento en la riqueza de elementos intuitivos y de creación de significado, motivo por el que se decidió observar en mayor profundidad las clases durante la fase siguiente. El análisis de los 20 libros de texto de AL (escogidos de acuerdo a tres criterios diferentes) también muestra que son posibles otras alternativas más afines con la idea de "enseñanza de la visualización", ayuda a precisar los tipos de representaciones y sus formas de uso en AL y da ideas para el desarrollo de materiales.

Un hecho importante derivado de los resultados del *Estudio Exploratorio* es la existencia de dificultades de aprendizaje en AL relacionadas con la falta de habilidad de visualización. Las respuestas de los estudiantes al Cuestionario muestran que éstos no comprenden completamente los conceptos que estudian al no ser capaces de: coordinar diferentes representaciones del concepto; conectar y reajustar sus intuiciones con las definiciones formales vistas en clase; manejar con flexibilidad diversos modos de pensamiento; etcétera. Este tipo de dificultades responden a obstáculos cognitivos que se producen en la mente de los estudiantes y que podrían estar reforzados por el modo de trabajo en clase.

La reflexión sobre los resultados obtenidos en el Estudio Inicial conduce a la formulación de tres principios de diseño, que guiarán la experimentación (ver la columna izquierda de la tabla de la Figura 4)

6.1.5 Fase II: Observación Participante

La codificación de los episodios recogidos durante las más de 20 semanas de observación y su análisis a través de "*El póster*" (instrumento que posibilita la visión global y local al mismo tiempo) pone de manifiesto que la "enseñanza de la visualización" es un fenómeno complejo, transversal y situado en un contexto y momento determinado. A través de la narrativa de los episodios observados en cada una de las seis etapas de esta fase, se detallan posibilidades y obstáculos y se observa que ésta depende de factores como: el contenido; los agentes (con un conocimiento previo determinado y con un perfil visualizador marcado por sus creencias sobre las Matemáticas, la Educación y la visualización); el medio con que se visualiza (no es lo mismo un modelo de tres dimensiones que de dos); el propósito y estilo docente; y la cultura y las prácticas de clase (las normas, el grado de participación fomentado).

También se han detectado cinco modelos de visualización (Figura 3): manejo y coordinación de representaciones (REPR), pensamiento diagramático (DIAG), desarrollo de la intuición y las imágenes mentales (INT), uso de la Geometría y fomento de la flexibilidad (FLEX). Los modelos se han enumerado según su frecuencia de aparición en el curso, aunque el último modelo es más difícil de cuantificar porque involucra a los demás. La identificación de temas relativos a cada modelo sirve para describir su forma de uso en el curso. En general, el modelo más explicitado es el de manejo de representaciones seguido del pensamiento geométrico. El resto se utiliza de modo más vago, a menudo con fines comunicativos.

MODELO	DESCRIPCIÓN	FORMA DE USO
Manejo y coordinación de representaciones **Ejemplos (EVC):** Definición formal y Notación clases de equivalencia.	<u>Producto</u>: representaciones en los registros de tablas y simbólico (se han identificado tipos de representaciones en AL). <u>Procesos</u>: representación, tratamiento, conversión, discusión, comunicación. <u>Habilidades</u>: saber representar, transformar, elegir representaciones; ser capaz de compararlas, de predecir los efectos de una transformación.	<u>Estilo de enseñanza</u>: lógico- estructural y procedimental (episodios más formales). <u>Propósito</u>: para enunciar resultados, aclarar notaciones, presentar representaciones equivalentes, explicar pasos técnicos de una demostración, desarrollar ejemplos, explicitar ideas matemáticas; debidos a las dudas de los estudiantes. <u>Comunicación</u>: bastante explicitación sobre su manejo, a veces con ayuda de diagramas o de metáforas. <u>Dificultades</u>: abundantes, relacionadas con la notación y el aprendizaje mecánico.
Pensamiento diagramático o uso de diagramas **Ejemplos (EVC):** Transporte de estructura, diagrama Factorización Canónica, Venn para clasificaciones.	<u>Producto</u>: diagramas (relativos a los juegos de implicaciones o igualdades; a los razonamientos con matrices, de flechas o conmutativos, de conjuntos). <u>Procesos</u>: transformación, interpretación, abstracción, discusión, comunicación, reflexión. <u>Habilidades</u>: saber las reglas de manipulación, ser capaz de identificar elementos relevantes, crear esquemas conceptuales flexibles.	<u>Estilo de enseñanza</u>: procedimental. <u>Propósito</u>: para sintetizar información, resumir procesos, comunicar ideas tipo META, ayudar a comprender o recordar, hacerse una idea de lo que ocurre; como un contenido en sí mismo. <u>Comunicación</u>: su uso aclaratorio va en detrimento de su explicitación; se usan configuraciones específicas, símbolos como como □, ○, ∆ para llamar la atención sobre ciertos elementos y simplificar la escritura, flechas para las relaciones. <u>Dificultades</u>: pocas, los usan como apoyo al estudio, a veces con errores.

Desarrollo de la intuición y las imágenes mentales **Ejemplos (EVC):** Metáforas de las bolsas y de los tornillos.	Producto: metáforas, ejemplos de la vida cotidiana, ilustraciones, lenguaje natural. Procesos: codificación y decodificación, abstracción, cambio de punto de vista, comunicación, reflexión y discusión. Habilidades: crear esquemas conceptuales rico y flexible; ser consciente de los posibles equívocos de la intuición; saber utilizar el lenguaje oral para explicar visualizaciones.	Estilo de enseñanza: semántico. Propósito: para establecer analogías, dar sentido a una definición; ayudar a comprender o recordar procesos META; explicar de forma intuitiva el manejo de representaciones, justificar algún paso en una demostración o establecer analogías con otras similares; mostrar algo como evidente; explicitar conexiones mentales (resolución de problemas). Comunicación: poca explicitación; uso de lenguaje matemático para comentarios META, natural para ejemplos y metáforas; a veces con apoyo de ilustraciones o diagramas. Dificultades: algunas, debidas a un exceso de confianza (no controlada) en la intuición.
Pensamiento geométrico o uso de la Geometría **Ejemplos (EVC):** MICRO MACRO.	Producto: representación en registro gráfico, gestos y lenguaje matemático. Procesos: interpretación, representación, poco tratamiento, conversión, ejemplificación, cambio de punto de vista. Habilidades: saber identificar elementos relevantes, aprehender globalmente, conectar puntos de vista; ser capaz de elegir y apelar a la visualización cuando sea conveniente; apreciar lo concreto y lo abstracto; ser consciente de posibles equívocos.	Estilo de enseñanza: en todos (papel más destacado en el semántico). Propósito: para ilustrar o ejemplificar (lógico-estructural); como complemento, apoyo o guía de argumentos algebraicos (procedimental); para dar sentido, convencer o establecer conexiones (semántico); como argumento matemático (más en las prácticas); debidos a la interacción con los estudiantes. Comunicación: difícil; gráfico (IR^2), pero no necesariamente; explicitación de elementos por la interacción; subordinada o coordinada con lo algebraico. Dificultades: bastantes; confunden afín con vectorial; falta de fluidez; les cuesta distinguir elementos relevantes o imaginar cambios en las imágenes; no lo suelen invocar de forma natural.
Fomento de la flexibilidad **Ejemplos (EVC):** Ejemplos ($\mathbb{Z}_n$, S^1) Diferentes concepciones (ver Figura 5).	Producto: los del resto de modelos y además analogías y ejemplos matemáticos. Procesos: todos, en particular coordinación de representaciones; abstracción, ejemplificación, concreción, reflexión. Habilidades: ser capaz de conectar visualizaciones, articular el esquema conceptual, comprobar.	Estilo de enseñanza: todos (combinados con otros modelos). Propósito: para relacionar con conocimientos previos, ejemplificar, hacerse idea de lo que ocurre, resolver un problema de formas diferentes, comprobar; como un punto de vista nuevo, como contenido revistado; debidos a dudas de estudiantes. Comunicación: vaga, a pesar de que se favorece desarrollando terminología específica. Dificultades: bastantes; no cambian flexiblemente de modo de pensamiento; respuestas poco coherentes.

Figura 3: Modelos de visualización encontrados en la investigación, a nivel teórico y práctico, y formas de uso en las clases observadas. Exceptuando el último modelo de fomento de la flexibilidad (que se ha situado abajo porque engloba a los modelos anteriores), los demás están ordenados de mayor frecuencia de aparición (arriba) a menor (abajo).

La *experimentación* gira en torno a los tres principios de diseño formulados en la fase anterior de investigación y posibilita la obtención de información sobre las dificultades y percepciones de los estudiantes. Éstas varían según el perfil visualizador de los estudiantes. Se han detectado dificultades relacionadas con la visualización debidas a deficiencias en el manejo de los registros (del gráfico en particular), al uso incontrolado de la intuición y al rechazo de la misma (bien por falta de costumbre o por no considerarla válida). Las acciones promovidas por los principios de diseño son adecuadas para hacer frente a estas dificultades, al fomentar: (1) la habituación de los estudiantes a los métodos visuales (a través de los cambios de cultura de clase derivados del primer y el tercer principios de diseño); (2) un entrenamiento específico que les ayude a controlar las dificultades con el manejo de dichos métodos (contemplado en el Segundo Principio de Diseño); (3) una legitimación de la visualización que muestre a los estudiantes la validez de los métodos visuales y les ayude a discernir cuándo es conveniente usarlos (como propone el Tercer Principio de Diseño). Los principios se revisan y reformulan los resultados de la experimentación, dando lugar a una propuesta de mejora de la "enseñanza de la visualización" adaptada al contexto (Figura 4).

PRINCIPIOS	ACCIONES	EVALUACIÓN
1. Fomento de una cultura de clase más participativo: *Para favorecer la construcción individual y colectiva de significados se deben buscar otras formas diferentes de organizar la clase que aumenten la interacción social y la participación (como son el trabajo cooperativo y el debate científico), pues así se acercan las prácticas y el lenguaje del matemático experto a los estudiantes y en particular se posibilita la comunicación con y sobre la visualización*	- Haciendo una buena anticipación (métodos de resolución, dificultades de los estudiantes).	- Se mejora la mediación, se reducen obstáculos afectivos (da seguridad) y cognitivos (da más conocimiento), y se facilita el aprovechamiento del tiempo.
	- Fomentando la búsqueda de diversidad de métodos (también visuales, intuitivos o incorrectos) y la reflexión sobre ellos. - Aceptando diversidad de respuestas, estableciendo conexiones entre ellas y formalizando bien las más intuitivas. - Comprobando y dando sentido al final.	- Se atiende a la diversidad de perfiles y se muestran prácticas deseables (que los estudiantes terminan imitando).
	- Promoviendo y estando presente en la interacción con los estudiantes, obligándoles a explicitar sus pensamientos y manejo de la visualización	- Se aprovechan las oportunidades para enseñar a visualizar que ofrece la participación.
2. Manejo explícito de la visualización: *Para favorecer la coordinación y la conexión de la diversidad de representaciones, lenguajes y modos de pensamiento característicos del AL, éstos se deben utilizar y manejar flexiblemente comunicando explícitamente las relaciones existentes entre ellos; pues así se favorece su incorporación en la mente de los estudiantes facilitando la comprensión de la disciplina*	- Aprovechando la presentación de nuevos contenidos para proveer múltiples representaciones y mostrar cómo pensar con cada una de ellas. - Comparando visualizaciones (para ello son útiles las tablas y las metáforas), distinguiendo sus elementos y resaltando las relaciones relevantes representadas. - Conociendo las características de cada modelo de visualización y explotando sus posibilidades comunicativas.	- Se tienen en cuenta los procesos de visualización y se aprovechan las características del estilo DTD para explicarlas y potenciarlas.
	- Planteando actividades específicas de visualización (ver Figura 7).	- Se evita la inercia y la tendencia natural a usar el mismo modo de pensamiento. - Se reducen obstáculos socioculturales, (al legitimar el uso de la visualización) y cognitivos (al practicarla más).
	- Desarrollando un lenguaje específico que permita hablar, comprender, compartir y reificar conocimiento sobre la visualización.	- Responde a obstáculos cognitivos, pero da lugar a la paradoja de la comunicación, - Facilita el aprovechamiento del tiempo.
	- Teniendo en cuenta que las respuestas de los estudiantes pueden ser pobres en la explicitación del manejo de la visualización.	- Se tienen en cuenta las dificultades de los estudiantes y da oportunidad de aclarar obstáculos cognitivos.

3. Legitimación de la visualización: *Para lograr que la visualización sea una herramienta válida para razonar y que sirva de camino a la intuición, ésta debe legitimarse adecuadamente (cuidando mensajes y acciones en torno a ella), ya que permite el acercamiento a los estudiantes posibilitando su posterior desarrollo.*	- Planteando una reflexión colectiva sobre la visión institucional de la visualización (que incluya las actividades y la evaluación) - Planteando una reflexión individual de los docentes que refuerce sus creencias positivas en torno al uso de la visualización.	- Se atiende a los obstáculos socioculturales y a la paradoja del status de la visualización.
	- Desarrollando anticipadamente el conocimiento necesario para su adecuado manejo y comprensión (tanto en los profesores y estudiantes) para evitar un manejo "naif" de la visualización que no reconozca su complejidad.	- Se atiende a las demandas cognitivas de la visualización (y se previene la falta de conocimiento de los estudiantes) y a la paradoja de la sencillez de la visualización.

Figura 4: Propuesta de mejora de las estrategias para la "enseñanza de la visualización" del curso observado, elaborada a partir de la formulación, aplicación (a través de acciones), revisión y evaluación (en relación a las posibilidades y limitaciones del contexto) de tres principios de diseño.

6.1.6 Fase III: El caso de los Espacios Vectoriales Cociente (EVC)

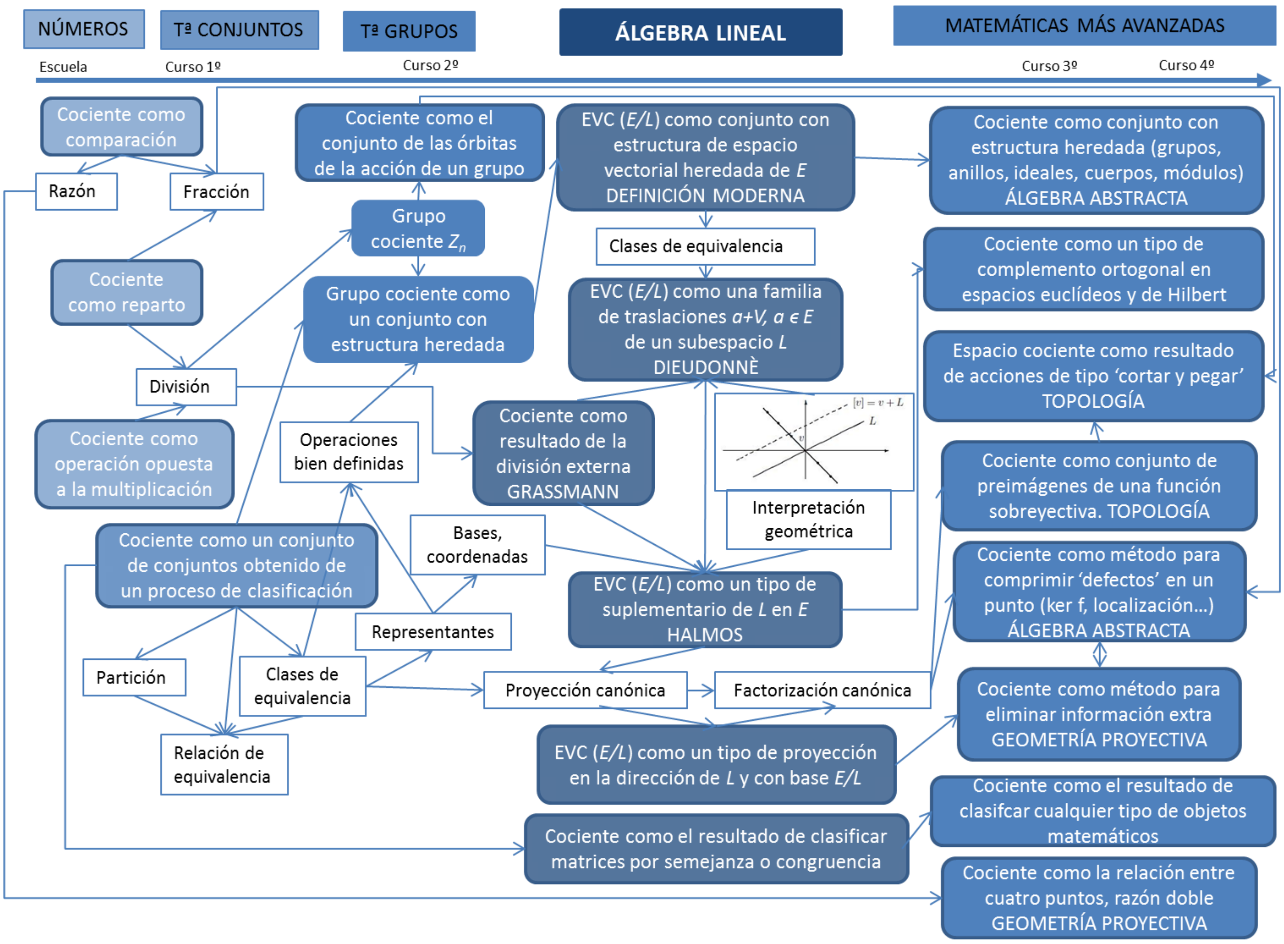
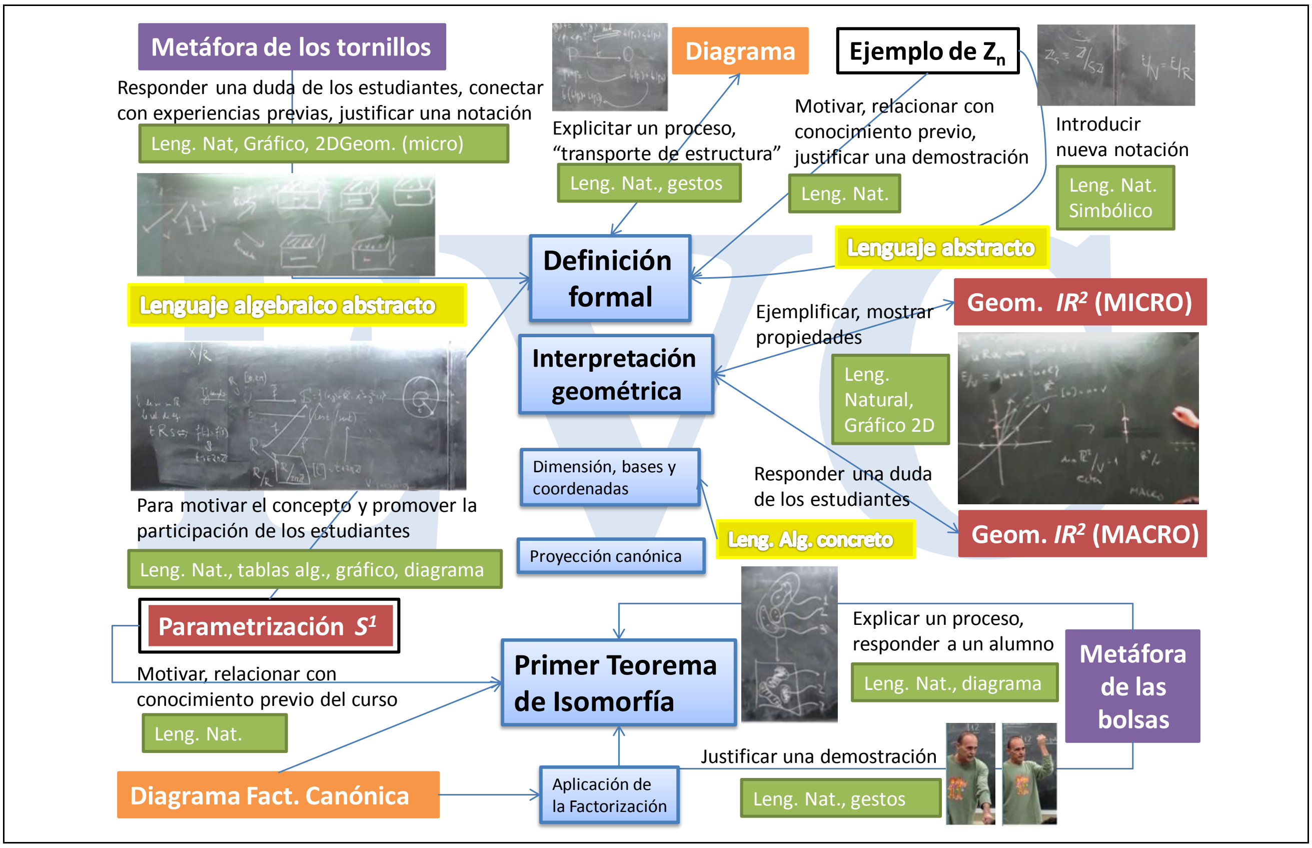


Figura 5: Mapa conceptual que resume el análisis de los EVC como concepto matemático, mostrando sus diversas concepciones. En él se representan las diferentes concepciones de los Cocientes (en las cajas azules con bordes redondeados), sus interacciones (flechas) y las relaciones con otras nociones y representaciones necesarias para el desarrollo de los conceptos (en las cajas blancas con borde azul claro). Además se muestra el avance de todos estos elementos desde la escuela hasta los últimos cursos de Grado (gracias a la organización en columnas, cuya intensidad de azul está en correspondencia con los temas situados sobre la flecha que marca la dirección de dicho avance).

Elegimos profundizar en el caso de los EVC por diversas razones: (1) los EVC son un concepto clave en la trayectoria de formación de los estudiantes pero, junto a los Espacios Duales, es uno de los conceptos que más dificultades les provoca; (2) los EVC es el concepto que acumula un mayor número de episodios visuales (tanto en las clases teóricas como en las prácticas) ofreciendo un entorno rico de análisis; (3) la inestabilidad entre comprensión y visualización puesta de manifiesto en el aprendizaje de este concepto (aparentemente contradictoria con la postura teórica inicial que suponía que a más visualización le debería corresponder una mejor comprensión). Estas razones nos llevan a tratar de responder a las siguientes preguntas: *¿Qué hace de los EVC un concepto tan difícil de enseñar y de aprender? ¿Cómo lograr una enseñanza más eficaz de este concepto?*

El análisis de los EVC como concepto matemático indica que es un concepto complejo, tanto desde el punto de vista epistemológico como cognitivo, y por tanto es difícil de aprender. Depende de otros conceptos como: Relación y Clase de Equivalencia, Partición, estructura algebraica abstracta de Espacio Vectorial, Subespacios Traslados, Suplementarios, Bases, Coordenadas o Dimensión. Por ende, para lograr comprenderlo hace falta un elevado grado de abstracción, motivo que explica su tardío desarrollo (a finales del s. XIX), así como una coordinación de las diversas concepciones a las que éste concepto da lugar, y que son necesarias para continuar construyendo conocimiento en torno a él en el futuro (Figura 5). Pero la definición formal de los EVC no encapsula necesariamente todos estos puntos de vista. Por tanto, una enseñanza que fomente la *flexibilidad cognitiva* del concepto debería prestar atención explícita a cada uno de ellos. Explicar este concepto de forma flexible y adaptada al nivel de los estudiantes requiere de un gran Conocimiento Matemático del Profesor (que hemos detallado gracias al análisis realizado). Esta razón justifica por qué los EVC resultan también difíciles de enseñar.



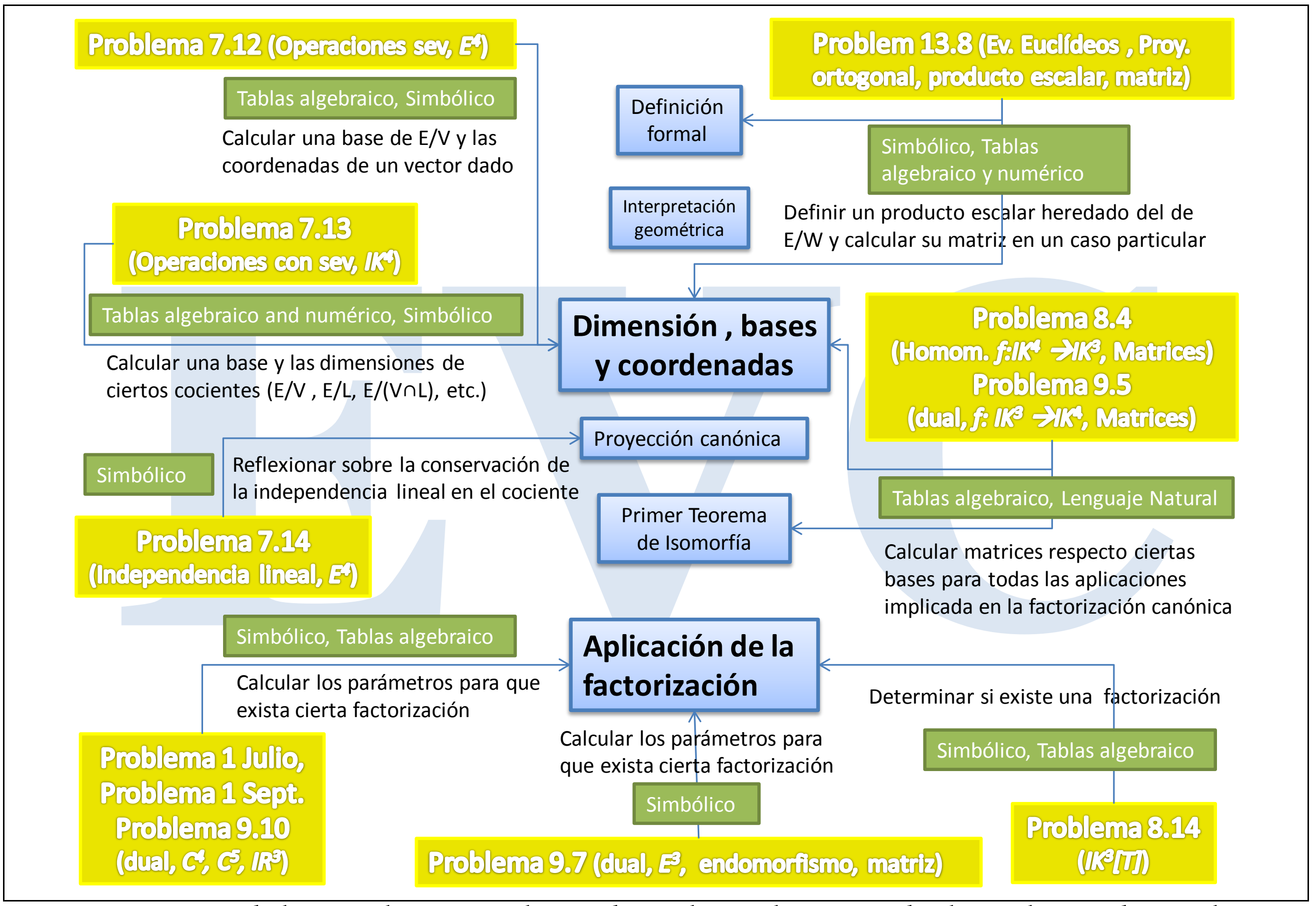


Figura 6: Esquema de las visualizaciones observadas en las explicaciones de clase relacionadas con los EVC (página anterior) y en los problemas de las hojas y los exámenes (esta página). Los colores indican el tipo de modelo (Figura 1) y el tamaño de las cajas centrales refleja la frecuencia de cada contenido relativo a los EVC.

El contraste de los episodios de visualización en las explicaciones de los EVC con el análisis de los problemas planteados a los estudiantes en torno al concepto, explica la inestabilidad observada entre visualización y comprensión (Figura 6). Hay un importante salto entre el papel de la visualización en las explicaciones de clase y la actividad de los estudiantes: los contenidos explicados visualmente en las clases apenas intersecan los tratados en los problemas, que no necesitan de esta herramienta para resolverse. Así, en las clases ésta sirve para complementar, ilustrar y dar sentido a los EVC mientras que los estudiantes pueden no usarla en los problemas porque no se les exige. Esto nos lleva a proponer, como medida para mejorar la enseñanza de este concepto, el desarrollo de actividades específicas de visualización que permitan a los estudiantes practicarla. La experimentación en torno al "*Problema 7 con Ampliación*" ha permitido avanzar hacia algunos de los elementos y las características que se deben tener en cuenta al diseñar una actividad específica de visualización potenciadora de comprensión. Estos elementos se resumen en la Figura 7 y se ejemplifican con características incluidas en este problema.

ELEMENTOS	CARACTERÍSTICAS	EJEMPLO DE APLICACIÓN
Anticipación	Que se base en un estudio profundo de los contenidos matemáticos y los modelos visuales involucrados (hace falta un Conocimiento Matemático del Profesor completo).	Se ha realizado un análisis de los EVC como concepto matemático que ha permitido precisar el Conocimiento Matemático del Profesor asociado.
Objetivos específicos	Que involucren aspectos de la visualización como PRODUCTO o HABILIDAD: - <u>Más operativos</u>: interpretar, crear, transformar representaciones; aprender a coordinar dos representaciones, a elegir la representación adecuada, etc. - <u>Más conceptuales</u>: construir un nuevo punto de vista de un concepto, comprenderlo mejor al establecer una nueva conexión en el esquema mental asociado, reflexionar sobre el manejo de la visualización (mecanismos de control), etc.	Practicar las representación gráficas, construir un diagrama y entenderlo geométricamente, conectar diversidad de representaciones y concepciones (proyecciones, EVC), imaginar y entender un isomorfismo, valorar la notación en Matemáticas, aprender a profundizar y visualizar problemas después de resolverlos.
Metodología	Que combine fases consecutivas de construcción de significado (inspirada en las Teorías de Mediación Semiótica): - <u>Individual</u>: en el trabajo inicial (de familiarización con el problema) o final (de META reflexión). - <u>Colectivo</u>: en el trabajo de desarrollo (trabajo en parejas o en grupos) y de formalización del problema (puestas en común).	1) Trabajo en grupos (de 4 o 5). 2) Desarrollo individual y en grupo; redacción de la respuesta escrita. 3) Puesta en común en las tutorías por grupos. 4) Reflexión individual (faltó).
Enunciado	Que tenga en cuenta las interpretaciones de los estudiantes y contemple el uso de los modelos de visualización (teniendo en cuenta su aspecto de PRODUCTO): - <u>Explícitamente</u>: incluyendo o pidiendo representaciones en registros concretos, diagramas, ilustraciones, metáforas, etc. - <u>Implícitamente</u>: dando datos suficientes para conectar con otro modelo de visualización o admitiendo diversidad de métodos de resolución (entre ellos uno visual).	El enunciado está formulado en lenguaje natural, el registro simbólico y de tablas; pero además se pide representar gráficamente, explicar algebraica y geométricamente (dando pistas explícitas para ello), imaginar espacialmente y construir un diagrama.
Mediación	Guiada por un *árbol de problema* (Morera, 2013) que tenga en cuenta: - <u>El contenido matemático y de visualización</u>: conceptos y niveles de visualización necesarios para entender el problema. - <u>Los objetivos visuales de la actividad</u>: preguntas que inciten a cambiar de modo de representación o de punto de vista, a la reflexión sobre el uso de cierta visualización, etc. - <u>Los estudiantes</u>: su conocimiento previo, sus diferencias individuales (de preferencia por lo visual y de carácter a la hora de participar).	El árbol de problema incluye preguntas para ver si se comprenden los conceptos necesarios; propuestas de tareas de visualización más sencillas, juegos de ramas de pensamiento algebraico y geométrico; y ramas que tienen en cuenta los posibles métodos y dificultades de los estudiantes.

Figura 7: Elementos y características recomendadas para actividades específicas de visualización que potencien la comprensión de los estudiantes, es decir, actividades para "enseñar a visualizar".

6.1.7 Discusión y Conclusiones

La discusión en relación a los objetivos muestra que los resultados obtenidos responden positivamente a la finalidad de la investigación. Respecto al primer objetivo se concluye que, a pesar de que el curso observado encaja en el estilo de enseñanza denominado *Definición- Teorema- Demostración* (DTD) (Slomson, 2010; Weber, 2004; Wood et al., 2007), *hay un uso (situado) de la visualización*. El estudio en profundidad de un caso de enseñanza universitaria supone una de las principales aportaciones de nuestro trabajo, al ofrecer la posibilidad de identificar nuevos estilos y modelos de enseñanza de la visualización (Figura 3). Las posibilidades de la visualización que se aprovechan en el curso tienen que ver con los verbos ilustrar, complementar, comunicar y comprender; menos frecuentes son los relativos a demostrar, investigar, descubrir y experimentar (excepto en algunos episodios más experimentales de las clases de prácticas). El uso de la visualización en el curso es limitado debido a diversos obstáculos (Arcavi, 2003; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Guzmán, 1996) que provocan: mensajes contradictorios en torno a su uso, la ausencia de actividades específicas y la falta de consideración en la evaluación. Por tanto, existe un círculo vicioso en torno a la "enseñanza de la visualización" que aboca a ésta al papel de herramienta didáctica (*se enseña con visualización*) en lugar de al de herramienta provechosa en el quehacer matemático (*no se enseña visualización*).

Los resultados en torno al segundo objetivo muestran desde distintos puntos de vista (epistemológico, institucional, cognitivo y afectivo) que, a pesar de la inestabilidad observada, la visualización es necesaria para la comprensión y es inherente en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas Avanzadas. Por tanto, merece la pena investigar la cuestión de cómo manejarla cuando se enseña. La reflexión en torno a la experimentación ofrece distintas vías, dando lugar a una propuesta de mejora para el curso observado (que constituye otra de las aportaciones significativas de este trabajo). Sin embargo, la cuestión de cómo "enseñar a visualizar" es compleja y plantea paradojas aún por resolver, como por ejemplo en torno a: *la participación de los estudiantes; a la sencillez de la visualización; la comunicación de la visualización; la explicitación de la visualización; y la legitimación de la visualización.*

Finalmente, se responde a la pregunta de investigación formulando recomendaciones didácticas en torno a las cinco acciones que caracterizan una "*enseñanza de la visualización*" que fomente la comprensión: (1) uso de la visualización en clase; (2) explicación y explicitación de los elementos relevantes en la visualización, (3) fomento de la discusión y reflexión en torno a su uso; (4) realización de actividades específicas de visualización; (5) legitimación y evaluación de su uso. Como una posible vía para lograr las condiciones necesarias para llevar a cabo dichas acciones de enseñanza, también se propone considerar la visualización como un contenido más dentro de los cursos universitarios. Para que esta medida fuese efectiva debería acompañarse de un intercambio entre docentes universitarios e investigadores de EM. Nuestro estudio ha contribuido al desarrollo de tres líneas de acción que se deberían tener en cuenta en dicho intercambio: (1) investigar más sobre qué Conocimiento Matemático necesita el Profesor para "enseñar a visualizar" y realizar una transposición del conocimiento procedente de la investigación en Educación Matemática al espacio de docencia universitaria; (2) decidir qué parte del conocimiento propuesto debe aprender el estudiante para saber visualizar y realizar una trasposición didáctica del mismo (esto incluye pensar en cómo diseñar actividades específicas para ello); (3) fomentar una reflexión sobre la importancia de la visualización que conduzca a su revalorización y legitimación. No obstante, consideramos que hacen falta más investigaciones que las confirmen y que ayuden a superar posibles limitaciones de este trabajo.

6.2 SUMMARY IN ENGLISH

6.2.1 Introduction and Research Problem

In the last decades, studies on students' difficulties at their entrance to the University have had a prominent role in the research on higher education (Artigue et al., 2007; Gueudet-Chartier, 2008; Holton et al., 2001; Tall, 1991). Our aim is to advance ways for the improvement of teaching at University level, which help to overcome these difficulties. The approach of visualization is chosen because its importance for the understanding of the Advanced Mathematics (Arcavi, 2003; González-Martín & Camacho, 2004; Guzmán, 1996, 2002; Tall, 1991; Zimmermann & Cunningham, 1991). However, the experiences of teaching and research at university level that consider it are scarce up to this moment (Bergsten, 2007; Presmeg, 2006a; Weber, 2004; Wood et al., 2007).

The approach to the research problem has taken into account the results of a previous exploratory study about the importance of visualization in the learning of the students from our investigation context (Souto & Gómez-Chacón, 2011b; Souto-Rubio, 2009). This study showed the dependence between some understanding difficulties and deficiencies in the use of visualization. Research on mathematicians' use of images (Stylianou & Silver, 2004; Stylianou, 2002; Wilkerson-Jerde & Wilensky, 2011) indicates that they have some knowledge on visualization that allows them to use it effectively in their mathematical activity. This study relies on the assumption that the explicit teaching of this knowledge on visualization will be an excellent contribution to the improvement of the university teaching. Therefore, taking into account the results of this previous work, we propose as an object of study the "teaching of visualization":

> *The "teaching of visualization" consists in the actions, beyond the use of images, that must be done in class in order to help students to construct models of visualization (processes and products) and mechanisms of control (ability) in such way that result effective in their mathematical activity and facilitate the understanding of the mathematical concepts (likewise it happens in the case of expert mathematicians).*

The topic of the "teaching of visualization" is situated in the context of Linear Algebra (LA) because of three reasons: (1) the LA is important from a curricular perspective since, with its power of unification, it plays an essential role in the development of other Degree of Mathematics' subjects (Dorier, 2000); (2) despite its importance, neither teachers nor researchers seem to be able to find an effective way of teaching it (Hillel, 2000, p. 191); (3) the diversity of representations, languages and modes of thinking involved in LA, make this subject a difficult one for students (Dorier & Sierpinska, 2001). Therefore, this study aims to characterize and enhance the "teaching of visualization" at Lineal Algebra (LA) course in order to improve students' understanding. This aim leads us to the following research question:

> *How "to teach to visualize" in order to improve the learning and the understanding of the mathematical concepts in Linear Algebra?*

In order to do this question more operative for the empirical study, it will be divided into two specific objectives. During the research process, they were eventually detailed in sub-objectives:

1. *To observe, characterize and explain the "teaching of the visualization" in a natural environment (a first-year LA course of the Degree of Mathematics taught at the Faculty of Mathematics of the University Complutense of Madrid).*
   1.1. *To describe models of visualization and their ways of use (teaching style, causes, ways of communication, purposes, and related students´ difficulties).*
   1.2. *To identify influential factors, possibilities and limitations, in the use of visualization in class and actions relative to them.*
2. *To elaborate a proposal for the improvement of the "teaching of visualization" in the course observed that takes into account the results from the previous objective.*
   2.1. *To comprehend the role of visualization in the understanding (of the discipline of LA, in general, and of a concept, in particular) from different perspectives (epistemological, institutional, cognitive and affective), obtaining innovative and developmental ideas.*
   2.2. *To conduct experimentations around these ideas and to check their effects through the formulation of design principles of teaching strategies and materials for the "teaching of visualization".*

The first objective leads to a *descriptive-explicative* study, centered on the current teaching practices. The second one is more *prescriptive* in nature (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2006, p. 54). It explores other possibilities of the "teaching of visualization", which do not appear naturally in the observed course but may be more effective. This objective takes into account the results of the previous exploratory study on Analysis, which evidenced deficiencies with students' learning of visualization.

6.2.2 Methodology

The demand for more practical research on the "teaching of visualization" appears together with the lack of a ready-to-use theoretical framework for these kind of studies (Presmeg, 2006a; Rivera, 2011). This lead us to choose the paradigm of Educational Development (Van den Akker, 2000) and, in particular, the Developmental Research (DR) (Gravemeijer, 1994), since this methodology worries about the articulation between theory and practice.

Though this research is Mathematics-centered, the situation of the context and the participants is important for the interpretation of the results. This study was conducted between 2009 and 2011 in a first-year Degree of Mathematics of the Universidad Complutense de Madrid (UCM), which is one of the most important universities in Spain. This context has representative characteristics of the Spanish university system: the Degree program; the LA contents; the organization into lectures and seminars; the teaching style and the methods of assessment. The participants are four teachers (G., J. S. and B., the principal researcher), with diverse characteristics (attending to experience and visualization profiles) and the students who regularly attend the LA course.

The adjustment to the objectives and the context required several iterations of research and developmental cycles, which are typical of DR. Eventually, the research strategy is the following:

- Phase I. Intial Study (developmental-research cycle): this is the phase for the preparation of the experimentation and for gathering knowledge about the context. Three parts are distinguished according to their different nature:
    - The *Epistemological Study* reviews the role of the visualization in LA development, as mathematical discipline, through the analysis of historical sources.
    - The *Institutional Study* aims to know better both, the research context and the vision on visualization of the Faculty of Mathematics of the UCM, through the analysis of official documents, course materials (textbook and sheet of problems) and course observations. This vision is positioned by the analysis of other 20 LA textbooks.
    - The *Exploratory Study* serves to explore the difficulties with the learning of the LA, related to visualization, through students' answers to a questionnaire designed with this aim.

  The review of the results obtained leads to the formulation of three design principles for the "teaching of visualization".
- Phase II. Participant Observation (developmental-research cycle): this is the phase in which the experimentations are conducted, by applying the design principles. This is also the stage for in-depth and long-term observation from both, lectures and seminars. It is divided into six stages a posteriori established. During the Participant Observation, courses are video and audio recorded, field notes are taken and written documents by students are collected. This data was analyzed at the end of each stage and served to make decisions for the next one. A final reflection on the results obtained leads to the revision of the design principles and to the Quotient Vector Spaces as a relevant concept in our study.
- Phase III. The case of Quotient Vector Spaces (QVS) (case study): this is the phase to deepen the relationship between visualization and understanding via the focalization on a concrete concept. This allows the associated *conceptual scheme* to be constructed. It is divided into three stages. First, there is a study of QVS as mathematical concept (by extending the Epistemological and Institutional Studies). Second, all the episodes concerning the teaching of QVS are reviewed. Third, a specific activity on visualization that involves the concept ("Problem 7 Extended") is analyzed in detail.

The data collection is based on redundancy, triangulation and the nearest substitute principles (Pratt & Jones, 2010). The analysis combines *holistic* (Phase I and II) and *specific* (Phase III) perspectives and is granulated in microgenetic, intermediate and reflective analyses (Pratt & Jones, 2010). The communication of the information and the final presentation of the results take form of *narrative*, complemented (where possible) with more *visual* formats like *tables*, *graphics*, *conceptual maps* or *extracts of "the poster*" (which is an instrument for analyzing class observations). In the design of the research, the typical dilemmas of DR have been taken into account, such as those from the diversity of roles played by the researcher or those related to the loss of generality. These methodological aspects, among others, are established in order to promote the quality and the ethics in the study.

6.2.3 Conceptual Framework

The elaboration of the Conceptual Framework is structured into three parts, according to the DR methodology for theoretical development: Philosophical Basis, Global Theories and Local Theories.

The *Philosophical Basis* includes researcher-teacher's vision on the nature of Mathematics, how they are learnt and how they should be taught. *Mathematics* are conceived as a human activity, both individual and collective (Cobb et al., 1992, p. 17). The principal access considered to mathematical objects is through their representations. From this point of view, to understand a concept, and therefore to *learn* it, implies the construction of a rich mental image that includes the articulation of those representations. The *teaching*, linked to learning processes, is like osmosis (Guzmán, 1984) and it should provide the encouragement and the guide needed to facilitate this building process.

The *Global Theories* are structured into three basic pillars, according to the approach to the problem and the research objectives:

- *Teaching and Learning Mathematics at University Level*: it starts with the difficulties related to the Advanced Mathematical Thinking (AMT) and with the diverse theories built on it (Artigue et al., 2007; Tall, 1991). The notion of *conceptual scheme* is highlighted (Azcárate & Camacho, 2003). It continues with the review of research on secondary-tertiary transition (Gueudet-Chartier, 2008), which leads to more global perspectives of analysis. In particular, they contemplate elements from the "*classroom culture or practices*" (Presmeg, 2006a) and "*norms and beliefs*" (Cobb & Yackel, 1996). Finally, theoretical bases are settled to treat the teaching innovation at University: (1) previous experiences, such as scientific debates (Selden & Selden, 2001); (2) research on lectures (Bergsten, 2011; Weber, 2004; Wood et al., 2007); (3) theories on Mathematical Teacher Knowledge (Ball et al., 2008; Petrou & Goulding, 2011).
- *Representation and Understanding of Advanced Mathematics*: it covers theories about signs and systems of signs (Goldin, 1998; Kaput, 1998), about Diagrammatic Thinking (Dörfler, 2003a, 2004, 2005, 2006) and about registers of semiotic representation (Duval, 1993, 1999a, 1999b, 2004, 2006; Hitt, 2002, 2003, 2006). They help to specify the kind of elements of the conceptual scheme and to model the processes of understanding and meaning obtaining occurred in the mind. The social aspect of these processes is provided by Vygotsky and theories of Semiotic Mediation (Mariotti & Bartolini Bussi, 2008). They highlight the mediation of the teacher as a key dimension.
- *Visualization in Mathematics Education* (ME): it describes the wide perspective on the topic taken as starting point for our research (Figure 1), which distinguishes three dimension –product, process and ability– of the notion of visualization

(Arcavi, 2003). The literature review also offers some didactical recommendations and obstacles for its use.

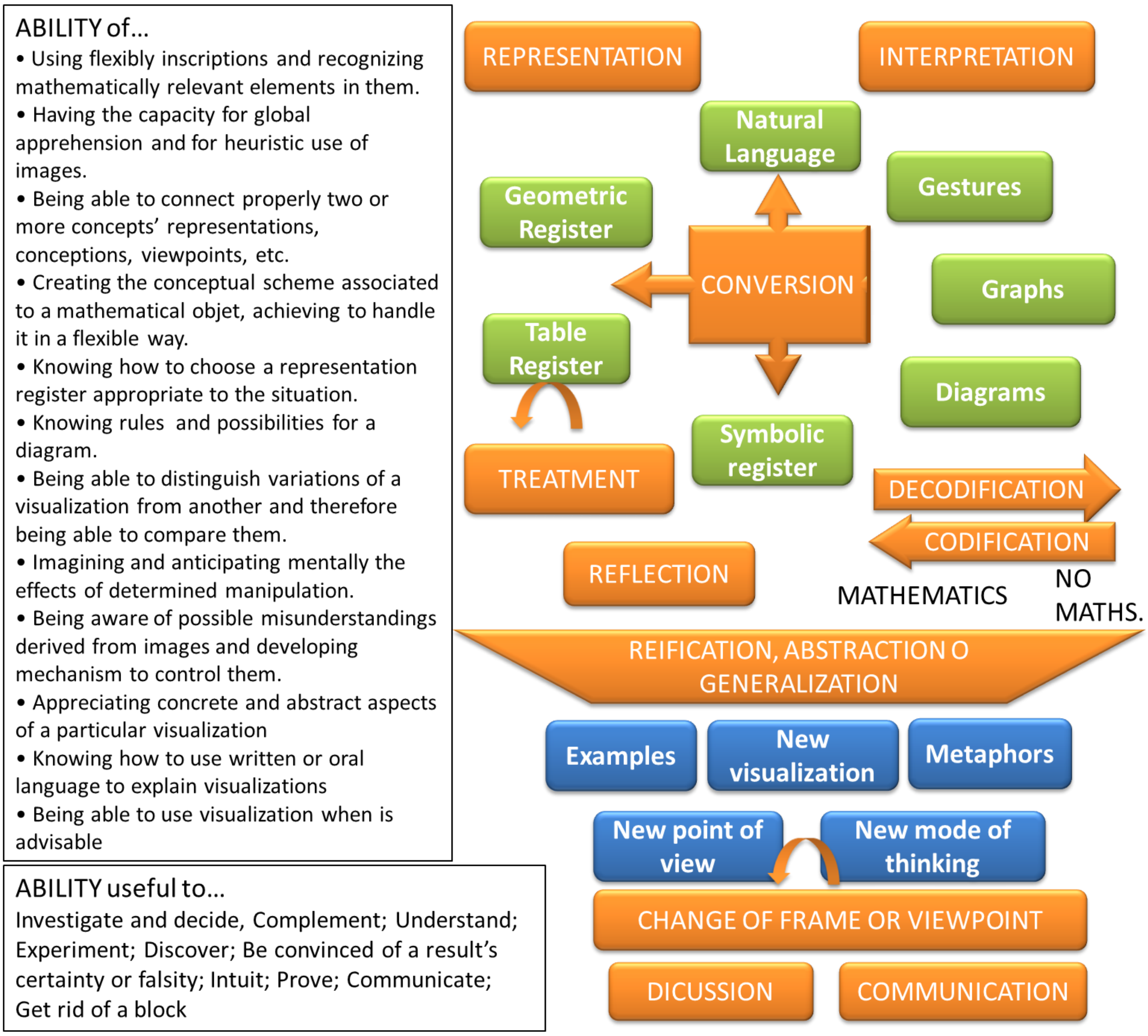


Figure 1: Scheme of the conceptualization proposed for the study of the "teaching of visualization" in LA. It takes into account the three dimensions –product (green and blue boxes), process (orange boxes) and ability (text box on the left)– of the notion of visualization (Arcavi, 2003).

The *Local Theories* concrete each of the previous topics to the specific context of LA, emphasizing those research more related to cognitive flexibility and visualization (Alves-Dias, 2007; Dörfler, 2007; Gueudet-Chartier, 2000, 2004; Harel, 1999; Hillel, 2000; Pavlopoulou, 1994; Sierpinska, 2000; N. Sinclair & Gol Tabaghi, 2010; Stewart & Thomas, 2007). The background of LA didactics (Aydin, 2009; Carlson, 2004; Dorier & Harel, 1997; Dorier & Sierpinska, 2001; Dorier, 2000, 2002) is detailed and serves to guide, place and explain our results. Local Theories eventually are a target for development (Figure 2).

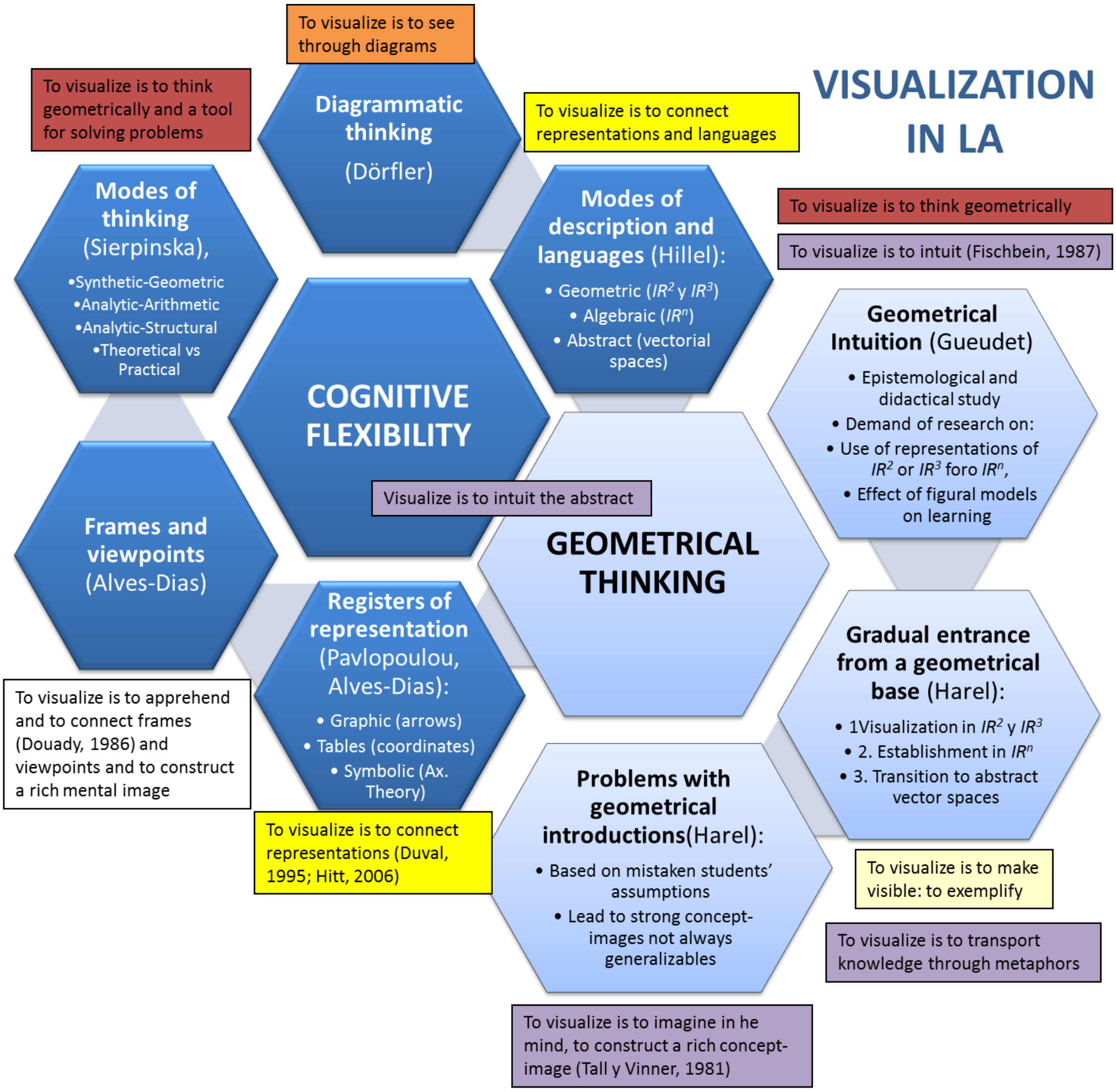


Figure 2: Revision of LA research related to visualization. The models found in our study (Figure 1) allows integrating them in a coherent way.

6.2.4 Phase I: Initial Study

The *Epistemological Study* is based on the review of secondary historical sources which addresses similar studies on the development of LA (Bourbaki, 1972; Dorier, 2000, Parte I; Gueudet-Chartier, 2000; Kleiner, 2007, pp. 79–89; O'Connor & Robertson, 1996; Tucker, 1993; Vitulli, 2004). It results in a Chronological Axis that summarizes its historical, psychological and sociological characteristics. This analysis shows that the Geometry did not naturally lead to the consolidation of the formal theory of vector spaces, despite being a source of inspiration and credibility at the beginning. However, the coordination of (algebraic and geometric) languages and modes of thinking, together with the development of an appropriate notation, were fundamental in this process. The review of classical LA textbooks (Dieudonné, 1964; Grassmann, 1995; Halmos, 1974) completes this overview by giving more direct evidences of two complementary mathematicians' perspectives on the role of visualization in LA: one in which it is seen as a source of experimentation, inspiration and intuition; other in which it appears as a first step, that should be overcame, in order to achieve more general reasoning. Both perspectives have coexisted along history until the second eventually took advantage over the first one, leaving visualization aside (Davis, 1993; Guzmán, 1996). However, this prevailing stance forgets the importance that visualization had, and still has, in the development of mathematical ideas. Thus, it can lead to epistemological obstacles for the students.

The *Institutional Study* reveals an institutional vision on visualization dominated by formalism and rigor, according to the historical evolution of the discipline. Symbolic and tables registers are the most common ones, both in the Teaching Guide and in course's Textbook. They appear in combination with an algebraic language. The classes observed maintained this level of rigor and technicality, but they are richer in intuitive elements and aspects related to meaning creation. For this reason, we decided to do in-depth observation of the classes during the next phase. The analysis of the 20 LA textbooks (chosen according three different criteria related to visualization) indicates the existence of alternatives closer to the idea of the "teaching of visualization", helps to identify the kinds of representations (and their ways of use) employed in LA and gives innovative ideas for material design.

An important fact derived from *Exploratory Study*'s results is the presence of learning difficulties related to the lack of the ability to visualize. Students' answers to the questionnaire reveal that they do not completely understand since they are not able: to coordinate different representations; to connect and to readjust their intuitions according to formal definitions taught in class; to handle with flexibility several modes of thinking, etcetera. These kinds of difficulties are due to cognitive obstacles produced in students' minds and could be reinforced by teaching modes.

The reflection on the results from the Initial Study leads us to formulate three design principles, which would guide the experimentation (see left column of table in Figure 4)

6.2.5 Phase II: Participant Observation

The episodes collected during more than 20 weeks of *observation* are codified and analyzed via "the poster", an instrument that enables global and local vision at the same time. The results point out that the "teaching of visualization" is a complex and transversal phenomenon that happens situated in a particular context and moment. Through the narrative of the episodes observed, along the six stages of this phase, it is possible to detail possibilities and obstacles affecting it. Influential aspects are identified too, such as: the content, the agents (with certain knowledge and a particular visualization profile, determined by their beliefs of Mathematics, Education and visualization); the means of visualization (it is different to use a two or three-dimensional model); the teaching style and purpose; and class culture and practices (norms, degree of participation promoted). Five models of visualization have been detected (Figure 3): handling and coordination of representations (REPR); diagrammatic thinking (DIAG); development of intuition and mental images (INT); use of Geometry (GEOM); and promotion of flexibility (FLEX). These models have been enumerated according to their frequency in the course, though the last model, being involved with the others, is difficult to quantify. The identification of topics related to each model allows the description of their way of use in the course. In general, the explicitness is best to REPR followed by GEOM. The rest of models are used more vaguely.

MODEL	DESCRIPTION	WAY OF USE
Handling and coordination of representations **Examples (QVS):** Formal definition and Notation of equivalence classes.	Product: representations in tables and symbolic register (types of LA representations has been identified). Process: representation, treatment, conversation, discussion, communication. Ability: to know how to represent, to transform, to choose representations; to be able to compare them, to predict the effects of a transformation.	Teaching style: logical-structural and procedural (formal episodes). Purpose: to enunciate results, clarify notations, provide equivalent representations, explain technical steps of a demonstration, develop examples, explicit mathematical ideas; due to students' queries. Communication: quite explanation about its management, sometimes with the aid of diagrams or metaphors. Difficulties: plentiful, related with the notation and the mechanical learning.
Diagrammatic thinking or using diagrams **Examples (QVS):** Structure transport, Canonical Factorization diagram, Venn diagram for classifications.	Product: diagrams (in implications or equalities; in matrix reasoning; arrow, commutative or set diagrams). Process: transformation, interpretation, abstraction, discussion, communication, reflection. Ability: to know the rules of handling, be able to identify relevant elements, create flexible conceptual schemes.	Teaching style: procedural. Purpose: to synthesize information, summarize processes, communicates ideas of type META, help understanding or remembering, to get an idea of what happens, as content itself. Communication: its clarifying use is detrimental to its explanation, specific configurations are used, symbols such as □, ○, Δ are used to make them aware of to certain elements and simplify the writing, arrows for relations. Difficulties: few, used spontaneously as support for study, sometimes with errors.
Intuition development and mental images. **Examples (QVS):** Bags and nails metaphors.	Product: metaphors, everyday life examples, illustrations, natural language. Process: codification and de-codification, abstraction, change of point of view, communication, reflection y discussion. Ability: create rich and flexible conceptual schema, be aware of potential misunderstandings of intuition, knowing how to use oral language to explain visualizations.	Teaching style: semantic. Purpose: to establish analogies, to make sense of a definition, to help to understand or remember META processes; to explain management representations intuitively, to justify any step in a demonstration or draw analogies with similar, to show something as evident, to explicit mental connections (problems resolution). Communication: little explicitness, use of mathematical language to META comments and natural language for examples and metaphors; sometimes with the help of illustrations or diagrams. Difficulties: some, due to (uncontrolled) overconfidence on intuition.
Geometric thinking or using Geometric. **Examples (QVS):** MICRO MACRO	Product: representation in a graphic register, gestures and mathematical language. Process: interpretation, representation, few treatments, conversion, exemplification, changes of point of view. Ability: to know how to identify relevant elements, to apprehend globally, to connect points of view; to be able to use the visualization; to appreciate the concrete and the abstract; to be aware of possible misunderstandings.	Teaching style: all (more prominent in semantic). Purpose: to illustrate or exemplify (logical structure), as a complement, support or guidance from algebraic arguments (procedural); to make sense, convince or establish connections (semantic); as mathematical argument (more in seminars); due to student interaction. Communication hard; graphic (IR^2), but not necessarily; elicitation of elements because of the interaction; coordinated or subordinated to the algebraic. Difficulties: many, they confuse affine with vectorial; lack of fluency, they have trouble distinguishing relevant elements or imagine image changes; they are not used to invoke it naturally.

Development of flexibility. **Examples (QVS):** Examples ($\mathbb{Z}_n$, S^1) Different conceptions.	Product: those of the other models and also mathematical analogies and examples. Process: all, in particular coordinate representations; abstraction, exemplification, concretion, reflection. Ability: to be able to connect visualizations, articulate the conceptual schema, check.	Teaching style: all (combined with another models). Purpose: to relate with previous knowledge, to exemplify, to get an idea of the situation; to solve problems in different ways, to check; like a new point of view, like a revisited content.; due to students' queries. Communication: vague, despite of being enhanced with specific terminology. Difficulties: enough; they do not flexibly change of the mode of thinking; lack of coherence in answers.

Figure 3: Visualization models identified in the investigation, from both theoretical and practical level, and forms observed of using them in class. Excepting the last model for the promotion of flexibility (which has been placed down because it encompasses the previous ones), the others are ordered from highest frequency of appearance (top) to lowest (bottom).

The *experimentation* turns around the three design principles formulated in the previous phase of research. It enables to collect information about students' difficulties and perceptions, which vary according to the profile of visualization. Students' difficulties identified are related to: a deficiency in the use of registers (particularly the graphic one); the uncontrolled used of intuition or the reluctance on it (due to the lack of habit or to the belief that it is invalid). The actions promoted by the design principles are appropriate to face these difficulties, since they encourage the following elements: (1) students' habit of visual methods (in relation to the change of class culture promoted by the first and third principles); (2) an specific training that help them to control efficiently the difficulties associated to these methods (contemplated by the second principle); (3) a legitimization of visualization that show the student its validity and help them to distinguish how and when to use it (such as the third principle claims). The design principles are reviewed and reformulated taking into account the results of the experimentation. That brings a proposal for the "teaching of visualization" development and improvement, adapted to the context (Figure 4).

PRINCIPLES	ACTIONS	EVALUATION
1. Increasing participation: *In order to enhance individual and collective meaning creation, other class organizations should be procured that potentiate social interaction and participation (such as cooperative work and scientific debate), thus students are closer to mathematicians' languages and practices and the communication with and on visualization is made possible.*	- By doing a good anticipation (taking into account several solving methods, students' difficulties).	- It improves mediation, decrease affective and cognitive obstacles (by giving more confidence and knowledge to the teacher) and facilitates time exploitation.
	- By promoting the search of varied solving methods (including visual, intuitive or incorrect ones) and the reflection on them. - By accepting diversity of answers, establishing connections among them and formalizing the more intuitive ones. - By checking and giving sense to solutions.	- It attends to the diversity of visualization profiles and shows desirable practices (for students to imitate).
	- By being aware and promoting the interaction with students, who should be asked to make explicit their thoughts and handlings of visualization.	- It takes advantage of the opportunities to "teach to visualize" that participation offers.

2. *Using visualization with explicit attention:* *In order to promote the coordination and connection of diverse LA characteristic representations, languages and modes of thinking, they must be flexibly used and handled with an explicit communication of the relations in them; thus the understanding of the disciplines may increase through the incorporation of the previous elements in students' minds.*	- By taking advantage of new concept's presentations to promote multiple representations and to show how to think with each one. - By comparing visualizations (tables and metaphors are useful to this aim), by distinguishing their elements and by highlighting relevant relationships. - By knowing each model's characteristics and by exploiting their communicative possibilities.	- Visualization processes are taken into account and DTP characteristics are used to explain and enhance them.
	- By proposing specific visualization activities (see Figure 7).	- The natural inertia and tendency of using the same mode of thinking are avoided. - Sociocultural and cognitive obstacles are reduced, since the use of visualization is legitimized and it is practiced.
	- By developing a specific language that enables talking, understanding, sharing and reificating knowledge on visualization.	- It responds to cognitive obstacles, but leads to the paradox of communication. - It facilitates time exploitation
	- By taking into account students' answers may be poorer in the explanation of visualization handling.	- Students' difficulties are taking into account, giving opportunities for them to clarify cognitive obstacles.
3. Legitimizing visualization: *In order to convert visualization into a valid tool for reasoning, which serves as a way for intuition, it should be adequately legitimized by paying attention to the related messages and actions; thus students gets closer to it making possible its posterior development.*	- By encouraging a collective reflection on institutional vision on visualization (which includes activities and evaluation). - By encouraging an individual reflection of teachers that reinforce positive beliefs on the use of visualization.	- It pays attention to sociocultural obstacles and to the paradox of the status of visualization.
	- By developing previously the knowledge necessary (for both, teachers and students) to its appropriate handling and understanding, avoiding a "naif" use of visualization related to the lack of recognition of its complexity.	- It deals with cognitive demands of visualization (foreseeing the lack of students' knowledge) and with the paradox of its simplicity.

Figure 4: Proposal of strategies for the improvement of the "teaching of visualization" in the observed course. It has been elaborated from the formulation, application (through actions), revision and evaluation (regarding the possibilities and obstacles of the context) of the three design principles.

6.2.6 Phase III: The case of Quotient Vector Spaces (QVS)

QVS are chosen for a deeper analysis ought to three main reasons: (1) it is a key concept in students' cognitive trajectory though, at the same time, is one of the most difficult for them, together with Dual Spaces; (2) QVS accumulate the highest amount of visualization episodes (either lectures or seminars), offering a rich ambit for analysis; (3) QVS show an instability between understanding and visualization (apparently contradictory with the initial position, which sustains that the more visualization the better understanding). These reasons lead us to the following questions: What makes QVS so hard to teach and learn? How to teach this concept more efficiently?

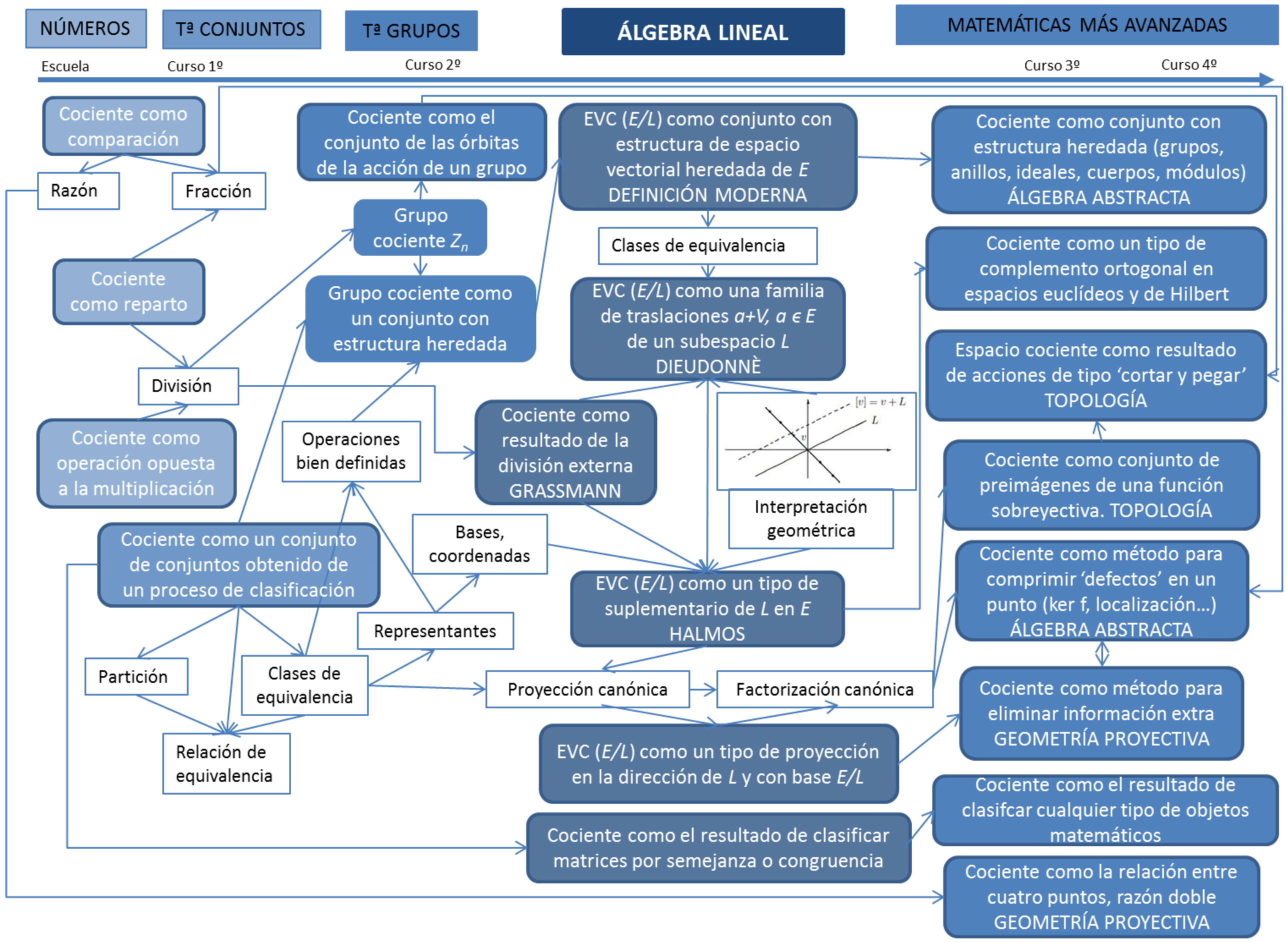


Figure 5: Conceptual map that summarizes the analysis of QVS as a mathematical concept, showing the different quotients' conceptions. It represents the advance (by columns, from school on the left to last courses of the Degree on the right) of different conceptions of the quotient (in dark rounded boxes), their interactions (arrows) and the relations with other notions and representations needed for the development of the concepts (white squared boxes).

The analysis of QVS as mathematical concept points out that is a complex notion, either from an epistemological or a cognitive perspective. That makes it difficult to learn. It depends on other notions such as: equivalence (relation and classes); partitions: abstract algebraic structure of vector space; translated subspaces; complementary subspaces; bases, coordinates and dimension. Thus, a high level of abstraction is needed in order to understand it, reason for the late development of the concept (at the end of 19th century). The coordination of the different quotients' conceptions is needed too (Figure 5). These are fundamental for the mathematical development of the concept in the horizon. However, QVS' formal definition does not necessarily encapsulate all these different conceptions. Therefore, an efficient teaching of the concept, which enhances *cognitive flexibility*, should pay attention not only to the definition but also to the others conceptions. To explain them explicitly and in a flexible way, adapted to students' level, requires of a big amount of Mathematical Teacher Knowledge (which has been detailed through the analysis made). This reason justifies why QVS are difficult to teach too.

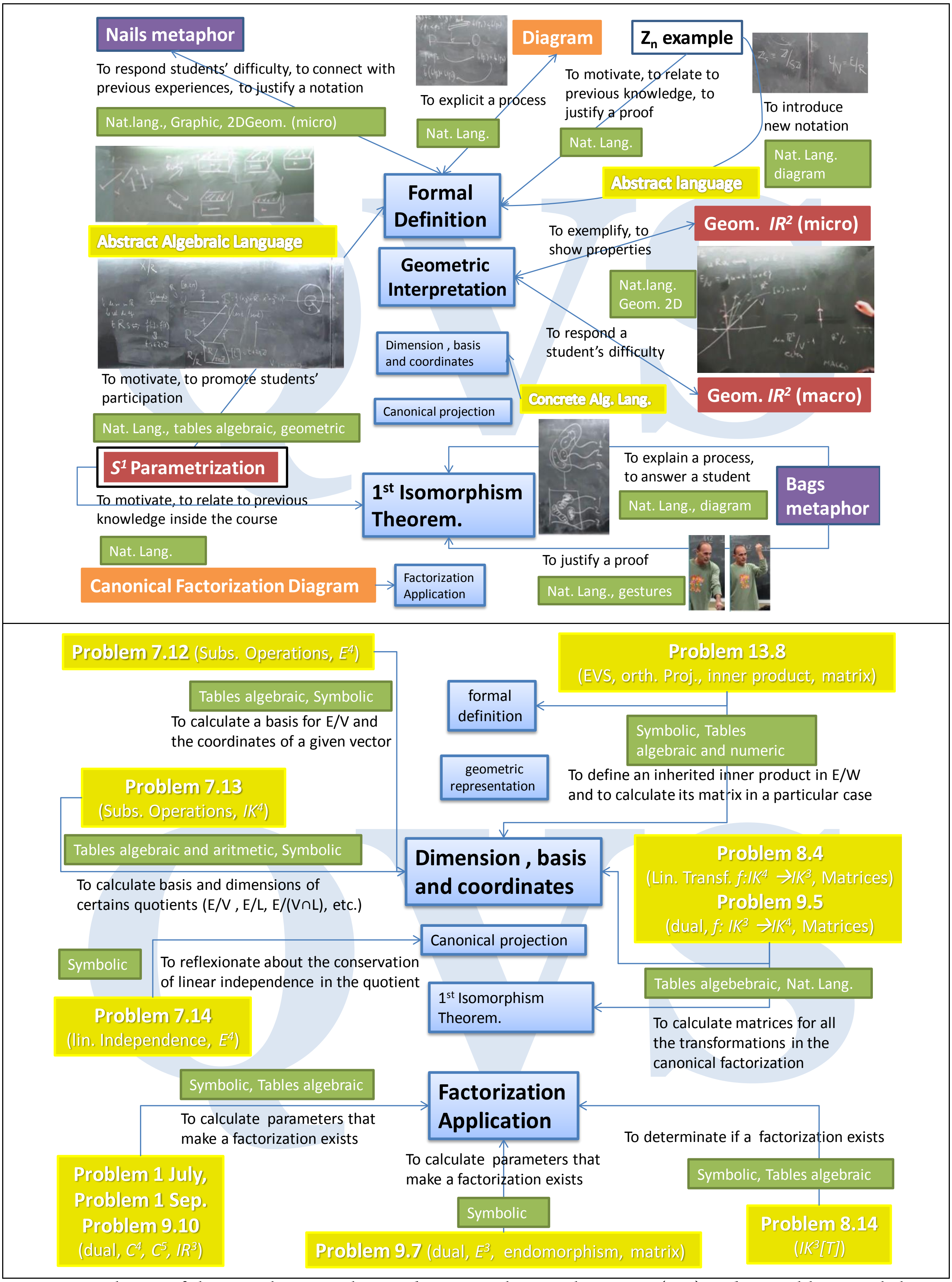


Figure 6: Scheme of the visualization observed in QVS' class explanations (top) and in problem worksheets and exams (down). Colors indicate the kind of model (Figure 1) and the size of the centered boxes reflects the frequency of each content relative to QVS.

The contrast between visualization episodes in QVS' explanations and QVS' problems given to students explains the instability observed between visualization and understanding (Figure 6). There is a significant gap between the role of visualization in class explanations and students' activity: contents explained in class with visualization hardly intersect contents treated in problems, which do not need of it to be solved. Thus, visualization in the classroom serves to complement, illustrate and make sense of the QVS while students may leave it aside when solving problems. Thus, in order to improve the teaching of this concept, we propose to develop specific visualization activities that allow students practicing this tool. The experimentation with "*Problem 7 Extended*" allows us to advance some of the elements and characteristics that should be taken into account in the design of a visualization-understanding-enhancer activity. The Figure 7 summarizes these aspects and exemplifies them with characteristics included in this problem.

ELEMENTS	**CHARACTERISTICS**	**APPLICATION EXAMPLE**
Anticipation	It should be based on a in-depth study of mathematical contents and visual models involved (a complete Mathematical Teacher Knowledge is needed).	The study of QVS as a mathematical concept enables to detail the associated Mathematical Teacher Knowledge.
Specific objectives	They should involve aspects of visualization as PRODUCT or ABILITY. These may be: - <u>Operative</u>: to interpret, create, transform representations; to learn how to coordinate two of them or how to choose the appropriate representation, etc. - <u>Conceptual</u>: to construct a new viewpoint of a concept, to understand it better through a new connection in the conceptual scheme associated, to reflect on visualization handling (mechanism for control), etc.	To practice graphic representations, to build on a diagram and to understand it geometrically; to connect diversity of representations and conceptions (projections, QVS), to imagine and understand an isomorphism, to value notation in Mathematics, to learn to visualize a problem after solving it.
Methodology	It should combine consecutive phases of meaning construction (inspired on Semiotic Mediation Theories): - <u>Individual</u>: in the work at the beginning (of familiarization with the problem) or final (of META reflection). - <u>Collective:</u> in (pairs or groups) developmental work and in the formalization of the problem (whole group discussions).	1) Group work (of 4 o 5 students). 2) Individual and group development; redaction of the written answer. 3) Sharing in group discussions in tutorials. 4) Individual reflection (lacking).
Heading	It should take into account possible students' interpretations and contemplate the use of visualization models (by considering their PRODUCT aspect): - <u>Explicitly</u>: including or asking for representations in particular registers, diagrams, illustrations, metaphors, etc. - <u>Implicitly:</u> giving enough data to connect to another model or admitting diversity or solving methods (including visual ones).	The heading is in natural language, with symbolic and table registers; but it ask for graphical representations, for algebraic and geometrical explanations (giving specific clues). for spatial imagination and for the construction of a diagram.
Mediation	It is guided by a "problem tree" (Morera, 2013) which takes into account: - M<u>athematical and visualization contents:</u> concepts and levels of visualization needed to understand the problem. - <u>Visual objectives of the activity</u>: questions that enhance a change of representation mode or viewpoint, the reflection on certain visualization, etc. - <u>Students</u>: their previous knowledge, their individual differences (of visual preference and participative character).	The "tree problem" includes: questions to check the understanding of needed concepts; simpler visualization tasks; dialogues between algebraic and geometric modes of thinking; and branches that take into account students' possible methods and difficulties.

Figure 7: Elements and characteristics recommended for visualization-understanding-enhancer activities, that is, activities for "teaching to visualize".

6.2.7 Discussion and Conclusions

The discussion of results, regarding the research objectives, shows that they positively respond to the aim proposed. In relation to the first one we conclude that, despite the course fits into a Definition-Theorem-Proof (DTP) format (Slomson, 2010; Weber, 2004; Wood et al., 2007), *there is a (situated) use of visualization*. The in-depth study of a teaching university case is one of the main contributions of this Thesis. It has offered the opportunity to identify new teaching styles and models of visualization (Figure 3). The course takes advantage of different possibilities of visualization related to illustrating, complementing, communicating and understanding; less common are those related to proving, investigating, discovering and experimenting (except in some experimental episodes from seminars). Course's use of visualization is limited by several obstacles (Arcavi, 2003; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Guzmán, 1996). These obstacles induce: contradictory messages on the use of visualization, the lack of specific activities and the absence from assessment. Therefore, there is a vicious circle around the "teaching of visualization" that positions it in the role of didactical tool (*the course teaches with visualization*) rather than the role of a helpful tool in doing mathematics (*the course does not teach visualization*).

Results correspondent to the second objective points out, from different points of view (epistemological, institutional, cognitive and affective) that, despite of the observed instability, the visualization is necessary for understanding and is inherent in the teaching and learning processes of Advanced Mathematics. Therefore, it is worthy to research on how to handle it when teaching. Several ways for doing it are shown by the reflection on experimentation (Figure 4 and Figure 7), leading to a proposal for the improvement of the observed course (being this another important contribution of this work). However, the question of how to "teach to visualize" is a complex one. It leads to some paradoxes that are still waiting for an answer, such as: *the paradox about students' participation, the paradox about the simplicity of visualization, the paradox on communication of visualization; the paradox on the legitimization of visualization; and the paradox of making explicit the visualization*.

Finally, the research question is answered by formulating didactical recommendations in relation to the five actions found to characterize a "teaching of visualization" that enhances understanding. These actions are: (1) to use visualization in class; (2) to explain and to make explicit relevant elements in visualization; (3) to promote discussions and reflections on its use; (4) to do visualization specific activities; (5) to legitimize and to evaluate its use. In order to achieve the conditions needed for these actions, we propose to consider visualization as another teaching content of university courses. This action would be effective if and only if it is accompanied by an interchange between mathematicians and ME researchers. Three directions of action should be taken into account in this interchange, according to our study: (1) to investigate more about the Mathematical Teacher Knowledge needed to "teach to visualize", thinking on how to do a transposition of it from EM research to the ambit of university teaching; (2) to decide which part of this knowledge students should learn in order to know how to visualize and think about how to do its didactical transposition (that includes to think about the design of specific activities); (3) to encourage individual and collective reflections on the importance of visualization, leading to its revalorization and legitimization. However, more research that confirms them and helps to overcome possible limitations of our work are needed.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 149–175. doi:10.1007/s10649-006-9049-x

Alsina Catalá, C. (2006). *Math made visual : creating images for understanding mathematics*. Washington : The Mathematical Association of America.

Alves-Dias, M. (2007). Articulação entre os diferentes registros de representação simbólica em Geometria Afim. *Revista UNIFIEO. Caderno de Pesquisa IFIP*, *VI*(10), 101–127.

Antonini, S., Presmeg, N., Mariotti, M., & Zaslavsky, O. (2011). On examples in mathematical thinking and learning. *ZDM*, *43*(2), 191–194.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24–35.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215–241.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the learning of mathematics*, *25*(2), 42–47.

Artigue, M. (1994). Didactical Engineering as a Framework for the conception of the teaching products. In *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

Artigue, M. (2001). What Can We Learn from Educational Research at the University Level? In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld, ... J. C. e Silva (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7, pp. 207–220). Springer Netherlands.

Artigue, M. (2008). Didactical design in mathematics education. In *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08* (pp. 7–16). Rotterdam: Sense Publishers.

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics Thinking and Learning at Post-Secondary Level. In *NCTM Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 1011–1049). Information Age.

Artigue, M., Gueudet-Chartier, G., & Dorier, J.-L. (2000). Presentation of Other Research Works. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 247–264). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In *Research in Collegiate Mathematics Education* (pp. 1–32). American Mathematical Society.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D. M., Morics, S., & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(3), 241–309. doi:10.1016/S0732-3123(97)90029-8

Aspinwall, L., Shaw, K., & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections Between A Function And Its Derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 301–317. doi:10.1023/A:1002976729261

Aydin, S. (2009). On Linear Algebra Education. *Inonu University Journal of The Faculty of Education*, *10*(1), 93–105.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X*(2), 135–149.

Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. Notas sobre las relaciones entre tres conceptos claves en didáctica. *Revista EMA*, *9*(3), 181–204.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389 –407. doi:10.1177/0022487108324554

Banchoff, T., & Wermer, J. (1992). *Linear Algebra Through Geometry* (2nd. ed.). New York [etc.]: Springer.

Barquero, B. (2011). 'Applicationism ' as the dominant epistemology at university level. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1938–1948). Presented at the CERME 7, Rzeszów, Poland: University of Rzeszów, Poland.

Bergsten, C. (2007). Investigating Quality of Undergraduate Mathematics Lectures. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(3), 48–72.

Bergsten, C. (2011). Why do Students go to Lectures? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1960– 1970). Presented at the CERME 7, Rzeszów, Poland: University of Rzeszów, Poland.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2006). Diversity of theories in mathematics education—How can we deal with it? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(1), 52–57. doi:10.1007/BF02655905

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126–154). Presented at the PME30, Praga, República Checa.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the Learning of Mathematics*, *29*(3), 31–36.

Blanco, I. P. (2010). Actividades de visualización para la formación de profesores de matemáticas: el método de Alicia Boole Stott. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, *13*(1), 135–152.

Bliss, J., Monk, M., & Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research. A guide to users of systemic networks.* London: Croom Helm.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza,.

Bråting, K., & Pejlare, J. (2008). Visualizations in Mathematics. *Erkenntnis*, *68*(3), 345–358. doi:10.1007/s10670-008-9104-3

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*, *41*, 177–182.

Burgos, J. de. (2006). *Algebra Lineal Y Geometría Cartesiana* (3ª ed.). Madrid: McGraw-Hill.

Burton, L. L. (2002). Methodology and Methods in Mathematics Education Research: Where Is “The Why”? In S. Goodchild & L. D. English (Eds.), *Researching Mathematics Classrooms: A Critical Examination of Methodology* (pp. 1–10). Greenwood Publishing Group.

Burton, L. L. (2004). *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics*. Springer.

Cantoral, R. (2002). *Visualización, Semiosis e Intuición en la Enseñanza de las Funciones en Matemáticas.* Presented at the Conferencia: “Visualización y pensamiento matemático: estrategias de enseñanza.”

Card, S. K., Mackinlay, J. D., & Shneiderman, B. (1999). *Readings in Information Visualization: Using Vision to Think*. Morgan Kaufmann.

Carlson, D. (2004). The Teaching and Learning of Tertiary Algebra. In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal, B. Barton, & J. C. e Silva (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra, the 12th ICMI Study* (Vol. 8, pp. 293–309). Kluwer Academic Publishers.

Castañeda, F. (2004). Visualización y Matemáticas (pp. 105–126). Presented at the “Un paseo por la geometría,” Universidad del País Vasco.

Castellet, M., & Llerena, I. (1996). *Algebra lineal y geometría*. Barcelona: Reverté.

Charles, K., & Nason, R. (2000). Young children’s partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(2), 191–221. doi:10.1023/A:1017513716026

Chevallet, J., Flory, G., & Warusfel, A. (1984). *Algèbre Linéaire* (Vol. 1). París: Vuibert.

Chin, E.-T., & Tall, D. (2001). Developing formal mathematical concepts over time. In M. van den Hauvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 241–248). Presented at the PME 25, Utrecht, Netherlands.

Churchill, A. (2003). Maths Lecturing Tips from an Audience Member’s Point of View. Retrieved September 3, 2012, from http://www.pilgrim.demon.co.uk/alex/lecturing.html

Clements, D. H., & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13. doi:10.3102/0013189X032001009

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, *31*(3/4), 175.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 2–33. doi:10.2307/749161

Confrey, J., & Carrejo, D. (2005). Ratio and Fraction: The Difference between Epistemological Complementarity and Conflict. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *13*. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/30037732

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 333–344. doi:10.1007/BF01273369

Day, J., & Kalman, D. (1999). Teaching linear algebra: What are the questions. *Department of Mathematics at American University in Washington DC*, 1–16.

De Freitas, E., & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1), 133–152. doi:10.1007/s10649-011-9364-8

De Vleeschouwer, M., & Gueudet-Chartier, G. (2011). Secondary- Tertiary transition and evolutions of didactic contract: the example of duality in Linear Algebra. In *Proceedings of CERME 7*. University of Rzeszów, Poland.

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris: Hermann.

Dieudonné, J. (1971). *Algebra lineal y geometría elemental*. Madrid: Selecciones Científicas,.

Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2141–2159.

Dörfler, W. (2003a). Diagrams as Means and Objects of Mathematical Reasoning. In *Developments in mathematics education in German-speaking countries : selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Potsdam, 2001* (pp. 39–49). Hildesheim: Verlang Franzbecker.

Dörfler, W. (2003b). Observación y Diseño en Pruebas Matemáticas. *La Lettre de la Preuve. International Newsletter on the Teaching and Learning od Mathematical Proof*. Retrieved from http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/03Printemps/ObservationCastillano.pdf

Dörfler, W. (2004). Mathematical reasoning: Mental activity or practice with diagrams. In M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Presented at the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen (Denmark): IMFUFA, Roskilde University, Roskilde.

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic Reasoning. Affordances and Constraints. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 57–66). Springer.

Dörfler, W. (2006). Inscriptions as objects of mathematical activities. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 97–111). Sense Publishers.

Dörfler, W. (2007). Matrices as Peircean diagrams: A hypothetical learning trajectory. In D. Pitta, P. Philippou, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 852–861). Presented at the CERME 5, Larnaca, Cyprus: Department of Education - University of Cyprus.

Dorier, J.-L. (2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.-L. (2002). Teaching linear algebra at university. In *Proceedings of the ICM* (Vol. Pequín, China, pp. 875–884). Beijing: Higher Education Press.

Dorier, J.-L., & Harel, G. (1997). *L'enseignement de l'algebre lineaire en question*. Grenoble : La pensee sauvage.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000a). The Meta-Level. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 151–176). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000b). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85–124). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.-L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld, ... J. C. e Silva (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7, pp. 255–273). Springer Netherlands.

Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33–48). Presented at the PME15, Assisi, Italia.

Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1999). Cabri-based linear algebra: transformations. In *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Vol. I + II* (pp. 209–221). Presented at the CERME 1, Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 267–305. doi:10.1007/BF01273732

Dubnov, Y. S. (1994). *Errores en las demostraciones geométricas*. Madrid : Rubiños, D.L.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. In F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173–201). Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999a). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Presented at the 21 NA-PME, Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Duval, R. (1999b). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004). A crucial issue in mathematics education: The ability to change representation register. In M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Presented at the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen (Denmark): IMFUFA, Roskilde University, Roskilde.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103–131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25–37). Mathematical Association of America.

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual Frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist: Implications for mathematics Education researches. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteen Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 202–220). Presented at the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Blacksburg, virginia, USA.

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning : analogies, metaphors, and images*. Mahwah, New Jersey [etc] : Lawrence Erlbaum Associates.

Farin, G., & Hansford, D. (2005). *Practical linear algebra : a geometry toolbox*. Wellesley, Mass. : A K Peters, c.

Fernández, S., & Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. In M. Moreno, J. Carrillo, & A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291–301). Presented at the SEIEM, Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Fernando, J. F., Gamboa, J. M., & Ruiz, J. M. (2010). *Álgebra Lineal* (Vols. 1-2). Madrid: Sanz y Torres.

Figueiras, L., & Arcavi, A. (2012). Learning to see: the viewpoint of the blind. In *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 597–608). Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *23*(2), 217–226.

Filloy, E., & Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. In A. J. Bishop, M. A. (Ken) Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, pp. 139–160).

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics : an educational approach*. Dordrecht ; Lancaster : Reidel, cop.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.

Fletcher, T. J. (1972). *Linear Algebra, Through Its Applications*. London [etc.]: Van Nostrand Reinhold Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Gardner, M. (1978). *Aha! insight*. New York, [etc]: Scientific American.

Giaquinto, M. (1994). Epistemology of Visual Thinking in Elementary Real Analysis. *The British Journal for the Philosophy of Science*, *45*(3), 789–813. doi:10.1093/bjps/45.3.789

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics: an epistemological study*. Oxford University Press, USA.

Goldin, G. A. (1998). The PME Working Group on Representations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 283–301. doi:10.1016/S0364-0213(99)80063-9

Gómez-Chacón, I. M. (2012a). Affective pathways and interactive visualization in the context of technological and professional mathematical knowledge. In M. Hannula (Ed.), *Mathematics related affect.* (Vol. 17 (3–4), pp. 57–74). Nordic Studies in Mathematics Education (Nordisk Matematikk Didaktikk).

Gómez-Chacón, I. M. (2012b). Affective pathways and visualization processes in mathematical learning within a computer environment. In *MAVI Mathematical Views*. Presented at the MAVI Mathematical Views, Universidad de Helsinki (Finlandia).

Gómez-Chacón, I. M. (2013). Interactive Visualization and Affect in Mathematical Problem-Solving by Prospective Teachers. *Montana Mathematics Enthusiast Journal, Special volume to International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education*, *10*(1 y 2), 61–86.

Gómez-Chacón, I. M., & Escribano, J. (2012). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental génesis. In *Proceedings ETM-4 Symposium Mathematical Work Space*. Universidad de Montreal (Canadá).

Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2011). Les espaces de travail Géométrique de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles. *Annales de didactique et de sciences*, *16*, 187–216.

Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2013). Spaces for Geometric Work: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

González-Martín, A. S., & Camacho, M. (2004). Legitimization of the Graphic Register in Problem Solving at the Undergraduate Level: The Case of the Improper Integral. In *International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cape Town, South Africa.: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Goodchild, S. (2008). A Quest for “Good” Research. In Barbara Jaworski & T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 201–220). Sense Publishers.

Grassmann, H. (1995). *A new branch of mathematics : the “Ausdehnungslehre” of 1844 and other works*. Chicago: Open Court,.

Gravemeijer, K. (1994). Educational Development and Developmental Research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443–471.

Greenwood, D. J. (2000). De la observación a la investigación-acción participativa: una visión crítica de las prácticas antropológicas. *Revista de antropología social*, (9), 27–49.

Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. xi). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Gueudet-Chartier, G. (2000, November 21). *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire.* Université Joseph Fourier- Grenoble 1.

Gueudet-Chartier, G. (2002). Geometrical and Figural Models in Linear Algebra. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Presented at the 2nd 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), Crete , Greece: John Wiley & Sons Inc.

Gueudet-Chartier, G. (2003). Geometric Thinking in a n-space. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Presented at the CERME 3, Bellaria, Italia.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and its Applications*, *379*, 491–501.

Gueudet-Chartier, G. (2006). Using Geometry to Teach and Learn Linear Algebra. In A. Selden, F. Hitt, G. Harel, & S. Hauk (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VI (CBMS Issues in Mathematics Education)* (Vol. 13, pp. 171–195). American Mathematical Society.

Gueudet-Chartier, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 237–254. doi:10.1007/s10649-007-9100-6

Gunn, C. (1993). Discrete groups and visualization of three-dimensional manifolds. In *Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 255–262). New York, NY, USA: ACM. doi:10.1145/166117.166150

Gutiérrez, Á. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. In *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría* (pp. 44–59). Presented at the Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (Valencia, 1991).

Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–19). Presented at the PME20.

Guzmán, M. de. (1984). El papel de la matemática en el proceso educativo inicial. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *2*(2), 91–96.

Guzmán, M. de. (1993). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. In D. Gil Pérez, M. de Guzmán, & Organización de Estados Iberoamericanos para la educación, la ciencia y la cultura (Eds.), *Enseñanza de las Ciencias y de las Matemáticas. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Popular.

Guzmán, M. de. (1996). *El rincón de la pizarra : ensayos de visualización en análisis matemático : elementos básicos del análisis*. Madrid : Pirámide, D. L.

Guzmán, M. de. (2001). *Para pensar mejor : desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid : Pirámide.

Guzmán, M. de. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of Mathematical Analysis. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* University de Creta, Grecia.

Halmos, P. R. (1974). *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Springer.

Halmos, P. R., Moise, E. E., & Piranian, G. (1975). The Problem of Learning to Teach. *The American Mathematical Monthly*, *82*(5), 466. doi:10.2307/2319737

Hamdan, M. (2006). Equivalent Structures on Sets: Equivalence Classes, Partitions and Fiber Structures of Functions. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 127–147. doi:10.1007/s10649-006-5798-9

Harel, G. (1997). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, D. Porter, A. Watkins, & Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra. MAA Notes Volume 42.* (pp. 107–126). Washington D.C: The Mathematical Association of America.

Harel, G. (1999). Students' understanding of proofs: a historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *302-303*, 601–613.

Harel, G. (2000). Three Principles of Learning and Teaching Mathematics. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177–190). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., Selden, A., Selden, J., Gutiérrez, A., & Boero, P. (2006). Advanced mathematical thinking. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*, 147–172.

Hefferon, J. (2008). *Linear Algebra*. Virginia Commonwealth University Mathematics. Retrieved from http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/

Heikkinen, H. L. T., Huttunen, R., & Syrjälä, L. (2007). Action research as narrative: five principles for validation. *Educational Action Research*, *15*(1), 5 – 19.

Hern, T., & Long, C. (1991). Viewing Some Concepts and Applications in Linear Algebra. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 173–190). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Hernández, E. (1998). *Algebra Y Geometría* (2a. ed.). Madrid,[etc.]: Addison-Wesley: Universidad Autónoma de Madrid.

Hilbert, D. (1990). *Geometry and the imagination* (Vol. [2nd. ed.]). New York: Chelsea,.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191–208). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J. (2001). Computer Algebra Systems in the Learning and Teaching of Linear Algebra: Some Examples. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld, ... J. C. e Silva (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7, pp. 371–380). Springer Netherlands.

Hillel, J., & Dreyfus, T. (2005). What's a Best Fit? Construction of Meaning in a Linear Algebra Session. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (Vol. 37, pp. 181–203). Springer US.

Hitt, F. (1998). The role of the semiotic representations in the learning of mathematics. In L. Bills (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (Vol. 18 (3), pp. 23–28). Presented at the BSRLM.

Hitt, F. (2002). *Representations and Mathematics Visualization*. Departamento de Matematica Educativa.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, *8*, 255–271.

Hitt, F. (2006). Students' Functional Representations and Conceptions in the Construction of Mathematical Concepts. An Example: The Concept of Limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 251 – 267.

Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M., & Schoenfeld, A. (Eds.). (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Inglis, M., & Mejía-Ramos, J. P. (2008). On the Persuasiveness of Visual Arguments in Mathematics. *Foundations of Science*, *14*(1-2), 97–110. doi:10.1007/s10699-008-9149-4

Jaworski, B., Nardi, E., & Hegedus, S. (1999). Characterizing Undergraduate Mathematics Teaching. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 121–128). Presented at the PME 23, Haifa, Israel.

Kadunz, G., & Sträber, R. (2004). Image-Metaphor-Diagram: Visualisation in learning mathematics. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Matematics Education* (Vol. 4, pp. 241–248). Presented at the PME 28, Bergen, Norway: Bergen University College.

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, *17 (2)*, 265–281.

Karrer, M., & Jahn, A. P. (2008). Studying Plane Linear Transformations on a Dynamic Geometry Enviroment: Analysis of Tasks Emphasizing the Graphic Register. In *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*. Presented at the ICME11, Monterrey, México.

Kirshner, D. (1989). The Visual Syntax of Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 274–287. doi:10.2307/749516

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2100–2111.

Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra* (1st ed.). Birkhäuser.

Körner, T. W. (2004, October 31). In Praise of Lectures. Retrieved from https://www.dpmms.cam.ac.uk/~twk/Lecture.pdf

Lakoff, G., & Nuñez, R. (2001). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books.

Lay, D. C. (1994). *Linear Algebra and Its Applications*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Lee, S.-G. (2012). Linear algebra with sage-math and the smartphone. In *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1146–1152). Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Lin, I.-H. (2005). *Geometric linear algebra*. Singapore : World Scientific.

Lipschutz, S. (1996). *Algebra Lineal* (2ª ed.). Madrid: McGraw-Hill.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2002). Advanced Mathematical Thinking With Special Reference to Reflection on Mathematical Structure. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 165–195).

Mancosu, P., Jørgensen, K. F., & Pedersen, S. A. (2005). *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Springer.

Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM*, *41*(4), 427–440. doi:10.1007/s11858-009-0199-z

Mariotti, M. (2012). ICT as Opportunities for Teaching-Learning in a Mathematics Classroom: The Semiotic Potential of Artefacts. In T.-Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 25–40). Presented at the PME 36, Taipei, Taiwan.

Mariotti, M., & Bartolini Bussi, M. G. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English, M. G. Bartolini Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education Second Edition* (2nd ed.). Routledge.

Mason, J., & Waywood, A. (1996). Chapter 28: The Role of Theory in Mathematics Education and Research. In A. J. Bishop, M. A. (Ken) Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 1055–1089). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa : una introducción conceptual* (Vol. 5ª ed.). Madrid: Pearson,.

Merino, L. M., & Santos, E. (1999). *Algebra Lineal Con Métodos Elementales*. Granada: Thomson.

Molina, J. G., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(2), 241–273.

Moreno, M. M., & Giménez, C. A. (1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología: estudio de casos. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *15*(1), 21–34.

Morera, L. (2013, April 24). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología* (Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Facultat d'Educació.

Morera, L., Souto, B., & Arteaga, P. (2011). ¿Qué puede hacerse antes de llevar un problema al aula? In *Actas de las 15 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Gijón, España.

Munkres, J. (2002). *Topología* (2nd ed.). Pearson Educacion.

Nardi, E. (2000). Mathematics Undergraduates' Responses to Semantic Abbreviations, "Geometric" Images and Multi-Level Abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(2), 169–189. doi:10.1023/A:1012223826388

Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians : teaching and learning mathematics at the university level*. New York : Springer.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words : exercises in visual thinking*. Washington, D.C : The Mathematical Association of America.

Nelsen, R. B. (2000). *Proofs without words II : More exercises in visual thinking*. Washington, D.C. : The Mathematical Association of America.

Nicholson, J. (1993). The development and understanding of the concept of quotient group. *Historia Mathematica*, *20*(1), 68–88. doi:10.1006/hmat.1993.1007

Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. In *Norma 05*. Trondheim.

O'Connor, J., & Robertson, E. F. (1996, May). Abstract linear spaces. Retrieved August 27, 2010, from http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html

Pavlopoulou, K. (1994). *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique.* (thèse d'université). Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA), Strasbourg,. Retrieved from http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/ATE00023.htm.

Pedoe, D. (1963). *A geometric introduction to linear algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (1st ed., Vol. 50, pp. 9–25). Springer.

Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 191–212.

Pratt, D., & Jones, I. (2010). DBR Study Guide. Retrieved April 6, 2010, from http://www.lkl.ac.uk/projects/designresearch/index.php?q=node/6

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM*, *40*(2), 165–178. doi:10.1007/s11858-008-0086-z

Presmeg, N. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation.* (Unpublished). Unviersity of Cambridge.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 297–311. doi:10.1007/BF00305075

Presmeg, N. (1991). Classroom Aspects which Influence Use of Visual Imagery in High School Mathematics. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 191–198). Presented at the PME15, Assisi, Italia.

Presmeg, N. (1994). The role of visually mediated processes in classroom mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: International Reviews on Mathematics Education*, *26*(4), 114–117.

Presmeg, N. (1997). Generalization Using Imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning : analogies, metaphors, and images* (pp. 299–312). Mahwah, New Jersey [etc] : Lawrence Erlbaum Associates.

Presmeg, N. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 25–32. doi:10.1016/S0732-3123(99)80059-5

Presmeg, N. (1999). Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (32), 17–22.

Presmeg, N. (2006a). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. PME 1976-2006* (pp. 205–235). Sense Publishers.

Presmeg, N. (2006b). Semiotics and the "Connections" Standard: Significance of Semiotics for Teachers of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 163–182.

Presmeg, N. (2008). An Overarching Theory for Research in Visaulization in Matehamtics Education. In *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*. Presented at the ICME11, Monterrey, México.

Presmeg, N., & Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: an international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 58–65). Recife, Brasil.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. In E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual.* (pp. 174–186). CINVESTAV. México, DF: Fondo de Cultura Económica.

Ramírez, V., & Yaneth, L. (2009). La Abducción como alternativa del método científico en la Educación Superior. *Unipluriversidad*, *8*(2). Retrieved from http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/unip/article/view/947

Richey, R. C., & Klein, J. D. (2005). Developmental research methods: Creating knowledge from instructional design and development practice. *Journal of Computing in Higher Education*, *16*(2), 23–38. doi:10.1007/BF02961473

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, *4*(1), 1–14.

Rivera, F. (2011). *Toward a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum: Research, Theory, Practice, and Issues* (1st Edition.). Springer.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una Descomposición Genética: Análisis Teórico del Concepto de Transformación Lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89–112.

Robinson, D. J. S. (2006). *A course in linear algebra with applications* (2nd ed.). Singapore ; Hackensack, NJ: World Scientific,.

Rodd, M. (2003). Witness as Participation: The Lecture Theatre as Site for Mathematical Awe and Wonder. *For the Learning of Mathematics*, *23*(1), 15–21.

Rojo, J. (2001). *Álgebra Lineal*. Madrid: McGraw-Hill.

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo: Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *14*(1), 3–14.

Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching* (1st ed., Vol. 50). Springer.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, *47*(6), 641–649.

Selden, A., & Selden, J. (2001). Tertiary Mathematics Education Research and its Future. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld, … J. C. e Silva (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7, pp. 237–254). Springer Netherlands.

Selden, A., & Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1–13. doi:10.1207/s15327833mtl0701_1

Sernesi, E. (1993). *Linear Algebra: A Geometric Approach*. London [etc.]: Chapman and Hall.

Shifrin, T. (2002). *Linear Algebra: A Geometric Approach*. New York: W. H. Freeman and Company.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209–246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sinclair, M., Mamolo, A., & Whiteley, W. (2011). Designing spatial visual tasks for research: the case of the filling task. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(2), 135–163. doi:10.1007/s10649-011-9315-4

Sinclair, N., & Gol Tabaghi, S. (2010). Drawing space: mathematicians' kinetic conceptions of eigenvectors. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(3), 223–240. doi:10.1007/s10649-010-9235-8

Slomson, A. (2010). What makes a good maths lecture? Retrieved September 3, 2012, from http://mathstore.ac.uk/?q=node/1636

Smith, L. (1998). *Linear Algebra* (3rd ed.). New York: Springer.

Souto, B., & Gómez-Chacón, I. M. (2011a). Challenges with visualization. The concept of integral with undergraduate students. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2073–2082). Presented at the CERME 7, Universidad de Rzeszów, Polonia.

Souto, B., & Gómez-Chacón, I. M. (2011b). Visualization at University Level. The concept of integral. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 217–246.

Souto-Rubio, B. (2009). *Visualización en matemáticas. Un estudio exploratorio con estudiantes del primer curso de Matemáticas* (Tesis de Máster). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Souto-Rubio, B. (2012). Visualizing mathematics at University? Examples from theory and practice of a Linear Algebra course. In *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 695–715). Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Steinbring, H. (2005). Do Mathematical Symbols Serve to Describe or Construct "Reality"? In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign* (pp. 91–104). New York: Springer-Verlag.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2007). Embodied, symbolic and formal thinking in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, *38*(7), 927–937. doi:10.1080/00207390701573335

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International journal of mathematical education in science and technology*, *41*(2), 173–188.

Strang, G. (2005). *Introduction to Linear Algebra* (3ª ed.). Wellesley-Cambridge Press.

Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(3), 303–317. doi:10.1016/S0732-3123(02)00131-1

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *6*(4), 353–387.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht[etc] : Kluwer Academic Publ.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–69.

The Design-Based Research Collective. (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5–8. doi:10.3102/0013189X032001005

Thomas, N. J. T. (2011). Mental Imagery. In (E. N. Zalta, Ed.)*The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2011 Edition)*. Retrieved from http://plato.stanford.edu/archives/win2011/entries/mental-imagery/

Torres Ponjuán, D. (2009). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *ACIMED*, *20*, 161 – 174.

Tucker, A. (1993). The Growing Importance of Linear Algebra in Undergraduate Mathematics. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 3–9.

Uhlig, F. (2002). *Transform linear algebra*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Van den Akker, J. (2000). Principles and methods of development research. In J. Van den Akker, R. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Eds.), *Design approaches and tools in education and training* (pp. 1–14). Kluwer.

Vitulli, M. A. (2004, April 26). *A Brief History of Linear Algebra and Matrix Theory*. Retrieved August 27, 2010, from http://darkwing.uoregon.edu/~vitulli/441.sp04/LinAlgHistory.html

Von Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any Theory of Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 215–225). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Retrieved from http://www.vonglasersfeld.com/105

Waerden, B. L. van der. (1950). *Modern algebra*. New York: Ungar,.

Wawro, M., Sweeney, G., & Rabin, J. (2011). Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(1), 1–19. doi:10.1007/s10649-011-9307-4

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(2), 115–133. doi:16/j.jmathb.2004.03.001

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(2–3), 200–208. doi:10.1016/j.jmathb.2009.08.001

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Aron, I., & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL* (Vol. Preliminary Version). Research in Undergraduate Mathematics Education Community.

Whiteley, W. (2004, June). Visualization in Mathematics: Claims and Questions towards a Research Program. Retrieved from http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Visualization.pdf

Wilkerson-Jerde, M., & Wilensky, U. (2011). How do mathematicians learn math?: resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(1), 21–43. doi:10.1007/s10649-011-9306-5

Wood, L. N., Joyce, S., Petocz, P., & Rodd, M. (2007). Learning in Lectures: Multiple Representations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(7), 907–915.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 435–457.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds.). (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

8 ANEXOS

Para poder acceder a los documentos que se indican, se debe consultar los Anexos desde el DVD adjunto.

8 ANEXOS 425

8.1 GUÍA DOCENTE

Si se abre desde el DVD, pinchar en la imagen para acceder al documento completo.

IDENTIFICACIÓN

Nombre de la Asignatura	*ALGEBRA LINEAL*				Códigos 800570 (Mat) 800680 (Ing. Mat) 800625 (Mat. Est.)
Titulaciones	Grados en Matemáticas, Ingeniería Matemática y Matemáticas y Estadística				
Materia	0.1.Matemáticas			Módulo	0.Formación básica
Carácter [1]	*Básico*	Curso	*1º*	Semestre [2]	*1 y 2*
ECTS totales	*18*	Presenciales	6 (33%)	Duración	*Anual*
		No presenciales	12 (67%)		
Departamentos Responsables	Álgebra y Geometría				50%
	Geometría y Topología				50%

Breve Descriptor	*Se estudiarán los espacios vectoriales, las aplicaciones lineales entre los mismos y las formas bilineales. Los objetivos fundamentales son los teoremas de clasificacion de endomorfismos y de formas bilineales simétricas, tanto en el caso real como en el complejo. El Algebra Lineal se aplicará al estudio de la Geometría Afín y Euclídea.*
Prerrequisitos	*No hay*
Idioma/s	*Castellano*
Recomendaciones	*Asistencia a las clases. Llevar al día la asignatura, dedicando para ello suficiente tiempo diario al estudio, y asistencia a las tutorías.*
Asignaturas en cuyo desarrollo influye	*Por ser una asignatura de carácter básico influye decisivamente en el desarrollo de todas las asignaturas que le siguen.*

[1] Indicar: Básico, Obligatorio u Optativo
[2] Indicar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

8.2 MATERIALES DEL CURSO

8.2.1 Apuntes de Jordan

Si se abre desde el DVD, pinchar en la imagen para acceder al documento completo.

12. Autovalores y autovectores. Diagonalización

Un tipo especial de aplicación lineal son los endormorfismos de un espacio vectorial V. Dicho conjunto $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ tiene, como ya hemos visto, estructura de espacio vectorial.

El objetivo de esta lección es empezar a clasificar dichos endomorfismos, es decir, encontrar la *expresión más sencilla posible* que los represente. Aunque la técnica que desarrollaremos no es completa y será mejorada en el capítulo siguiente, nos permitirá entender que es lo que se persigue. En la lección 10, hemos visto cómo se clasificaban por equivalencia los homorfismos $f : V \to W$ entre espacios vectoriales V, W de dimensiones finitas n, m. Para ello, se encuentran bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de V y W respectivamente de modo que

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

Nótese que esta representación sirve de poco para entender la estructura de la aplicación lineal dado que sólo depende del rango de la aplicación. En el caso en el que $V = W$, que es el que nos ocupa ahora, lo natural es pedir además que la bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ sean iguales, para que tener las mismas coordenadas en el espacio de salida V y de llegada V. En lo sucesivo, si $\mathcal{B}$ es una base de V (espacio vectorial de dimensión n) y $f : V \to V$ es un endomorfismo denotaremos por $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ahora, si $\mathcal{B}'$ es otra base de V tenemos que

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = C_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}}(f) C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}}(f) C^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}. \qquad (*)$$

La fórmula anterior sugiere definir la siguiente relación en el conjunto de las matrices cuadradas de orden n: *Dos matrices $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son* semejantes *si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A_2 = PA_1P^{-1}$*, esto es, si A_1 y A_2 son matrices de un mismo endomorfismo respecto de dos bases de V. Es sencillo comprobar que la relación anterior es una relación de equivalencia.

Además, la fórmula $(*)$ sugiere la introducción de dos elementos, la *traza* y *el determinante*, asociados a un endomorfismo y que como veremos a lo largo de esta lección y el próximo capítulo desempeñan un papel relevante en el Álgebra Lineal.

(12.1) Traza y determinante de un endomorfismo. Sean $f : V \to V$ un endomorfismo, $\mathcal{B}$ una base de V y $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

(i) Se define la *traza* $\mathrm{tr}(f)$ de f como $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A)$. Nótese que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz invertible, entonces $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(AP^{-1}P) = \mathrm{tr}(A)$. Por tanto, este número sólo depende de f y no de la expresión matricial de f elegida, con lo que está bien definido.

8.2.2 Hojas de Problemas

Si se abre desde el DVD, pinchar en la imagen para acceder al documento completo.

Lista número siete.

Operaciones con subespacios.

1. Dados vectores linealmente independientes $\{u_1, u_2, u_3\}$ de un espacio vectorial E, se consideran los subespacios $V_1 = L[u_1 + u_2, u_2 + u_3]$ y $V_2 = L[u_1 + u_2 + u_3, u_2 - u_3]$. ¿Cuál es la dimensión de $V_1 \cap V_2$?

2. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E y sean V el subespacio de E de ecuaciones $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$ y W el subespacio de E generado por los vectores $w_1 = u_1 + u_2, w_2 = u_1 + u_3$ y $w_3 = u_1 + u_4$. Calcular las dimensiones de V, W, $V \cap W$ y $V + W$.

3. Para cada uno de los siguientes pares de subespacios (V,W) de $\mathbb{K}^4$, hallar una base, la dimensión y ecuaciones implícitas y paramétricas de V, de W, de $V + W$ y de $V \cap W$:
   (i) $V = L[(1,1,0,-1),(1,2,3,0)]$, $W = L[(1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)]$.
   (ii) $V = \{x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $W = \{x_1 + x_2 = 0, x_3 - 2x_4 = 0\}$.
   (iii) $V = L[(1,2,1,3),(0,1,2,1),(6,11,4,17)]$, $W = \{4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.
   ¿Es directa alguna de las sumas $V + W$?

4. (*) En un espacio vectorial E se consideran tres subespacios vectoriales V_1, V_2, V_3, y las igualdades siguientes:
   $$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3, \quad V_1 + V_2 \cap V_3 = (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3).$$
   Estudiar si son ciertas y, si no, modificarlas para que lo sean.

5. (*) Sea V un subespacio vectorial propio de un espacio vectorial E de tipo finito. ¿Cuál es el subespacio vectorial de E generado por el complementario $E \setminus V$?

6. Para cada escalar $a \in \mathbb{K}$ se considera el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^3$ definido por
   $$H_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : ax - y + z = 0\}.$$
   Sea $u = (1,1,1)$. ¿Para qué valores de a se cumple la igualdad $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus L[u]$?

7. (*) Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E de tipo finito, ambos distintos de E. Supongamos que $\dim(V_1) = \dim(V_2)$. Probar que tienen un suplementario común, esto es, existe un subespacio $W \subset E$ tal que $V_1 \oplus W = E = V_2 \oplus W$.

8. Sean a y b números reales y consideremos los subespacios V y W de $\mathbb{R}^4$ con ecuaciones implícitas respecto de la base estándar
   $$V : \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
   $$W : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
   (i) Calcular la dimensión de V y W. ¿Existen valores de a y b para los que $V = W$?
   (ii) ¿Cómo han de ser a y b para que $V + W \neq \mathbb{R}^4$?

9. Sea $V = \{x - y + z - 2t = x - 2y + z - t = 0\} \subset \mathbb{K}^4$. Hallar unas ecuaciones implícitas respecto de la base estándar de un subespacio $W \subset \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

10. (*) Sean n un entero positivo, $E = \mathbb{K}_n[T]$ el espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$.
   (i) Dado un polinomio no constante $f \in E$, demostrar que
   $$V_f = \{P \in E : P \text{ es múltiplo de } f\}$$
   es un subespacio vectorial de E. Hallar una base de V_f y otra de un suplementario suyo.
   (ii) Dados dos subespacios V_f y V_g del tipo anterior, describir su intersección.
   (iii) Sean $n = 2$, $f = -T + T^2$ y $g = 6 - 5T + T^2$. Calcular $V_f + V_g$.

13

8.2.3 Exámenes

Aquí se muestran los enunciados de los exámenes más relevantes en la investigación.

8.2.3.1 Parcial de Febrero 2011

Cuestiones teóricas

Pregunta 1. Sean $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ tres bases de un espacio vectorial de tipo finito. Enunciar y demostrar la relación existente entre las matrices de cambio de base $C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, $C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ y $C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$.

Cuestiones. Responder con un **SI** o con un **NO** a cada una de las preguntas siguientes, acompañando la respuesta de una justificación CLARA Y CONCISA, teniendo en cuenta que en el caso de respuesta negativa el único argumento definitivo consiste en dar un contraejemplo.

(1) Dados vectores linealmente independientes $u_1, \ldots, u_n$ y otro vector v tal que los vectores $v, u_1, \ldots, u_n$ son linealmente dependientes, entonces $v \in L[u_1, \ldots, u_n]$.

(2) Dadas matrices A y B tales que $AB = B \neq O$, entonces A es invertible.

(3) Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{9\times 8}(\mathbb{C})$ el determinante de AA^t es nulo.

(4) Las matrices cuadradas de orden 4 y rango menor que 4 constituyen un subespacio vectorial del espacio vectorial formado por las matrices de orden 4.

Problemas

EJERCICIO 1. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible y denotemos $A^{-1} = (c_{ij})$. Definimos la matriz $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ efectuando la operación elemental consistente en sumar a la primera fila de A el triple de la segunda, esto es,

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i > 1 \\ a_{1j} + 3a_{2j} & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

(1) Probar que la matriz B es invertible y calcular los coeficientes de su inversa $B^{-1} = (d_{ij})$ en función, únicamente, de los coeficientes de A^{-1}.

(2) Calcular A sabiendo que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2. Denotemos por $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros positivos y sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial formado por las aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, con las operaciones definidas punto a punto.

(1) Demostrar que el conjunto $W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que contiene a las aplicaciones constantes. Encontrar todos los números reales a y b tales que la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto an + b$ pertenece a W.

(2) Calcular la dimensión de W y obtener una base suya.

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la matriz $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{si } |i-j| > 1 \end{cases}$$

Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \det(A_n)$ pertenece a W y calcular $f(2011)$.

Indicación. Se puede abordar el apartado (3) sin hacer antes el (2).

8.2.3.2 Parcial de Junio 2011

Cuestiones teóricas

(1) **(0.6 puntos)** Sean $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de un espacio vectorial E de dimensión n y $B^* = \{h_1, \ldots, h_n\}$ su base dual. Demostrar que las coordenadas de un vector $v \in V$ con respecto a la base B son $(h_1(v), \ldots, h_n(v))$.

(2) **(0.6 puntos)** Calcular la matriz de Jordan de un endomorfismo $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ del que se sabe que $\dim(\ker f) = 3$ y $\dim(\ker f^2) = 6$. Justifique la respuesta.

(3) **(0.6 puntos)** Calcular las posibles matrices de Jordan de un endomorfismo $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ para cierto $n \geq 1$ cuyo polinomio característico es $P_f(T) = (T-1)^4(T+1)^3$ y cuyo polinomio mínimo es $m_f(T) = (T^2-1)^2$. Justifique la respuesta.

(4) **(0.6 puntos)** Demostrar el teorema de Pitágoras para un espacio euclídeo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(5) **(0.6 puntos)** Sean $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de un espacio vectorial E de dimensión n y $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ donde $v_i = \sum_{j=1}^{i} u_j$ para $i = 1, \ldots, n$. Demostrar que $\mathcal{B}'$ es una base de V y determinar, justificando la respuesta, si las bases duales $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{B}'^*$ comparten algún elemento.

Problemas

Problema 1. Para cada $a, b \in \mathbb{C}$ consideramos el endomorfismo $f_{a,b} : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ cuya matriz con respecto a la base estándar es:

$$M_f(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 & a-b & a-1-b \\ 1 & a & -1 & -1-a+b & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & 1+a-b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1+b & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1+b \end{pmatrix}.$$

(1) **0.75 puntos.** Demostrar que el polinomio característico de $f_{a,b}$ es $(a-t)^3(b-t)^2$.

(2) **1.25 puntos.** Determinar en función de los valores de a, b cuál es la matriz de Jordan de $f_{a,b}$.

En los dos apartados siguientes suponemos $a = 1, b = 0$ y denotamos $f = f_{1,0}$.

(3) **1.25 puntos.** Calcular una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^5$ tal que $M_f(\mathcal{B})$ sea la matriz de Jordan de f.

(4) **1.25 puntos.** Calcular las rectas invariantes y los hiperplanos invariantes de f. Demostrar que los hiperplanos invariantes de f se corresponden con las rectas invariantes de $f^* : \mathbb{C}^{5*} \to \mathbb{C}^{5*}$.

Problema 2. Se considera la familia de matrices simétricas

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se pide:

(1) **1.25 puntos.** Determinar, para cada par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, el rango y la signatura de la forma bilineal simétrica $\phi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ cuya matriz respecto de la base estándar $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es $M_{\phi_{\alpha,\beta}}(\mathcal{E}) = M_{\alpha,\beta}$.

(2) **1.25 puntos.** Denotemos $\phi = \phi_{1,3}$. Calcular una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ respecto del producto escalar estándar, tal que $M_\phi(\mathcal{B})$ es diagonal.

8.2.3.3 Examen Final

Cuestiones teóricas

(1) **(0.6 puntos)** Enunciar y demostrar el primer teorema de isomorfía para aplicaciones lineales entre espacios vectoriales.

(2) **(0.6 puntos)** Sean $v_1, \dots, v_n$ vectores de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E y sea $V = L[v_1, \dots, v_n]$. Sea $r < n$ y supongamos que cada v_i es combinación lineal de a los sumo r vectores del conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}$. Determinar razonadamente si se puede asegurar o no que $\dim V \leq r$.

(3) **(0.6 puntos)** Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $f : E \to E$ un endomorfismo tal que para cada autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de E se cumple que las multiplicidades algebraicas y geométricas de λ con respecto a f coinciden. Determinar razonadamente si podemos asegurar o no que f es diagonalizable.

(4) **(0.6 puntos)** Sea n el número de matrices de orden 2 con coeficientes en el subconjunto $\{0, 1\} \subset \mathbb{K}$ y sean m el número de ellas que son invertibles, p el número de matrices que tienen determinante 1 y q el número de matrices que tienen determinante -1. Calcular la tupla (m, n, p, q).

(5) **(0.6 puntos)** Probar que una matriz antisimétrica de orden impar tiene determinante nulo y que para cada entero positivo par n existe una matriz antisimétrica de orden n con determinante no nulo.

Problemas

Problema 1. Para cada $a, b \in \mathbb{C}$ consideramos el endomorfismo $f_{a,b} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ cuya matriz con respecto a la base estándar es:

$$M_{f_{a,b}}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1+a & 0 & 0 \\ 1-a+b & 1-a+b & 1+b & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1+b \end{pmatrix}.$$

(1) **1 punto.** Determinar en función de los valores de a, b cuál es la matriz de Jordan de $f_{a,b}$.

(2) **1 punto.** Calcular una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^4$ que no dependa de a tal que $M_{f_{a,a}}(\mathcal{B})$ sea la matriz de Jordan de $f_{a,a}$.

(3) **1 punto.** Calcular las rectas invariantes y los hiperplanos invariantes de $f_{a,b}$.

(4) **1 puntos.** Para cada $a \in \mathbb{C}$ denotemos $W_a = \ker f_{a,a}$ y

$$\pi_a : \mathbb{C}^4 \to E_a = \mathbb{C}^4/W_a : u \mapsto u + W_a.$$

Sean $g_1, g_2 \in \mathbb{C}^{4*}$ las formas lineales dadas por las fórmulas

$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + (1-c)x_2 + (1-c)x_3 + (1-c)x_4,$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1+a+d)x_1 + (1+a+d)x_2 + (1+a)x_3 + x_4,$$

donde $c, d \in \mathbb{C}$. Calcular todas las ternas $(a, c, d) \in \mathbb{C}^3$ tales que existen $\overline{g_1}, \overline{g_2} \in E_a^*$ que satisfacen las igualdades $g_i = \overline{g_i} \circ \pi_a$ para $i = 1, 2$ y constituyen una base de E_a^*.

Problema 2. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera la base

$$\mathcal{B}_\lambda = \{u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (\lambda,1,0,0), u_3 = (0,\lambda,1,0), u_4 = (0,0,\lambda,1)\}$$

de $\mathbb{R}^4$ y sea $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ una forma bilineal simétrica definida positiva tal que $\mathcal{B}_\lambda$ es una base ortonormal para φ_λ.

(1) **1 punto.** Sea $\mathcal{E} = \{e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^4$. Calcular la matriz $M_{\varphi_\lambda}(\mathcal{E})$ y determinar todos los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\mathcal{E}$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, \varphi_\lambda)$.

(2) **1 punto.** Obtener una base ortonormal $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $(\mathbb{R}^4, \varphi_\lambda)$ tal que $L[v_1] = L[e_1]$, $L[v_1, v_2] = L[e_1, e_2]$ y $L[v_1, v_2, v_3] = L[e_1, e_2, e_3]$.

(3) **1 punto.** Sean $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\}$ y $f_\lambda : E \to E$ la aplicación lineal que cumple

$$f_\lambda(u_1) = v_1, \;\; f_\lambda(u_2) = (4/5)v_2 + (3/5)v_3 \quad \text{y} \quad f_\lambda(u_3) = (3/5)v_2 - (4/5)v_3.$$

Consideramos en E el producto escalar inducido por φ_λ y la orientacion inducida por la base $\mathcal{B}_E = \{u_1, u_2, u_3\}$. Calcular la matriz de f_λ respecto de la base $\mathcal{B}_E$, demostrar que f_λ es un endomorfismo ortogonal y clasificarlo.

8.3 ANÁLISIS DE LOS 20 LIBROS DE TEXTO

A continuación se muestran las primeras páginas de la tabla donde se recogió información de los libros de texto, las primeras páginas del análisis realizado con Word (tanto a nivel general como focalizado en los EVC), las primeras diapositivas de la síntesis en Power Point y una visión general de la síntesis sobre los EVC realizada con una tabla de Excel. Se puede acceder a los documentos completos desde el DVD, pinchando en las imágenes.

8.3.1 Tabla de recogida de datos

BLOQUE III

		GENERAL			COCIENTE	
	NOMBRE	IND. INICIAL	ENFOQUE	REPRESENTACIONES, PAPEL VISUALIZACIÓN	IND. FINAL	DEF. Y PROPIEDADES
12-18	I-Hsiung Lin, *Geometric linear algebra* (Singapore : World Scientific, 2005). IN512.64LIN	Part 1. The Affine and Linear Structures of IR1, IR2 and IR3, 1. The One-Dimensional Real Vector Space IR (or IR1), 2. The Two-Dimensional Real Vector SpaceIR2, 3, The Three-Dimensional Real Vector Spaces IR3, Appendix A, Some Prerequisites, Appendix B. Fundamentals of Algebraic Linear Algebra. OBS: hay un volume 2 que trata sobre espacios Euclídeos.	La construcción del AL es inductiva, empieza desde una dimensión, pasa a dos, a tres y finalmente da las definiciones abstractas. A lo largo del texto hay muchos párrafos introductorios, muchos ejemplos con preguntas para hacerse (y muchas sobre el comportamiento geométrico de aplicaciones, por ejemplo) Preface: comienza reflexionando sobre de qué trata el AL y hace una introducción interesante (y bastante geométrica) de los conceptos principales. (ver más en comentarios). Ya en la introducción encontramos lo mismo escrito de dos maneras (geométrica y algebraica). Esta es una constante en el libro. Sobre este doble juego entre Álgebra y Geometría: "Algebra has operational priority over geometry, while the latter provides intuitively geometric motivation or interpretations to results of the former. Both play a role of head and tail of a coin un many situations". De hecho explicita esta intención de explotar la intuición geométrica un poco más	De Google Books: "Contains over 250 figures and numerous examples and challenging exercises Provides intensive applications of eigenvalues to geometric problems Almost every algebraic (computational) process is guided by some geometric way of thinking or by the use of or graphics" Preface: señala su especial interés en la intuición geométrica (ver más abajo). También dice que por eso se centra en espacios vectoriales reales IR, IR2 y IR3 e incluye 500 ilustraciones gráficas (de ahí el título). Lo miro muy rápido, creo que más que las representaciones, que también son muy interesantes, lo más relevante son los enfoques, el tipo de resultado que cuenta, el tipo de ejemplos que analiza… IR1: p.6-7, (foto), p.12 (foto) ilustraciones típicas de este capítulo. IR2 p.30-31 (foto) ejemplo ilustraciones cap. 2. p.35 (foto, fig2.16) la coordinatización del plano. p.36 (foto) diagrama que resume el cambio de coord. p.69 (foto) Problema del tipo Abstraction and generalization, p.84 (foto) Definición de aplicación lineal	Free vector, p.235 (es interesante la reflexión sobre V como espacio vectorial y V como espacio afín que se tiene a sí mismo por espacio vectorial) Subspace, relative positions of affine, paralell, 645 (nada interesante) Codimension , 747 Cross-ratio, 300 (foto), 661 Dimension, dimension theorem, 88 (en IR2), 366 (en 3D), 734	p.195-198 (foto) Ejemplo parecido al problema 7 con ampliación, pero en 2D. → FOTOCOPIAR p.200 -1(fotos) Se define el cociente en 2D a partir de considerar todos los suplementarios posibles de kerf. En realidad, lo que se prueba es algo tipo el primer Tma de isomorfía. p.211 (foto) definido un cociente, se define el "induced quotient operator", con diagrama conmutativo p.249-50 (foto) pbma 10 parecido al anterior y muy relacionado con mi Problema7 con ampliación. p.369 (foto, Fig. 3.24) Igual que en el caso 2D, cuando analiza los ejemplos de aplicaciones lineales hace un estudio detallado donde ve que los planos paralelos al ker van a un mismo punto y cosas así. Se parece a mi

8.3.2 Perspectiva general sobre las representaciones

8.3.2.1 Análisis en Word

ANÁLISIS REPRESENTACIONES Y PAPEL VISUALIZACIÓN LIBROS DE TEXTO
BLOQUE I

(Fernando, Gamboa y Ruiz, 2011)

Intro cap. II: se dice que los conceptos de espacio vectorial y de aplicación lineal explicados a partir de lo visto para sistemas de ecuaciones (combinaciones de ecuaciones, etc) dan sentido geométrico a la teoría de matrices (aunque no se explica claramente a qué se refieren exactamente con ello).

En cuanto al uso de otras representaciones se dice que "En la s´eptima se tratan

los espacios de tipo finito, y se define la dimensi´on; esto incluye la introducci´on de

coordenadas y de ecuaciones lineales. A partir de este momento cada noci´on y construcci

´on nueva tendr´a su tratamiento mediante ecuaciones."

Intro. Cap. III: se explica un poco más a qué se refieren con hacer geometría: "Este cap´ıtulo tercero est´a dedicado a un problema fundamental: la clasificaci´on de endomorfismos, es decir, de las aplicaciones lineales de un espacio vectorialde tipo finito en s´ı mismo. Con ello se empieza a hacer geometr´ıa (vectorial) pues se toca ya de manera no trivial la comprensi´on cualitativa de los objetos que se estudian."

Análisis detallado, ver documento: ReprFGRLibroTextoAL.docx

REPRESENTACIONES DEL LIBRO DE TEXTO

CAP. I

Tratamiento de ecuaciones

Ejemplo 1.5 Los siguientes sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 = 5, \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$$

son equivalentes, porque la tercera ecuación del primero $f_3 = f_1 + f_2$ es la suma de sus dos primeras ecuaciones. □

(p.5)

Uso de las filas de los sistemas a modo macro

Veamos que si una ecuación del sistema depende de otras, lo mismo ocurre después de una operación elemental. En efecto, supongamos que tenemos $f_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i f_i$, y hacemos una operación del primer o segundo tipo (del tercer tipo, evidentemente, poco hay que decir aquí). Tenemos varias posibilidades:

$$\text{(i)} \begin{cases} f_k \rightsquigarrow \lambda f_k, & \text{y entonces } \lambda f_k = \sum_{i \neq k} (\lambda \alpha_i) f_i, \\ f_j \rightsquigarrow \lambda f_j,\ j \neq k, & \text{y entonces } f_k = \frac{\alpha_j}{\lambda}(\lambda f_j) + \sum_{i \neq k,j} \alpha_i f_i. \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} f_k \rightsquigarrow f_k + \lambda f_\ell,\ \ell \neq k, & \text{y entonces } f_k + \lambda f_\ell = (\lambda + \alpha_\ell) f_\ell + \sum_{i \neq k,\ell} \alpha_i f_i, \\ f_j \rightsquigarrow f_j + \lambda f_\ell,\ \ell, j \neq k, & \text{y entonces} \\ & f_k = \alpha_j (f_j + \lambda f_\ell) + (\alpha_\ell - \alpha_j \lambda) f_\ell + \sum_{i \neq k,j,\ell} \alpha_i f_i, \\ f_j \rightsquigarrow f_j + \lambda f_k, & \text{y entonces} \\ & (1 + \alpha_j \lambda) f_k = \alpha_j (f_j + \lambda f_k) + \sum_{i \neq k,j} \alpha_i f_i. \end{cases}$$

En los cuatro primeros casos la ecuación k-ésima nueva es combinación de las nuevas ecuaciones. En el quinto caso, si el coeficiente $1 + \alpha_j \lambda$ es no nulo dividimos por él para expresar f_k como combinación de las demás ecuaciones.

(p.7)

Representación de matrices por cajas

3. Operaciones con matrices

En esta lección desarrollamos de manera sistemática las operaciones algebraicas que se hacen con matrices.

Una forma a menudo útil de representar matrices es *por cajas*. Esto significa que se forma un matriz mayor combinando varias menores. En ese caso las dimensiones deben ser las adecuadas. Por ejemplo, si escribimos

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

el número de filas de A y B debe ser el mismo, el número de columnas de A y de C también debe coincidir,... Ya se ve cuáles son las restricciones. Con este cuidado, las operaciones con matrices que vamos a describir se pueden hacer con cajas igual que con elementos. El lector lo podrá ir comprobando sin dificultad.

(p. 30)

3. Operaciones con matrices 31

Ejemplo 3.1 La siguiente matriz

$$M = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 7 & 2 & 6 & 8 & 9 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde

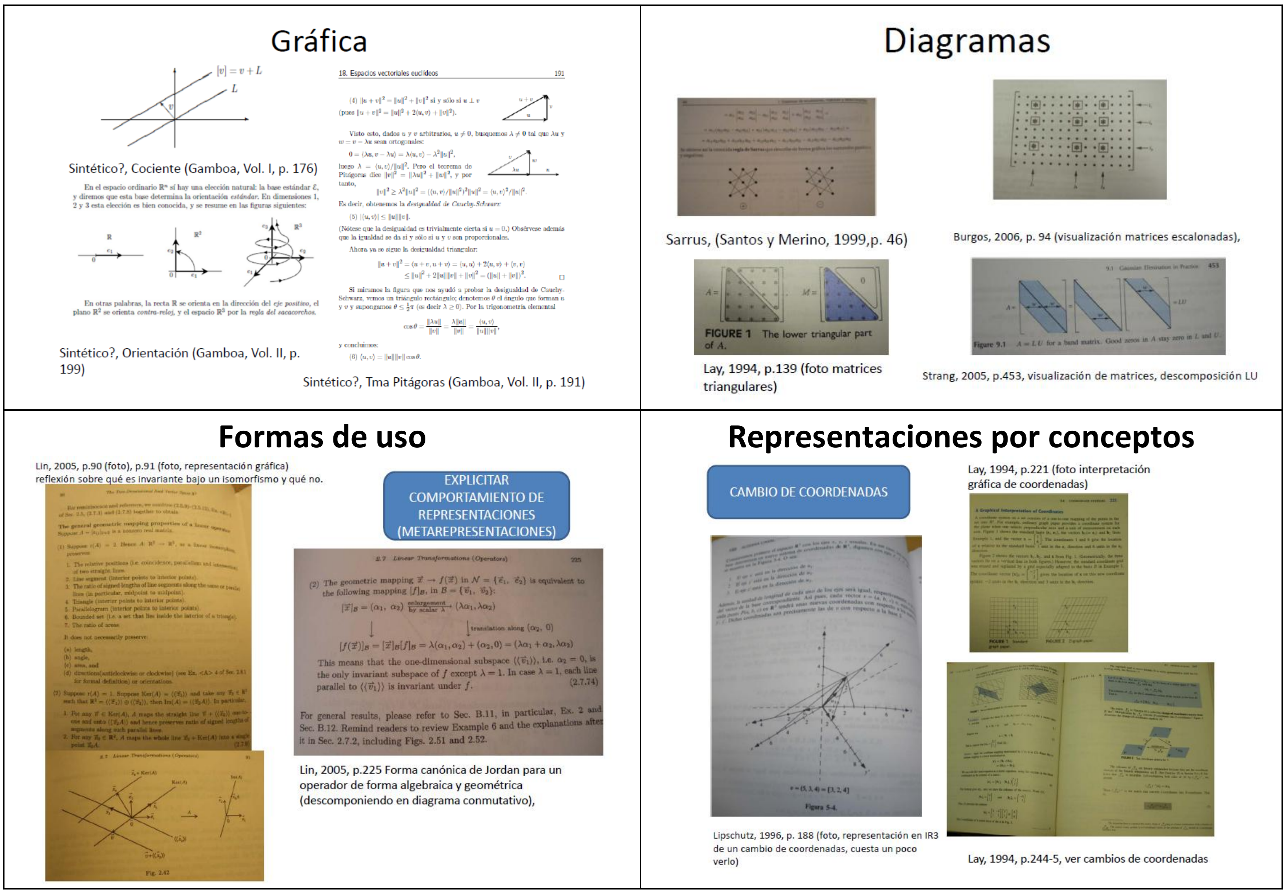
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = (7, 2) \quad \text{y} \quad D = (6, 8, 9),$$

está representada por cajas según la explicación anterior. □

(p.31)

Representación macro y micro de matrices

8.3.2.2 Síntesis con Power Point



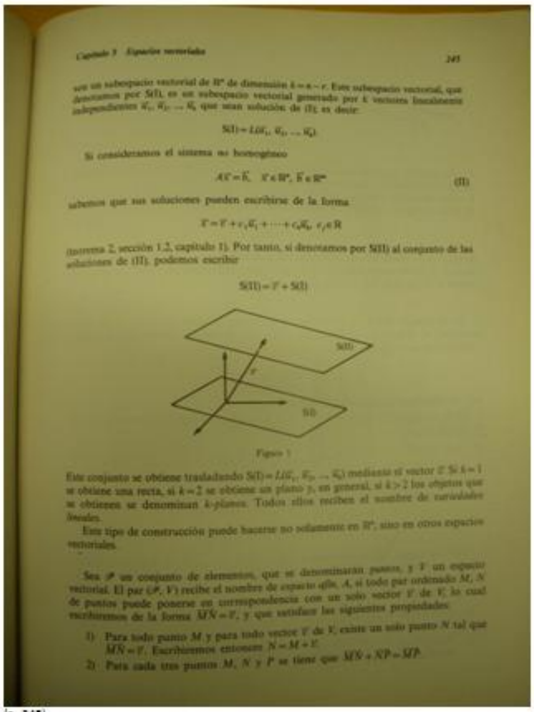
8.3.3 Perspectiva focalizada en los EVC

8.3.3.1 Análisis en Word

LOS EVC EN LOS LIBROS DE TEXTO

(Hernández, 1996)

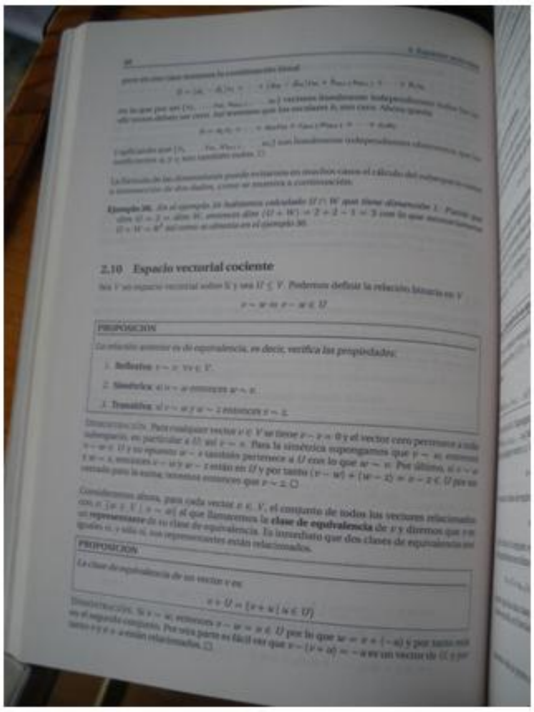
p.245 (foto): introducción variedades afines (a partir de sistemas de ecuaciones no homogéneos), repr. Gráfica tipo planos paralelos. Se prueban las propiedades de que son una partición (aunque no se dice nada)



(p. 245)

(Santos y Merino, 1999)

p.98 Se demuestra que la relación de equivalencia típica es de hecho de equivalencia y se describen las clases de equivalencia.



p.99 Se define el conjunto cociente y se dota de estructura de espacio vectorial con dos operaciones. Después proposición sobre "Bases y dimensiones de un espacio vectorial cociente". No se explica nada del cociente como modelo de suplementario.

8.3.3.2 Síntesis en Excel

	A	B	C	D	E	F
1	SÍNTESIS	EVC LIBROS DE TEXTO				
2			APARICIÓN COCIENTE			CONCEPTOS RELACIONA
3	BLOQUE	TÍTULO	Nada	Algo	Sección o capítulo específico (se incluirá nombre del capítulo y título de la sección)	
4	1	(Fernando, Gamboa y Ruiz, 2011)			II. ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES, 8. Operaciones con subespacios (8.6 Cocientes módulo	
5	2	(Hernández, 1998)	x			Espacios afines, a partir de sistemas de ecuaciones no homogéneos, planos paralelos, prop's partición
6	3	(Merino y Santos, 1999)			II. Espacios vectoriales, (2.10 Espacio vectorial cociente)	Conjunto cociente, espacio vectorial cociente, relación de equivalencia,
7	4	(Castellet y Llerena, 1996)		9.ESPACIOS AFINES: (son a +V) 10. AFINIDADES: Clasificaciones de afinidades y de desplazamientos.	1. DIVISIBILIDAD EN LOS Nºs ENTEROS: División entera. Ideales; Congruencias; Los anillos Z/(m) 2. DIVISIBILIDAD EN EL ANILLO DE POLINOMIOS: División entera e ideales en IK[x]; Los anillos K[x]/(m(x)) 3. GRUPOS: Grupo cociente. Subgrupos normales; 4. ESPACIOS VECTORIALES: Ev cociente.	División entera, división entera e ideales en IK[x], Conjunto cociente, relación equivalencia, particiones, anillos Z(m), espacio vectorial cociente, paralelismo, teoremas de isomorfismo (grupos, ev), traslación
8	5	(Lipschutz, 1996)			11. Formas canónicas (11.10 Espacios cociente), Apéndice. Conjuntos y relaciones (relaciones de equivalencia), Estructuras algebraicas, Polinomios sobre un cuerpo	Espacios cociente, Equivalencia por filas,
9				6.7 Variedades afines		Clases de equivalencia, 581 Conjunto cociente, 581

	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
2	mparados con los que aparecen								CONCEPCIONES											
3	1. Def. formal	2. Interp. Gráfica	3. Dim., base y coordenadas	4. Proyección canónica	5. Factorización canónica	6. Cociente en esp. Euclídeos	7. Particiones	8. Otros	C1_Rep	C2_AntiMult	C3_Comp	C4_Part	C5_Zn	C6_Estr	C7_Paral	C8_Sup	C9_Proy	C10_Preim	C11_Elim	C12_Otros
4	x	x	x	x	x	x	x					x		x	x	x				
5		b										x			x					
6	a,b	a	x											x						
7		a										x	x	x	x	x				a
8		x, a,b	x		x		x					x			x	x				
9																				

	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	
2	REPRESENTACIONES															COMENTARIOS
3	Lenguaje natural	Lenguaje natural matemático	Geométrica_IR2	Geométrica_IR3	Geométrica_IRn	Geométrica	Gráfica_IR2	Gráfica_IR3	Gráfica_IRn	Gráfica	Tablas numéricas	Tablas algebraicas	Simbólico	Diagramático	Otras	
4			2								x	x	1	x		
5																No se habla específicamente de c (a partir de sistemas de ecuacione geométrica en 3D para espacios a trasladadas son una partición, per
6		X									3	3	X			La sección sobre cociente tiene u aunque no se incide en mostrar di aplicaciones afines en realidad no
7		x	x	x									X			Al incluir aritmética y álgebra de gr hace paulatinamente. En la parte c libro de texto (casi copiada). Sin e repite el hecho de que la mayoría c Sí que parece que se usa bastante suplementario (p. 93). También se
8		x	x	x									x	x		En el texto se habla de los cocient afines (se acompaña de una repre (como tres representaciones sim prueba de que la colección de vari independencia de vectores, base y aparecen como ejercicios.
9																Las relaciones de equivalencia pa

8.4 CUESTIONARIO SOBRE LA APLICACIÓN LINEAL

8.4.1 Enunciado

DATOS PERSONALES

Nombre y Apellidos:
Correo electrónico:
Fecha de nacimiento: Sexo: Hombre Mujer
¿Tipo de Bachillerato cursado?
¿Has estudiado el tema de visualización en Matemáticas Básicas? SI NO
Tipo de Grado que vas a estudiar:

INSTRUCCIONES

Este cuestionario no sirve para calificar la asignatura sino para investigar en Educación Matemática. Por ello te pedimos que

- No escribas con lápiz ni utilices tippex.
- Si dejas en blanco una pregunta, trata de especificar por qué (falta de tiempo, no sabes cómo se hace…)
- Nos interesan tus procesos de razonamiento y no tanto si la respuesta es correcta o no. Así que por favor, no te cortes y escribe todo lo que se te vaya pasando por la cabeza.
- En caso de que te estés imaginando alguna imagen, por favor, dibújala e indica si normalmente la incluirías en tu respuesta o no.

CUESTIONES

1. ¿Cómo definirías *aplicación lineal*?

2. ¿Cómo le explicarías a un/a compañero/a en qué consiste la *linealidad* de la aplicación lineal?

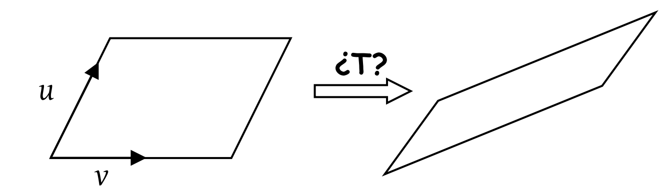
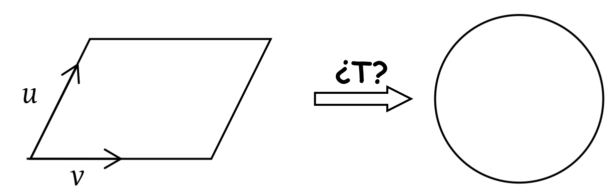
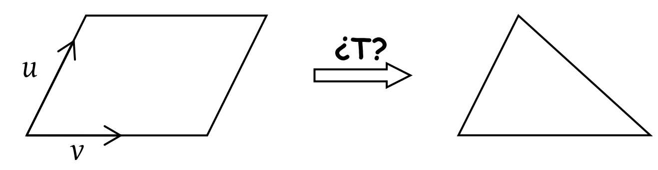
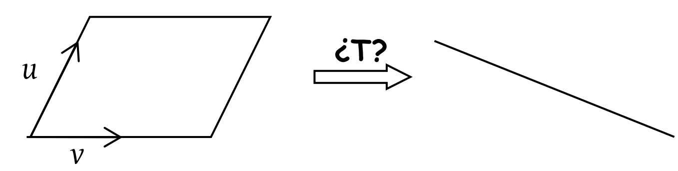
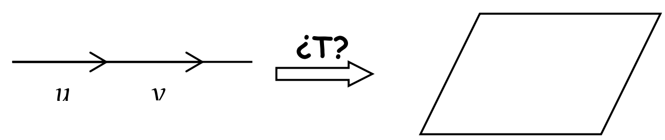
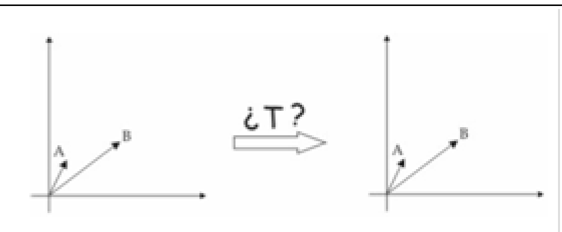
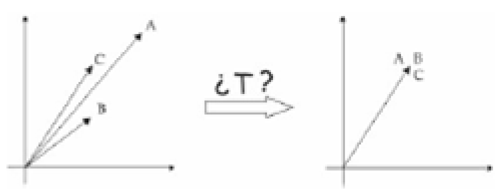
3. ¿Puedes poner un ejemplo de aplicación lineal? ¿Por qué es lineal?

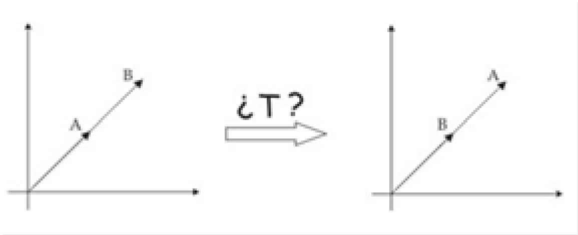
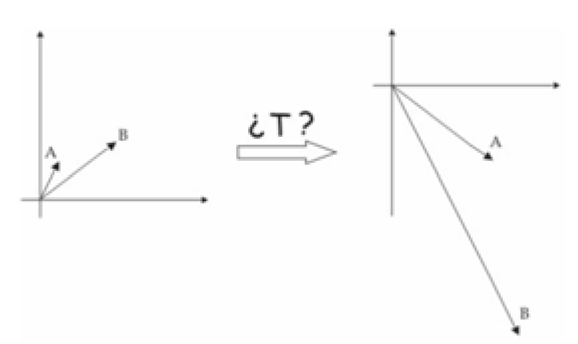
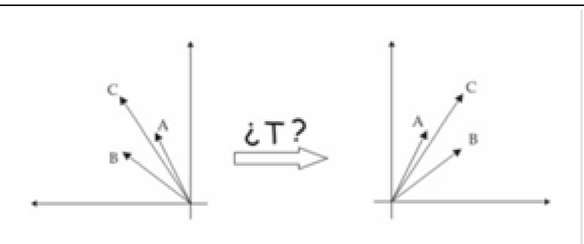
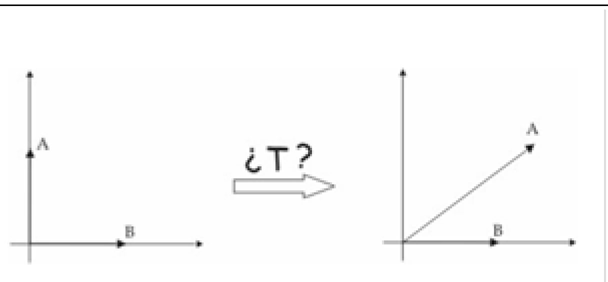
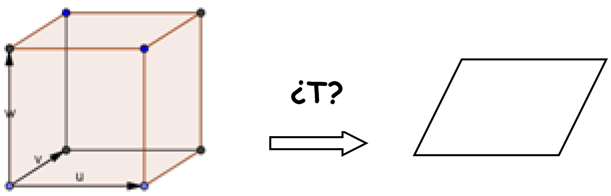
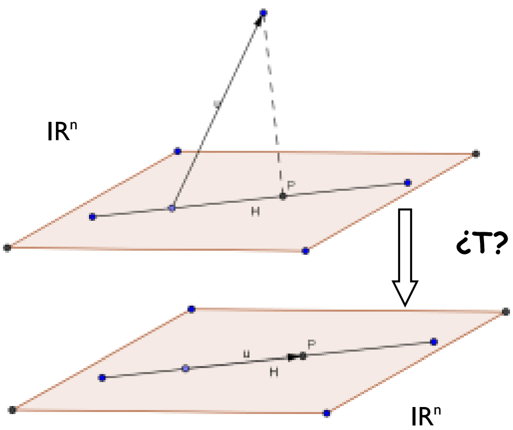
4. ¿Puedes poner un ejemplo de aplicación *no* lineal? ¿Por qué es no lineal?

5. ¿Para qué crees que son útiles las aplicaciones lineales?

PROBLEMAS

6. Señala en cada caso si puede existir una aplicación lineal T que transforme el primer conjunto de vectores en el segundo y justifica tu respuesta

	Imagen	Resp	¿Por qué?
a)		SI NO	
b)		SI NO	
c)		SI NO	
d)		SI NO	
e)		SI NO	
f)		SI NO	
g)		SI NO	

h)		SI NO	
i)		SI NO	
j)		SI NO	
k)		SI NO	
l)		SI NO	
m)		SI NO	

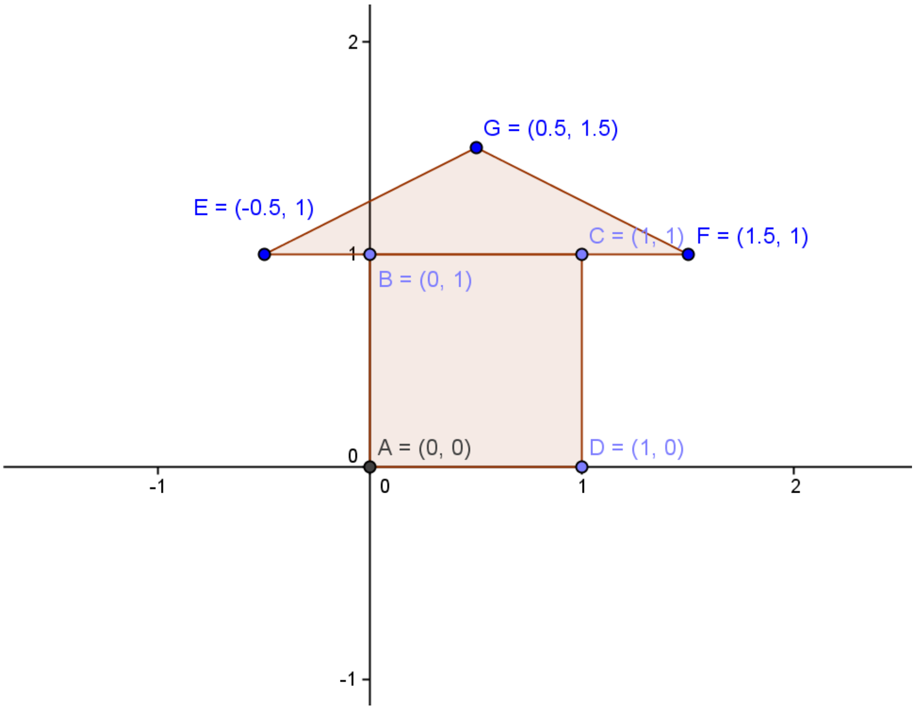
7. ¿Es posible la existencia de una aplicación lineal con las condiciones pedidas en cada uno de los siguientes casos? Rodea la respuesta que consideres correcta y justifícala en cada caso.

Condición pedida	Respuesta
a) Una aplicación lineal de f: $IK^2 \rightarrow IK^2$ tal que $f(x,y)=(y,x)$ ¿Por qué?	SI NO
b) Una aplicación lineal de g: $IK^2 \rightarrow IK^2$ tal que $g(x,y)=(1, x+y)$ ¿Por qué?	SI NO
c) Una aplicación lineal de h: $IK^2 \rightarrow IK^2$ tal que $h(x,y)=(x^2, y^2)$ ¿Por qué?	SI NO
d) Una aplicación lineal de f: $IK^n \rightarrow IK^{n-1}$ tal que $F(x_1,x_2, \ldots, x_n)= (x_1,x_2, \ldots, x_{n-1})$. ¿Por qué?	SI NO

e) Una aplicación lineal inyectiva *f*: $IK^3 \rightarrow IK^2$ ¿Por qué?	SI NO
f) Una aplicación lineal inyectiva de *f*: $IR \rightarrow IR^3$ tal que *Im(f)* sea el *eje x*. ¿Por qué?	SI NO
g) Una aplicación lineal *f*: $IR^4 \rightarrow IR^4$ tal que cualquier vector de la forma *(x,x,y,y)* se transforma en el vector *(1,1,1,1)*. ¿Por qué?	SI NO
h) Una isomorfismo *f* de IR^2 en IR^2 tal que *f(1,1)= (1,1)* y *f(1,2)=(2,2)* ¿Por qué?	SI NO

i) Una aplicación lineal de $f: IK_2[T] \rightarrow IK_2[T]$ tal que si $P(T)=aT^2+bT+c$ entonces $f(P(T))=2aT+b$ ¿Por qué?	SI NO
j) Una aplicación lineal $f: M_{n,m}(IK) \rightarrow M_{,m,\,n}(IK)$ tal que $f(A)=A^t$ ¿Por qué?	SI NO
k) Una aplicación $f: E \rightarrow V$ donde E es un espacio vectorial con base $B=[e_1, e_2, e_3\}$ y V es un espacio vectorial de dimensión 2 con $w_1, w_2 \epsilon V$ cualesquiera, tal que $f(v_1)= w_1, f(v_2)= w_2, f(v_3)= w_1+w_2$ y $f(v_4)= w_1-w_2$. ¿Por qué?	SI NO

8. Observa el siguiente dibujo.
   a. ¿Cómo se transformaría bajo la aplicación lineal *f:* $IR^2 \rightarrow IR^2$ que tiene por matriz asociada respecto a las bases canónicas la *(2, 0; 0,-1)*? Realiza un dibujo en el que aparezca la transformación de la casa bajo esa aplicación.
   b. ¿Qué bases habría que escoger para que la matriz asociada fuera la identidad?



9. Sean *f: E* $\rightarrow$ *F* una aplicación lineal entre espacios vectoriales y V un subespacio vectorial de *E*. Probar que $f^{-1}(f(v))=v$ si y sólo si *V* contiene al núcleo de *f*.

EVALUACIÓN

Evalúa los siguientes aspectos de 0 a 5 (0 = nada y 5 = mucho)

	6	7	8	9
1. ¿Te han parecido muy difíciles los problemas?				
2. ¿Has tenido tiempo suficiente para responder?				
3. ¿Qué problema te ha parecido más difícil? ¿Por qué?				
4. ¿Qué problema te ha parecido más fácil? ¿Por qué?				
5. ¿Se parecen a los problemas que haces en clase?				

Comentarios: Señala algo que hayas aprendido al hacer este cuestionario o algo que te haya llamado la atención. O si por ejemplo has respondido que alguno de los problemas no se parece a los que harías en clase, reflexiona sobre si hacerlos te ayudaría o te dificultaría la comprensión de la asignatura.

8.4.2 Análisis

Si se abre desde el DVD, pinchar en la imagen para ver el documento completo.

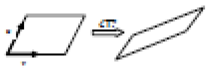
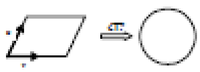
PARTE 2: Problemas

Problema 6: Registro gráfico (13 items).

Enunciado: Señala en cada caso si puede existir una aplicación lineal T que transforme el primer conjunto de vectores en el segundo y justifica tu respuesta.

Descripción: Este problema lo pensé por varios motivos:

1. Detectar modelos intuitivos geométricos y figurales de los estudiantes asociados a la aplicación lineal. Compararlos con los detectados por Gueudet (¿y los de Molina?).
    a. Pero ¿por qué busco modelos intuitivos? ¿Cómo ayuda esto a responder mis preguntas de investigación? La cosa creo que es que les estoy dando una imagen (¿diagrama?) de una posible aplicación lineal. Y me interesa ver cómo se manejan con este registro. Qué tipo de representaciones les son más familiares
2. Evaluar la "comprensión visual" de los estudiantes del concepto de aplicación lineal[2].

	Imagen	Resp	Est.	¿Por qué?
a)		SI	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17	*Lo mismo con otra **inclinación*** (1) *Los vectores se transforman en vectores con diferente "**dirección**"* (3) *Sumando un vector a v* (5) *Puede resultar esa **figura*** (8) *Mantiene cierta proporción en la figura*[3]... (16) *Regla paralelogramo, aplicación suma* (10) *Porque transforma un paralelogramo en otro* (14) *Endomorfismo biyectivo en, por ejemplo* IR^2 (15) *Combinaciones u y v... no se salga de la imagen* (17[4]) En blanco (2)(4)(6)(11)(12)(13)
		NO	9	En blanco (9)
b)		SI	7	Si son de igual longitud, pueden estar inscritos en una circunferencia (7)
		NO	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15,	Vectores concretos (1) Ec. Circunf. No lineal (2)(3, escribe ec.)(9, *cuadrático*)(14[5]) *Operaciones con vectores no dan curvas* (5)(10) Circunferencia no es ev (6)(8) *Se pierde el carácter vectorial de la figura* [6](16)

[2] ¿No estaría también pudiendo evaluar en cierto modo la habilidad visual? Al estar planteada en el registro gráfico, les estoy obligando a interpretarlo, tratarlo, convertirlo. El problema es que son tan directas algunas respuestas, que casi no hay uso operativo del concepto. Por lo que no sé si se puede hablar realmente de manejo del registro gráfico. De hecho, aquí lo que me interesaba era hacer actuar la intuición. El Problema 8 va sí que sería más de manejo de lo visual.

[3] Escribe: *"Se trata de una transformación lineal ya que si el rombo tuviese el doble de grande su imagen sería el doble. En general se mantiene cierta proporción en la figura"*

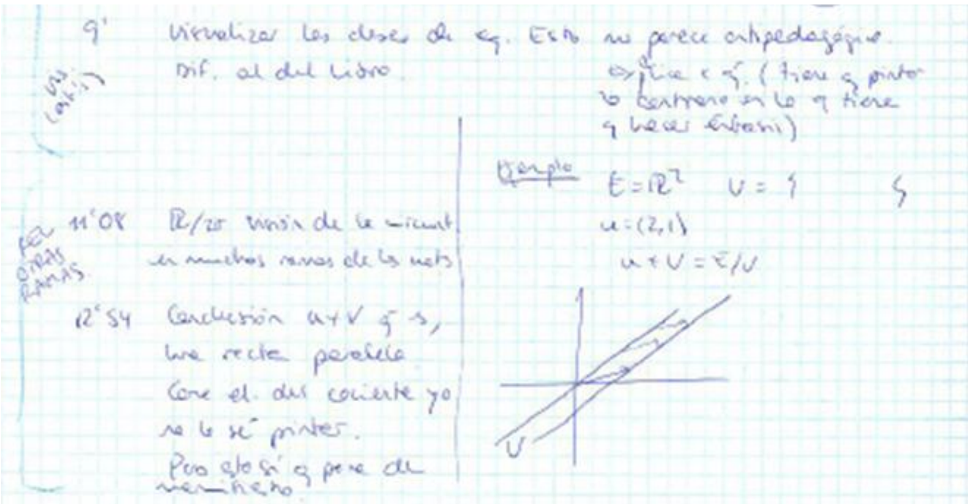
[4] Escribe: *"Porque las combinaciones de las imágenes de u y v formarán un cuadrilátero y por tanto se puede conseguir que no se salgan de la imagen"*

[5] Escribe: *"Porque transformaríamos u, v en algo que no es lineal"*

8.5 OBSERVACIÓN DE CLASES

Pinchar en las imágenes para acceder a ejemplos más completos, si se abre desde el DVD.

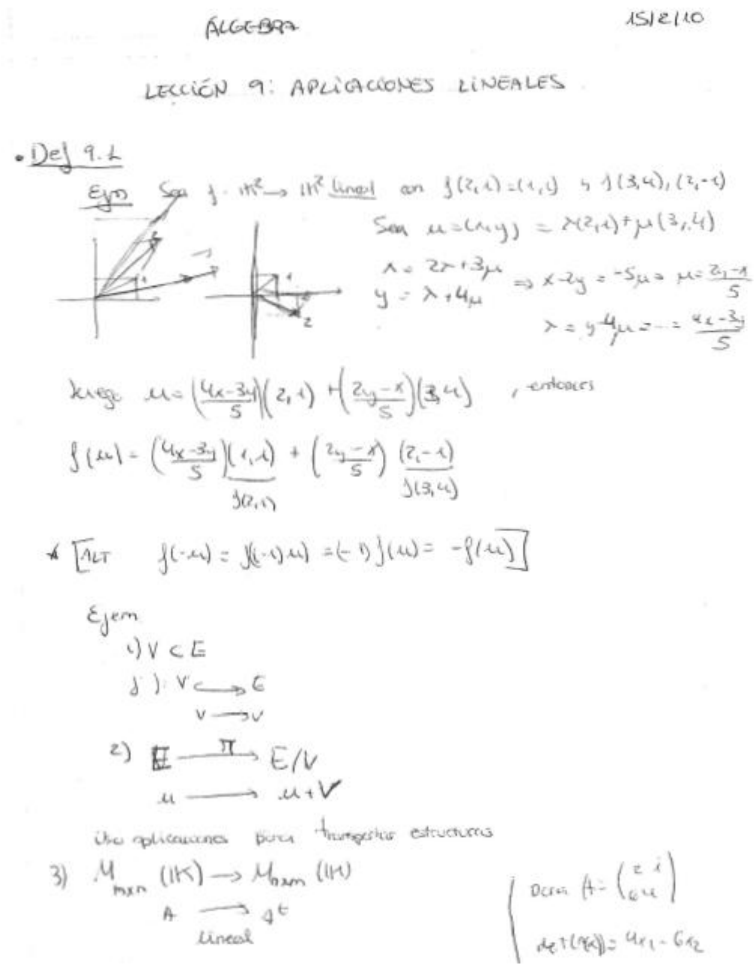
8.5.1 Notas de campo



9' Visualiza las clases de eq. Esto me parece antipedagógico.
Dif. al del libro.
explica e q. (tiene q pintar lo contrario en lo q tiene q hacer ...)
Ejemplo $E=\mathbb{R}^2$ $V=\{\ \}$
$u=(2,1)$
$u+V\in E/V$
11'08 R/20 visión de la circunf en muchas ramas de las mats
12'54 Conclusión $u+V$ q es una recta paralela
Con el. del cociente yo no lo sé pintar.
Pero ella sí q para de ...

8.5.2 Apuntes de los estudiantes

8.5.2.1 Clases de Teoría (Curso 2009/2010)

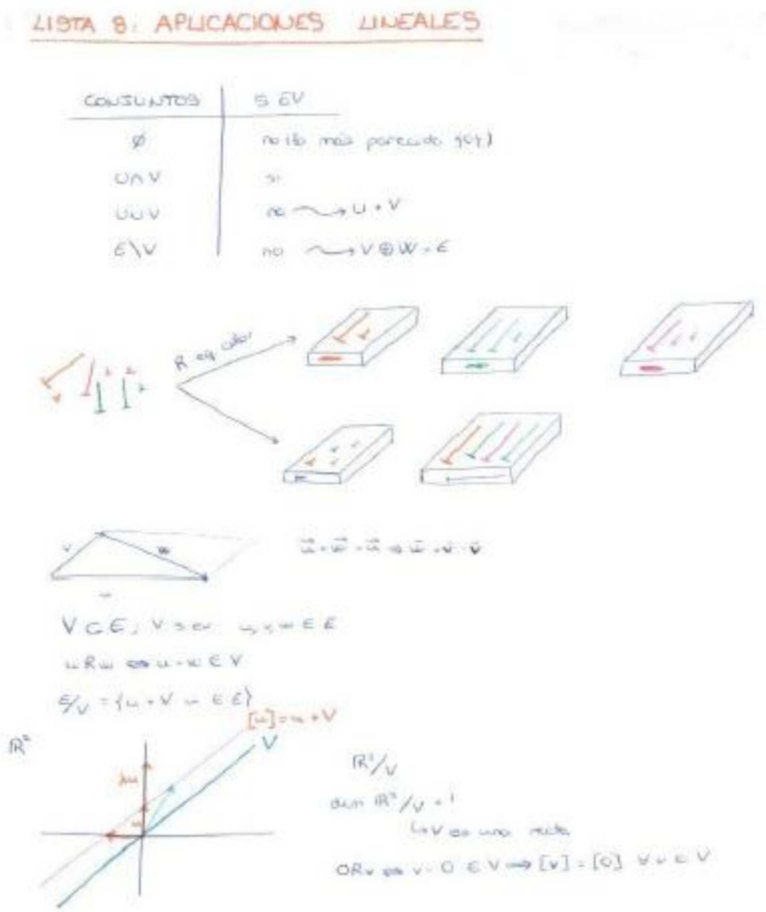


ÁLGEBRA 15/2/10

LECCIÓN 9: APLICACIONES LINEALES

• Def 9.1
Ejo Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lineal con $f(2,1)=(1,1)$ y $f(3,4)=(2,-1)$
Sea $u=(x,y)=\lambda(2,1)+\mu(3,4)$
$x=2\lambda+3\mu$, $y=\lambda+4\mu$ $\Rightarrow x-2y=-5\mu \Rightarrow \mu=\frac{2y-x}{5}$
$\lambda=y-4\mu=\dots=\frac{4x-3y}{5}$
luego $u=\left(\frac{4x-3y}{5}\right)(2,1)+\left(\frac{2y-x}{5}\right)(3,4)$, entonces
$f(u)=\left(\frac{4x-3y}{5}\right)\underbrace{(1,1)}_{f(2,1)}+\left(\frac{2y-x}{5}\right)\underbrace{(2,-1)}_{f(3,4)}$
$\boxed{\text{ALT} \quad f(-u)=f((-1)u)=(-1)f(u)=-f(u)}$
Ejem
1) $V\subset E$
$j: V\hookrightarrow E$
$v\mapsto v$
2) $E\xrightarrow{\pi}E/V$
$u\longmapsto u+V$
Usa aplicaciones para transportar estructuras
3) $M_{m\times n}(\mathbb{K})\to M_{n\times m}(\mathbb{K})$
$A\longmapsto A^t$ lineal
Dem $A=\begin{pmatrix}2&1\\6&4\end{pmatrix}$
$\det(A)=4\cdot 2-6\cdot 1$

8.5.2.2 Clases Prácticas (Curso 2010/2011)



8.5.3 Diario de observación

DIARIO 4 CLASES ÁLGEBRA LINEAL

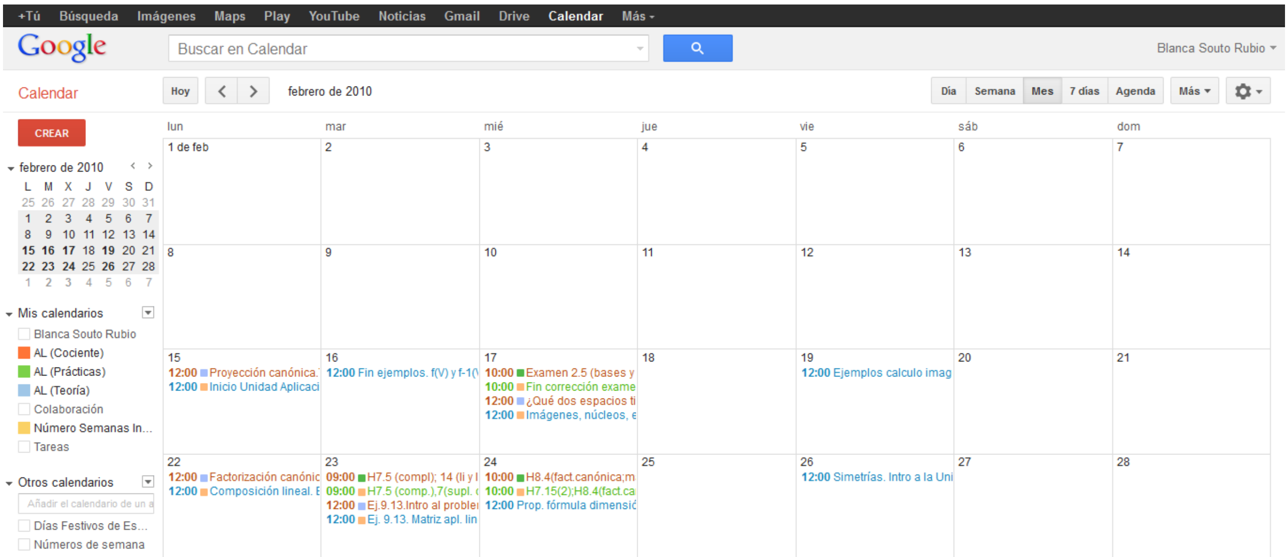
Lunes 14/02/2011, 12:00-13:00. Págs 57. G..

- Resumen clase: Introducción a las operaciones con subespacios. Ejemplo de intersección. Dibuja la unión de 2 rectas en el espacio.
    - V1: Intro a las operaciones con subespacios. Ejemplo de intersección, con un subespacio en paramétricas y el otro en implícitas. Interpretación geométrica de la intersección (V1:15:22)

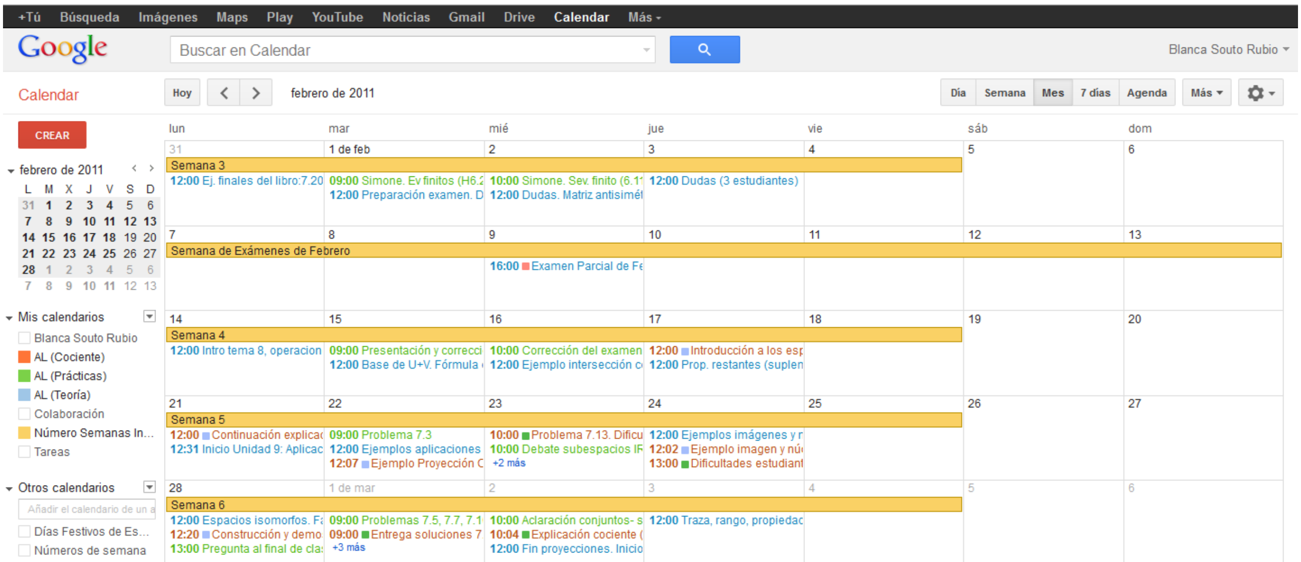
    - V2: Operación más complicada, la unión, pero no funciona. Ejemplo de las rectas en el espacio. No hace mucho con él. Interesante episodio de ver que dos representaciones distintas, L[X] y intersección infinita de subespacios, corresponden, de hecho, con el l mismo objeto. Vale la pena verlo más detenidamente. Lo malo, que no hay ni una imagen más global.

8.5.4 Calendario y Agenda de las observaciones de clases (con Google Calendar)

8.5.4.1 Fase I (Curso 2009/2010)



8.5.4.2 Fase II (Curso 2010/2011)



8.5.5 Visionado global de las clases

8.5.5.1 Fase I (Curso 2009/2010)

MIÉRCOLES 17/02/2010
Resumen clase: Llega un poco tarde. Ejemplo de aplicación lineal y^t=Ax^t. Las aplicaciones lineales son multiplicar. Se pasa un buen rato con un ejemplo de IK2 en IK3, calcula imágenes directas e inversas, núcleos, dimensiones... Razonamiento de teoría de conjuntos, contenidos entre f(V) y f-1(f(V)). Representación gráfica de los pulmones para producir ejemplo de una aplicación lineal no inyectiva (traducción al registro simbólico y de ahí al de tablas). Calcula imagen, núcleo y dimensión. Pregunta, quiero encontrar dos espacios distintos que me den la misma imagen. respuesta, V y V+kerf.

V1: Llega tarde. Comentario sobre tener un trabajo en el que no te des cuenta de la hora que es.
#00:01:25-0# No se ha tomado Bolonia a broma del todo. Ha intentado incluir sus opiniones. Más sobre calificaciones. Hay mucha gente a la que le ha salvado el culo trabajar.
V2: Esta es la lección en la que más han tardado en aparecer las matrices. Las aplicaciones lineales y las matrices son la misma cosa. Ejemplo de la matriz por una columna.
5:00 Las aplicaciones lineales son multiplicar por (ejemplo precio, homotecia…).
6:00 Imagen, ecuaciones paramétricas. Núcleo.
8:47 ¿Quién es la dimensión del núcleo de f? Se queja de quien contesta. Dimensión de la imagen. Contesta una repetidora (Ana Escribano). Lo verán. ¿Cómo se puede razonar de otra manera? Con las ecuaciones paramétricas.

11:26 #00:11:15-2# Ejemplo de una aplicación dada por una matriz IK4 en IK3. Calcula muchas cosas de él, imagen (sistema generador, las columnas), dimensiones, núcleo.
27:00 #00:27:03-3# Razona con conjuntos, nada que ver, es de matemáticas básicas. Relaciones de contenidos entre f(V) y f-1(V). Queja sobre Matemáticas Básicas.
29:21 #00:29:13-7# No se puede llegar en Febrero y estar así. Los médicos no pueden decir que no se les atiende.
30:00 Calcular lo que vale f-1(V), encuentra una base.
35:00 Comentario sobre que hay que ser capaz de producir enunciados de la materia.
36:00 #00:35:52-2# Todo se apoya en el dibujo que hice ayer de conjuntos (el de los pulmones). ¿Cómo fabricar una aplicación lineal no inyectiva a partir de ese dibujo? [[EPISODIO INTERESANTE, TAMBIÉN PARA EL COCIENTE. A partir de una representación gráfica construye una aplicación lineal no inyectiva (registro simbólico) y de ahí pasa a la expresión matricial (registro de tablas)]]. A día de hoy me han enseñado a fabricar aplicaciones entre Ik3 y IK2. O sea una matriz aquí con tres columnas y dos filas (las escribe con bolinches). #00:39:29-1# ¿Qué pongo aquí para poner que el e1 va al e1?
41:00 #00:40:35-9# Calcula las imagen, núcleo, dimensiones. ¿Es sobreyectiva?
42:00 Pregunta: Sea V un sev de IK, quiero encontrar dos espacios distintos que me den la misma imagen. V y V+kerf. Veamos por qué.
43:55 Así podéis fabricar montañas de ejemplos. ¿Cómo construiríais dos espacios de manera que tengan la misma imagen por f? Que su diferencia está en el núcleo de f.

8.5.5.2 Fase II (Curso 2010/2011)

Miércoles 19/01/2011, 12:00-13:00. Págs 13-15. G.

- Resumen clase: ejemplo de función C y no C1 construida con el sen(1/x), #00:00:01-1# diferencia entre ecuaciones implícitas y paramétricas de subespacios, info que nos dan y cómo pasar de una a otra (V1), definición dependencia lineal de un número de vectores dados, forma más operativa de comprobar si unos vectores son o no dependientes (con los lambdas), ejemplo antes de demostrar para ver cómo se usa esta proposición, comentario de que sería más apropiado formular la propiedad al revés ya que es lo que en realidad se demuestra (pero respeta el 90% de los libros), ejemplo de cómo comprobar la dependencia o independencia de vectores en IKn y a la vez cómo dar n vectores independientes en IKn que incluyan r independientes, presentación de las ei.

[…]

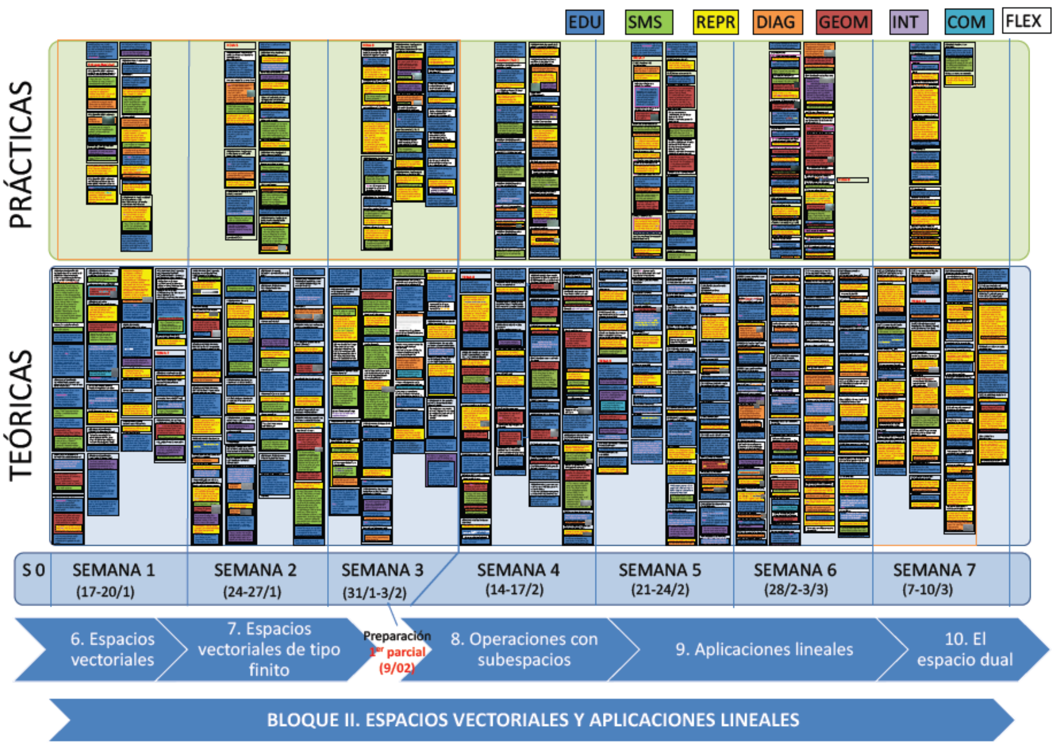
EPISODIO ECUACIONES IMPLÍCITAS Y PARAMÉTRICAS

Copia el sistema de ecuaciones que define V mientras lo lee en voz alta. #00:00:20-1#

#00:00:20-1# Sin pensar. (Dice algo que no se entiende porque se está colocando la cámara). Esto usualmente lo escribimos así. V: - -. En esta primera raya va la primera ecuación y en esta la segunda ecuación. Por ser la primera vez que lo escribo. Esto ya sé que es sev de IK4. ¿Por qué? Porque es el espacio de soluciones de un sist. lineal homogéneo. Vamos a expresarlo de otra manera. ¿Cómo? Resolviéndolo. Este sistema es el mismo que este. Eh, si sumo las ecuaciones #00:01:15-8# me queda x1+x3=0 y si las resto x2+x4=0. (Dice algo sobre las ecuaciones de Gauss, que sería más difícil, pero que lo sabemos hacer, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas). #00:01:35-4# Por tanto, esto implica que x pertenece a V sí y sólo si, a ver si estáis de acuerdo con esto, existen lambda y mu en IK tales que x1= - lambda; x2= - mu, voy a poner aquí el -mu un poco alejado; x3= lambda y x4= mu. ¿Estáis de acuerdo con eso? (se vuelve) #00:02:14-5#

8.5.6 Póster

En el documento pdf se puede ampliar y ver con detalle los episodios de cada día mediante la Herramienta Lupa.

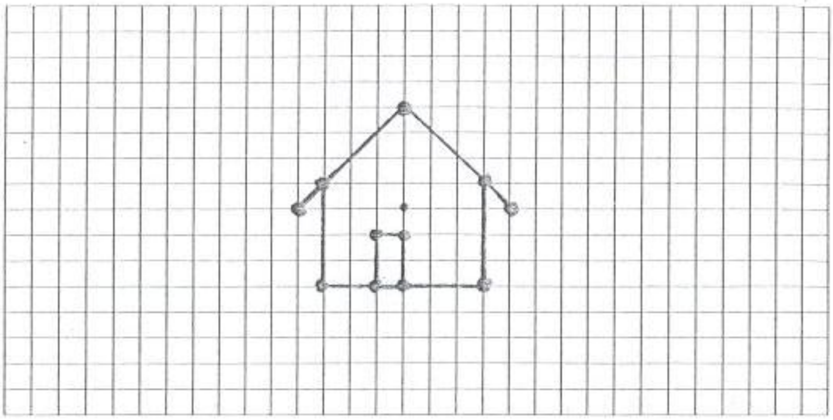


8.6 ACTIVIDADES DE REFLEXIÓN Y AUTOEVALUACIÓN

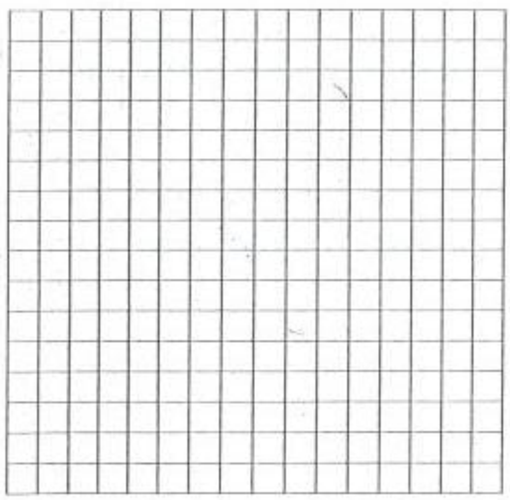
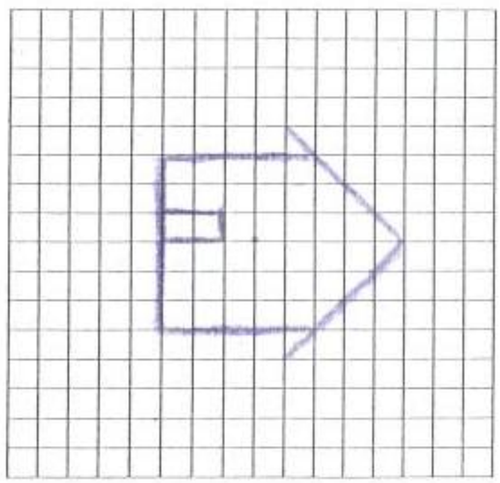
Nombre y Apellidos ____

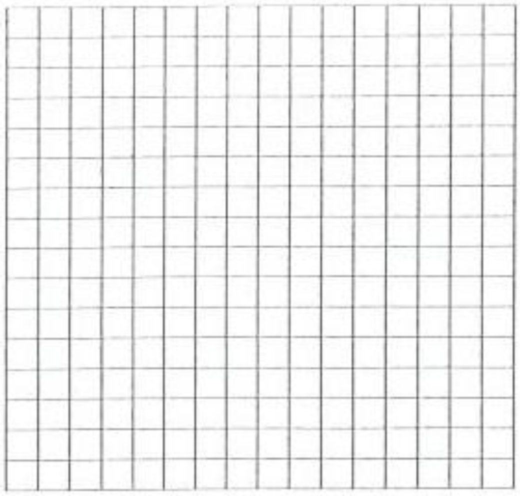
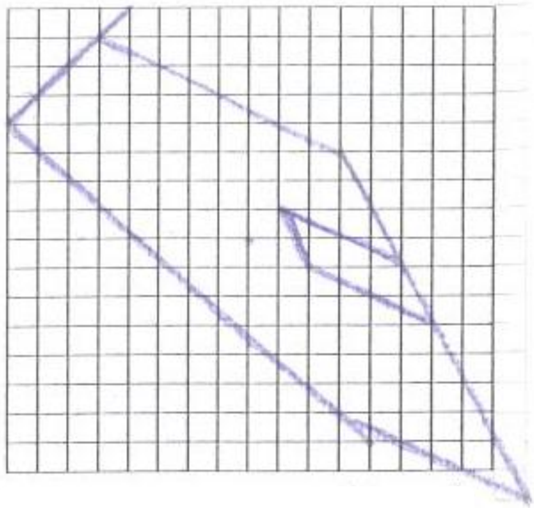
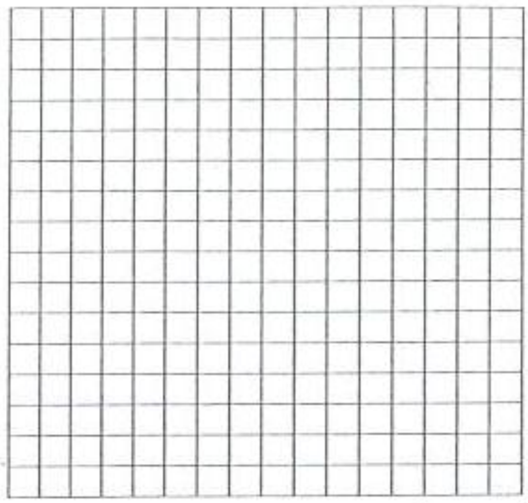
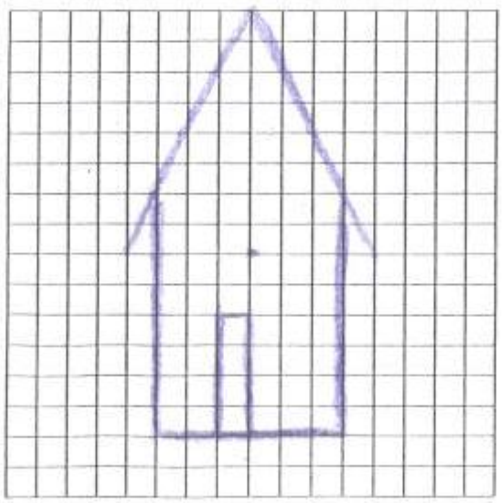
Correo electrónico____

1. Completa lo que falta: la representación geométrica o la expresión algebraica/matricial. Describe geométricamente (sin hacer referencia a las coordenadas) la transformación que sufre la casa en cada caso. Explica qué procedimiento has seguido para completar los datos pedidos en cada columna. Por último señala cuál te ha resultado más fácil y por qué.

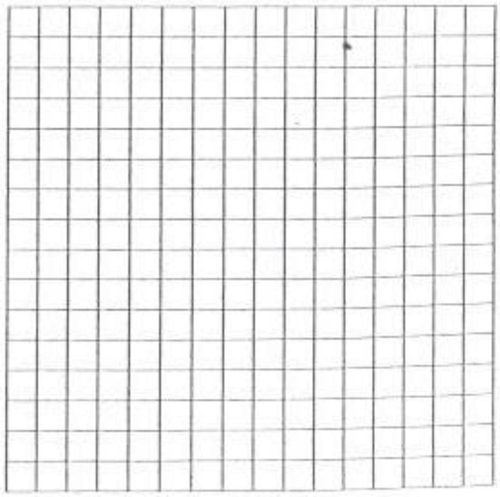


Los puntos señalados son, por columnas, $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -3 & -1 & -3 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

 $f(x,y)=(y,x)$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	
a) Descripción geométrica	b) Descripción geométrica

 $f(x,y) = (x+y, y)$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
c) Descripción geométrica	d) Descripción geométrica
 $f(x,y) = (x+y, 0.5x+0.5y)$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$	
e) Descripción geométrica	f) Descripción geométrica
Procedimiento seguido para dibujar	Procedimiento seguido para calcular la expresión algebraica
Más fácil completar esta columna. ¿Por qué?	Más fácil completar esta columna. ¿Por qué?

2. ¿Qué tipo de imágenes se obtienen con aplicaciones lineales? A la vista de las conclusiones obtenidas, representa gráficamente un ejemplo de aplicación que no sea lineal y explica por qué no lo es. Si puedes, escribe también su expresión algebraica.



3. De los endomorfismos anteriores,
    a. ¿Cuáles no son diagonalizables? Explica en cada caso por qué.

    b. ¿Cuáles son ortogonales? ¿Cómo lo sabes? Escribe la definición de endomorfismo ortogonal. Interprétala gráficamente. Representa gráficamente en cada caso la base respecto a la cual la matriz de la aplicación es diagonal.

c. Representa gráficamente y calcula los subespacios invariantes del endomorfismo del apartado d). Utiliza esta información para diagonalizar el endomorfismo/la matriz, esto es, encontrar una P invertible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

4. Clasifica los endomorfismos anteriores según las siguientes relaciones de equivalencia. Para ello especifica el número total de clases resultantes, así como un representante de cada clase. Por último, explica el procedimiento seguido para clasificar.

Relación de equivalencia	Clases resultantes (nº)	(representantes)	Procedimiento para clasificar
Semejanza			
Conservar la orientación			

5. Pregunta para debatir: ¿tiene sentido clasificar endomorfismos por congruencia?

Formas de mirar una matriz (simétrica)

Las matrices simétricas han desempeñado un papel especialmente importante durante el curso. Trata de rellenar el siguiente mapa conceptual con las diferentes formas en que podemos mirar o en que puede aparecer una matriz simétrica.

8.7 CUESTIÓN 6

8.7.1 Enunciado y Solución

Pinchar en la imagen para ver el documento completo.

SOLUCIÓN

a) Una base $B = \{u_1, u_2\}$ respecto a la que $Mf(B)$ es diagonal está representada en la siguiente figura:

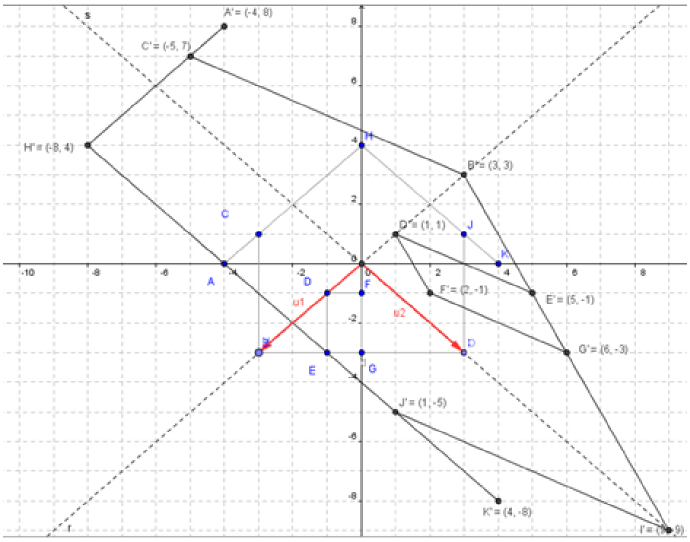


Figura 1

Es decir, u_1=(-3,-3) y u_2=(3,-3), ya que esos vectores definen dos rectas invariantes, que serían los dos subespacios propios de este endomorfismo. Además, en el dibujo vemos que u_1 se transforma en $-u_1$ y u_2 se transforma en $3u_2$. Por lo tanto, *-1* y *3* son los valores propios asociados a u_1 y u_2. Así, $M_f(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Había varias formas de obtener $M_f(\mathcal{E})$ mirando la representación gráfica. Por ejemplo, una posibilidad era fijarse en los vectores $\overrightarrow{OK}$ y $\overrightarrow{OH}$ que nos daban la siguiente información: (4,0)→ (4,-8) y (0,4)→ (-8,4). Como la aplicación es lineal, para saber cómo se transforman e_1 y e_2 basta con dividir todo por 4. Así $M_f(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

La segunda parte del apartado consistía en la traducción algebraica del apartado anterior, ya que la matriz *P* pedida no es más que

$P = C(B, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ y se cumple que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M_f(B) = P^{-1} M_f(\mathcal{E}) P =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

c) Si, *f* es autoadjunta porque como puede observarse en la Figura 1, existe una base ortonormal de autovectores, basta con normalizar u_1 y u_2. También podría razonarse diciendo que es autoadjunta porque su matriz respecto a la base estándar que es ortonromal, es simétrica.

8.7.2 Análisis con Excel

Pinchar en la imagen para acceder a la hoja de cálculo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	CORRECCIÓN CUESTIÓN 6							
2								
3		a)	b)	c)	TOTAL	Observaciones		
4	1	0	0,1	0	0,1	Sólo algebraica. Para calcular la base respecto a la que es diagonal, utiliza el método de Gauss??		
5	2	0	0,2	0,2	0,4	Algebraicamente todo bien. Autoadjunta por ser simétrica.		
6	3	-	-	-	-			
7	4	0	0,1	0	0,1	Sólo algebraico, pero parte de la expresión de la función (x,y)-f->(-2y,y). No se da cuenta de contradicción con no ser sobre y el dibujo.		
8	5	0	0	0	0	Revisar, respuesta muy interesante, con giros, rectas que pasan por otro punto que no es el (0,0)		
9	6	-	-	-	-			
10	7	-	-	-	-			
11	8	-	-	-	-			
12	9	-	-	-	-			
13	10	-	-	-	-			
14	11	0,1	0,1	0	0,2	Se ve que ha entendido la idea, pero le ha faltado encontrar la otra dirección invariante.		
15	12	-	-	-	-			
16	13	-	-	-	-			
17	14	0	0,1	0	0,1			
18	15	0	0,1	0	0,1	Mf(E) bien, autovalores bien. No calcula la base.		
19	16	-	-	-	-			
20	17	0	0,2	0	0,2	Diagonaliza bien, pero sólo algebraicamente.		
21	18	-	-	-	-			
22	19	0	0,1	0	0,1	M_f(E) bien. Se equivoca con un autovalor (-1 y 6). Toma como base (1,1) y (0,0)!!		
23	20	-	-	-	-			
24	21	-	-	-	-			
25	22	-	-	-	-			
26	23	-	-	-	-			
27	24	0	0	0	0	Construye M_f(E) como matriz 5x2		
28	25	0,1	0,2	0,2	0,5	He puntuado porque recuerdo que este es el que me enseñó Gamboa. Yo sólo tengo los dibujos		
29	26	0,1	0,2	0,2	0,5	Primero b) bien, algebraico, luego c) por ser simétrica, después a) usando b) no dibuja		
30		0,025	0,11666667	0,05	0,191666667	0,40833333		
31		12	12	12				
32					Apartado	Media	Total	
33					a) Diagon. Gráfica	0,025	0,175	12,5
34					b) Diagon. Algebraica	0,117	0,083	58,3333333
35					c) Autoadjunta	0,050	0,150	25
36					TOTAL	0,192	0,408	31,9444444

8.8 CUESTIONARIO DE MOODLE

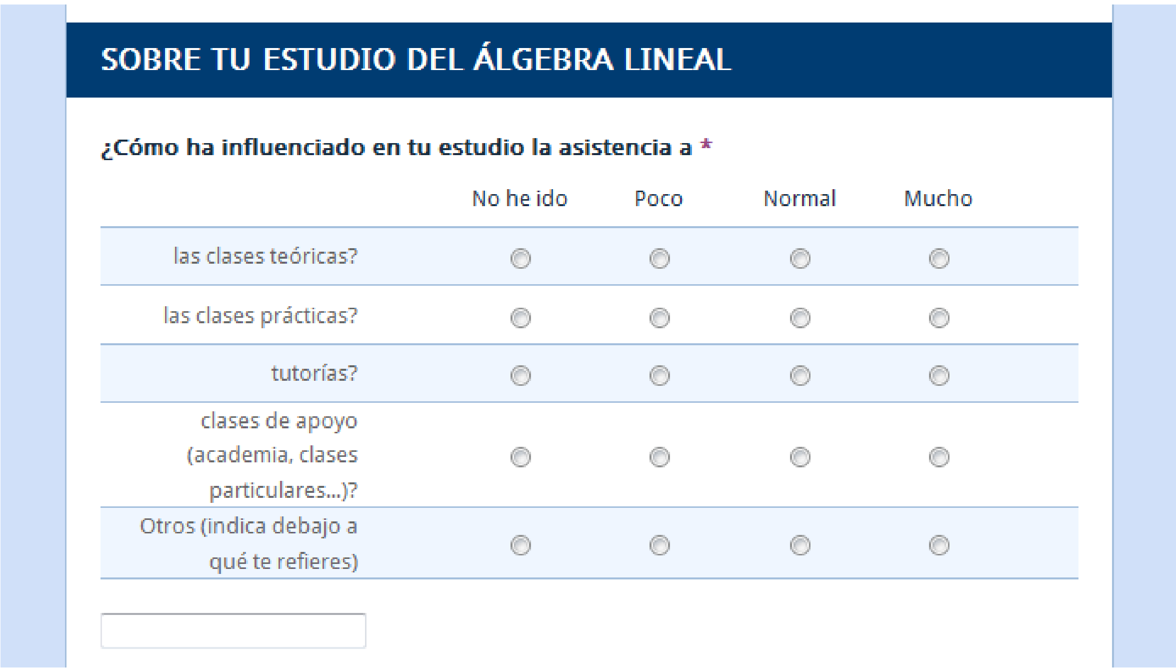
8.8.1 Formulario en GoogleDocs

Pincha a la imagen para acceder al documento completo.

Encuesta sobre Álgebra Lineal

Con esta primera parte del cuestionario pretendo recoger datos para mi tesis en relación a cómo has estudiado y tus percepciones sobre lo que has aprendido. Para que no te lleve mucho tiempo, he intentado que sea ágil de responder, así que ánimo.

*Obligatorio



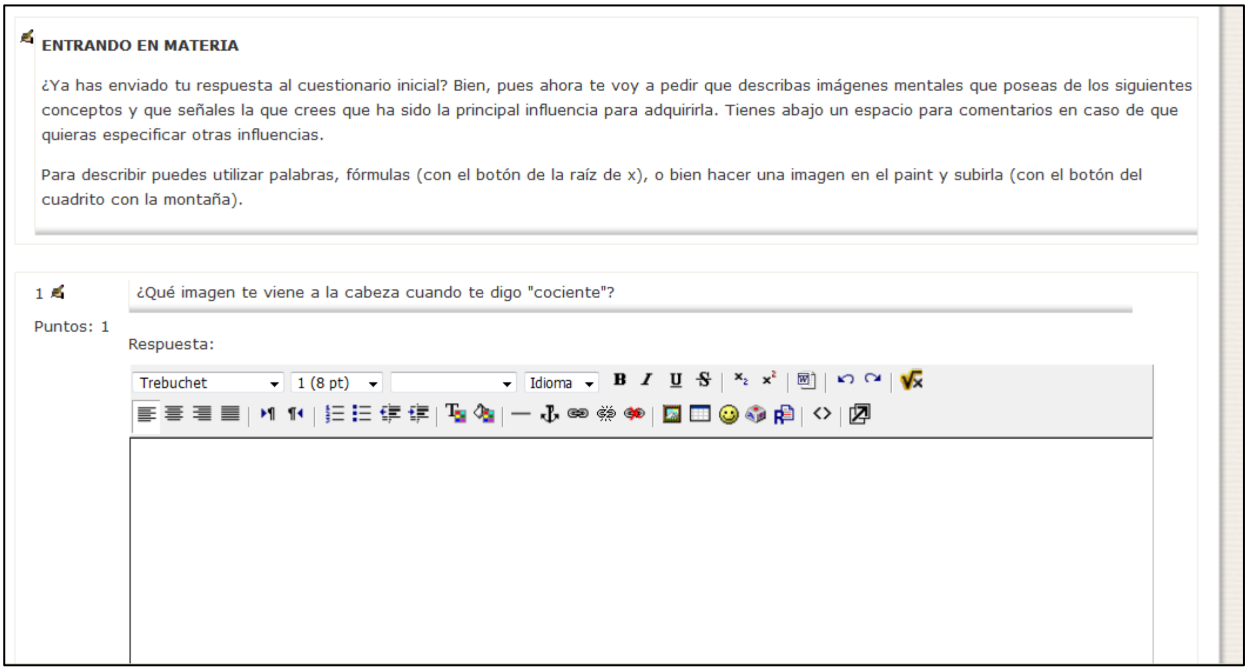
SOBRE TU ESTUDIO DEL ÁLGEBRA LINEAL

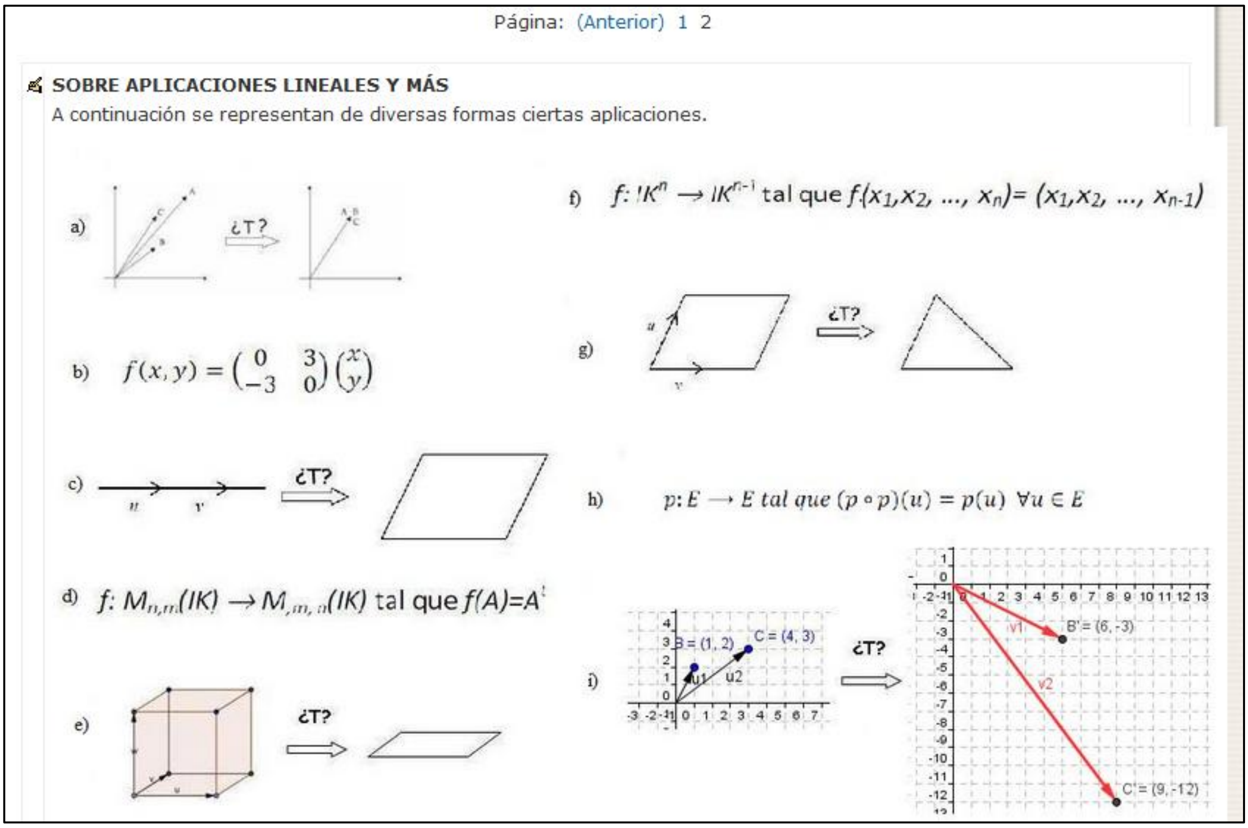
¿Cómo ha influenciado en tu estudio la asistencia a *

	No he ido	Poco	Normal	Mucho
las clases teóricas?	○	○	○	○
las clases prácticas?	○	○	○	○
tutorías?	○	○	○	○
clases de apoyo (academia, clases particulares...)?	○	○	○	○
Otros (indica debajo a qué te refieres)	○	○	○	○

8.8.2 Cuestionario de Moodle

Pincha la imagen superior para acceder a la primera página y la inferior para la segunda.





8.9 CONSENTIMIENTOS INFORMADOS

Pinchar en la imagen para acceder a los documentos que se entregó a los participantes.

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA ESTUDIANTES DE LA ASIGNATURA DE 1º de GRADO: ÁLGEBRA LINEAL

DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN: Usted ha sido invitado a participar en un estudio de investigación realizado con motivo de la tesis doctoral de Blanca Souto Rubio bajo la supervisión de Inés Mª Gómez- Chacón. El principal objetivo de dicha investigación es explorar el papel de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal en el primer curso de grado en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Se le pedirá que participe en las actividades comunes de clase con la mayor normalidad posible. Esto incluye:

- Que mantenga su grado de asistencia a las clases.
- Que continúe realizando las entregas semanales de problemas.
- Que participe en las actividades de clase cuando se le pida como: exponer los problemas en la pizarra, trabajar en grupo, asistir a las tutorías, utilizar el Moodle de la asignatura.
- Que consulte sus dudas en tutorías individuales cuando así lo necesite.

8.10 CARTA DE DAVID

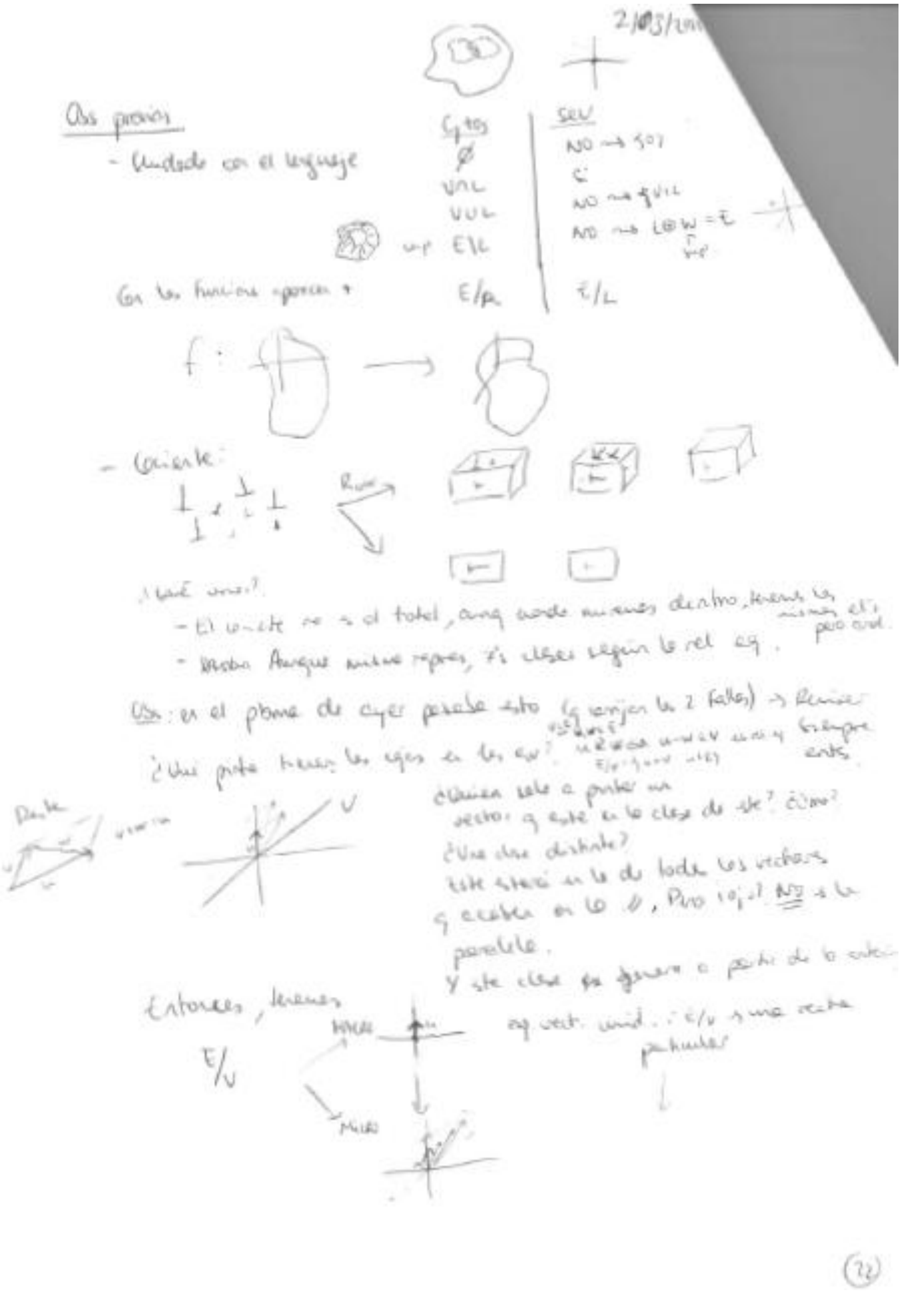
Pinchar en la imagen para acceder al documento completo y a una transcripción de las partes relevantes para la investigación.

Un poco en general, creo que cualquier tipo de apoyo visual supone una ayuda de valor a la hora de transmitir ideas o conceptos nuevos; mi experiencia de pasar de un profesor que apenas utiliza esto a otro que sí lo usa habitualmente me ha hecho ver las posibilidades que esto representa; creo que facilita enormemente la tarea de introducir ideas y de "digerir" los razonamientos al suponer un apoyo sobre el que se puede trabajar. Mientras se sea precavido a la hora de utilizar este apoyo visual, y no "fiarse" de él para resolver problemas, creo que supone una ayuda enorme, y debería ser un elemento fundamental en cualquier asignatura.

8.11 FOCALIZACIÓN EN LOS COCIENTES

8.11.1 Notas de Campo y de Preparación de las Clases

A continuación se muestra un ejemplo de notas de preparación de las clases prácticas (pinchar para ver más ejemplos). Ver las notas de campo de la sección sobre Observación de clases (son de las Semanas 4 a la 6 por incluir numerosos episodios sobre los Cocientes).



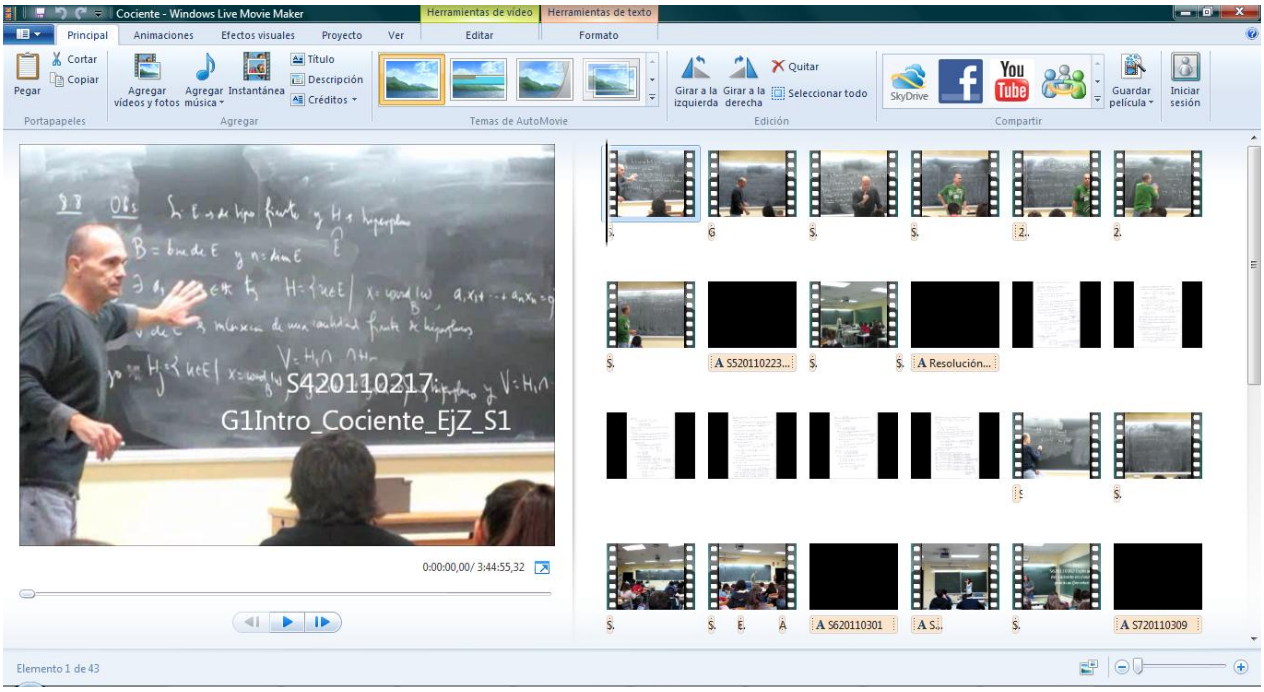
8.11.2 Calendario y Agenda de las observaciones de clases

Para consultar el documento completo, ver el calendario y agenda del Curso 2010/2011 en la sección sobre Observación de clases.

lun	mar	mié	jue	vie
14 de feb	15	16	17	18
Semana 4				
			12:00 Introducción a los esp	
21	22	23	24	25
Semana 5				
12:00 Continuación explicac	**12:07** Ejemplo Proyección C	**10:00** Problema 7.13. Dificu	**12:02** Ejemplo imagen y nú **13:00** Dificultades estudiant	
28	1 de mar	2	3	4
Semana 6				
12:20 Construcción y demo	**09:00** Entrega soluciones 7 **12:00** Fin proyección canóni	**10:04** Explicación cociente (		
7	8	9	10	11
Semana 7				
14	15	16	17	18
Semana 8				
	09:00 ¿Lo que hace el cocie			
21	22	23	24	25
Semana 9				
	09:40 Pbma 9.5(iii)Sobre Fa	**13:00** Tutoría Grupo 1	**13:00** Tutoría Grupo 2	**12:00** Tutoría Grupo 3
28	29	30	31	1 de abr
Semana 10				
13:00 Tutoría Grupo 4 (intento				
4	5	6	7	8
Semana 11				
13:00 Tutoría Grupo 4				
11	12	13	14	15
Semana 12				
18	19	20	21	22
Semana Santa				
25	26	27	28	29
Semana Santa	Semana 13			
	16:00 Tutoría con Ángel			
2 de mayo	3	4	5	6
Semana 14				
9	10	11	12	13
Semana 15				
16	17	18	19	20
Semana 16				
		10:30 Pbma 13.8, prod. esc		
23	24	25	26	27
Semana 17				
30	31	1 de jun	2	3
Semana 18				
			12:00 Pbma 14.19 en clase	

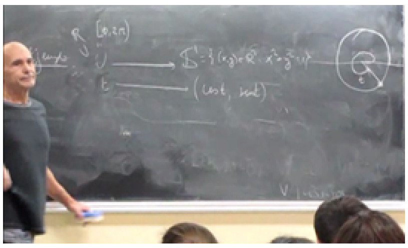
8.11.3 Película sobre los Cocientes con Windows Live Movie Maker

Pinchar sobre la imagen para acceder a la película sobre los Cocientes.

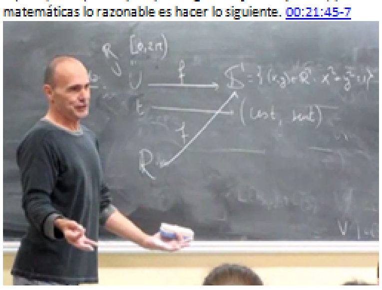


8.11.4 Transcripción de la Película sobre Cocientes

Pinchar sobre la imagen para acceder al documento completo.



Eh, y esta sería una solución bastante buena. Muy buena. Muy buena. 00:20:30-8 Eh... Pero aún hay un mierdero inconveniente, ¿no? Y es que este conjunto no es ni abierto ni.. ¿Os han explicado lo que es abierto y cerrado? (Les mira) 00:20:43-0 No es abierto por culpa del cero (señala a *0*) y no es cerrado porque le falta el *2π* (señala). 00:20:48-4 Y eso, bueno, para parametrizar la circunferencia nos la "refanfinfla" y podríamos vivir como Dios, pero para hacer otras cosas en matemáticas el que el dominio de la parametrización (señala la *U=[0,2π)*) no sea ni abierto ni cerrado, es un pequeño incordio. 00:21:03-2 Entonces, alternativa. Alternativa igual de buena que la tuya. Igual de buena que la tuya. Dice, nada (escribe una *IR* debajo y una flecha que llega a la parte de la imagen). Yo con dos "cojones". Voy a poner todo *IR*. 00:21:14-0 Y dice, eso está mal. Porque vamos a llamar *f* a esta cosa (escribe una *f* sobre la parametrización inicial). El cero y el *2π* tienen la misma imagen. 00:21:25-7 Entonces siempre que tú tengas una situación de este estilo en que la *f*... Llamo *f* a esta tipa (escribe una *f* sobre la última flecha (inclinada) que hizo). 00:21:33-4 La que manda el *t* a *(cos t, sen t)*. Siempre que tengas una *f* sobreyectiva, pero no inyectiva, siempre en matemáticas lo razonable es hacer lo siguiente. 00:21:45-7



Formalización del ejemplo de la parametrización de la circunferencia.

Definir en IR una relación de equivalencia. (Comienza a escribir mientras habla). 'Se define en IR la relación de equivalencia'... t está relacio... 00:22:00-8 Voy a poner así. Esta R (la señala) no tiene nada que ver con la de los números IR. Es una R de, la inicial de relación. 00:22:05-5 t está relacionado con s sí y sólo sí... Y yo lo que quiero poner en realidad es f(t) =f(s). (Lo escribe). 00:22:12-8 Pero claro, esto me resulta un poco desagradable, porque resulta que para la función que quiero definir... 00:22:20-2 Quiero definir y va y la uso a ella misma para definirlo. 00:22:24-9 Y ahora la pregunta es, ¿cuándo dos números reales comparten el seno y el coseno? Comparten el seno y además comparten el coseno. 00:22:33-1 (Se oyen murmullos). 00:22:35-5

G: Cuando su diferencia es múltiplo de 2pi. ¿Sí? ¿Habéis contestado eso? 00:22:39-1

(Sigue escribiendo). 'Equivale a que t menos s pertence a 2piZ.' ¿Entendéis lo que significa? (Se vuelve). 00:22:46-7 Igual que nZ significa ser de la forma n por un entero, 2piZ significa ser de la forma 2pi por un entero. 00:22:54-4

Bueno, al conjunto cociente habría que llamarle... (Escribe IR/R). 00:23:03-0 Así o... Me imagino que llamáis así a los conjuntos cocientes. Cuando tenéis un conjunto X y una relación de equivalencia R, ¿llamáis así a los conjuntos cociente? Pues habría que llamarlo así. 00:23:12-3 Pero claro, esto no recuerda para nada a la "puta" relación de equivalencia que acabamos de fabricar. 00:23:18-2 Dices, en realidad, ¿quién era R? Una manera visual de poner eso es hacer así. 'IR cociente de 2piZ' (Lo lee y escribe a la vez). 00:23:25-9 Y esto entra por los ojos. Significa que en IR he llamado iguales a dos números cuya diferencia sea múltiplo entero de 2pi. 00:23:34-8

Aquí hay una aplicación (escribe una flecha inclinada hacia abajo) que se suele llamar aplicación canónica, que es la que manda a cada número real a su clase de equivalencia. 00:23:44-2 ¿Entendéis de lo que estoy hablando? ¿Sabéis lo que es clase de equivalencia de un elemento? 00:23:48-6 Es el subconjunto de IR formado por todos los individuos relacionados con el dado. 00:23:54-8 Y el conjunto cociente precisamente consiste en las clases de equivalencia vistas ya no como clases de IR sino como puntos del nuevo conjunto. 00:24:05-1 ¿Entendéis bien lo que estoy diciendo? (Pone cara de indiferencia). 00:24:07-2

Y ahora esta aplicación 'factoriza', se dice (escribe una flecha más, de IR/2piZ a S), a través del cociente. Es decir, existe aquí una f tilda (denota a la flecha con ftilda) que se define de esta manera. 00:24:19-5 ¿Cómo escribís la clase de t? Yo creo que hay dos maneras de escribir la clase de t. 00:24:22-8 Una es esta (escribe [t]), poner t entre corchetes. Y otra, más saludable, que es poner t más 2piZ. 00:24:30-4 Porque esta te recuerda en quién "cojones" consiste la clase de t. 00:24:34-8 La clase de t consiste en todos los individuos que se llaman t más dos por pi por algún entero. 00:24:39-9 Y a esto lo mandas pa acá. (Hace una flecha hacia S, que borra. Y hace una nueva que va de t+2piZ a (cost, sent)). 00:24:50-9

8.12 PROBLEMA 7 CON AMPLIACIÓN

8.12.1 Enunciados

8.12.1.1 Inicial

1

Problema 7 con ampliación

Instrucciones. Vamos a trabajar por grupos en torno al Problema 7 de la hoja 8 de problemas.

- Elegid a una persona del grupo para que tome nota de todo lo que discutáis en esta hora de clase, tanto si lleva a la respuesta correcta como si no.
- Tratad de ser precisos con el lenguaje y explícitos con las ideas que tengáis en la cabeza para facilitar la tarea de la persona que escribe. Para ello podéis ayudaros de hojas en sucio que deberéis entregar junto a las respuestas.
- La intuición es válida, pero debéis esforzaros por justificar vuestros argumentos matemáticamente. Para ello podéis y debéis utilizar apuntes, libro...
- Cada grupo entregará su respuesta junto a esta hoja el próximo miércoles día 16 de Marzo de 2011. Fijaremos una hora de tutoría para corregirlo.

Antes de empezar rellenad los siguientes datos sobre los componentes del grupo, situando en primer lugar el nombre de la persona que escribe:

	Nombre	DNI	e-mail
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Problema 7. Resuélvelo.
Calcular la matriz respecto de la base estándar de una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ que cumpla las condiciones siguientes:

1. $f((1,0,0)) \in L\,[(0,0,1)]$
2. $f^2 = f$
3. $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : x + z = 0\}$

Pregunta 1. ¿Qué tipo de aplicación es? Representa gráficamente la función f. ¿Cómo transforma esta aplicación el espacio $\mathbb{K}^3$? Esto es, explica una forma geométrica de calcular la imagen de un vector u sin usar la matriz.

- Pista 1: Fíjate en el cubo cuyos lados son los vectores de la base canónica. ¿Cómo lo transforma f?
- Pista 2: Utiliza lo visto en la página 193 del libro para describir f sin necesidad de tomar coordenadas.

Pregunta 2. ¿Cómo es la imagen de f? ¿Es f sobreyectiva? En caso de que la respuesta sea positiva, explica por qué. En caso de que la respuesta sea negativa da un vector de $\mathbb{K}^3$ que no esté en la imagen.

Pregunta 3. La función f no es inyectiva. ¿Por qué? Encuentra dos vectores cuya imagen sea la misma, por ejemplo $(0,0,0)$. ¿Cuántos vectores más hay con esa misma imagen? Enuncia una condición geométrica que cumplan todos los vectores que tienen por imagen $(0,0,0)$. ¿Qué nombre recibe este espacio?

Pregunta 4. Ahora colecciono todos estos vectores y (alejándome de esta imagen) consigo verlos como un solo elemento, el elemento cero, de otro espacio V. ¿Qué espacio es V? ¿Cómo son los elementos de V? Descríbelos geométricamente y algebraicamente. ¿Qué puedes afirmar de la dimensión de V?

- Pista 1: Para pensar geométricamente, si te ayuda, piensa en concreto. Escoge un elemento distinto del nulo de este conjunto V. Por ejemplo, volviendo a mirar los elementos de V de cerca, podemos escoger el elemento formado por los vectores cuya imagen es $(0,0,1)$. ¿Qué condición geomtŕica cumplen todos ellos?
- Pista 2: Para pensar algebraicamente, denota de alguna manera este elemento concreto de la Pista 1 escogiendo un vector de $\mathbb{K}^3$ que lo represente convenientemente. Ahora piensa cómo se relacionan el resto de vectores de este elemento con dicho representante.
- Pista 3 Para pensar en la dimensión de V, piensa en otro elemento más de V, por ejemplo el formado por los vectores cuya imagen es $(0,0,2)$. ¿Qué relación encuentras entre este elemento y el de la Pista 1?

Pregunta 5. ¿Encuentras alguna relación entre el espacio encontrado V y la imagen de la aplicación f? ¿Cuál? Representa en un diagrama las relaciones que existen entre la aplicación $f:\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, el espacio V y el espacio imf.

- Pista: Define una aplicación ϕ que relacione los elementos de V y los de imf. ¿Qué tipo de aplicación es? ¿Qué nombre recibe?

8.12.1.2 Revisado

Problema 7 con ampliación

Instrucciones. Vamos a trabajar en torno al Problema 7 de la hoja 8 de problemas. Primero individualmente y después por parejas.

- Lee detenidamente cada pregunta, las diversas cuestiones que incluyen, los pasos en que algunas están desglosadas y las indicaciones. Debes responder a todas ellas.
- Si lo consideras necesario, puedes ayudarte de hojas en sucio que deberás entregar junto a las respuestas.
- La intuición es válida, pero debes esforzarte por justificar tus argumentos matemáticamente. Para ello puedes y debes utilizar apuntes, libro...

Problema 7. Resuélvelo.
Calcular la matriz respecto de la base estándar de una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ que cumpla las condiciones siguientes:

1. $f((1,0,0)) \in L\left[(0,0,1)\right]$
2. $f^2 = f$
3. $ker(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : x+z=0\right\}$

Pregunta 1. La aplicación f es una proyección. ¿Sabrías justificar por qué? Utiliza este hecho para explicar cómo transforma esta aplicación el espacio $\mathbb{K}^3$ sin utilizar coordenadas.

- Paso 1: ¿Sabrías decir cómo se transforma el vector $(1,1,1)$?
- Paso 2: Fíjate en el cubo cuyos lados son los vectores de la base canónica. ¿Cómo lo transforma f? Haz una representación gráfica. (Indicación: Puedes utilizar el siguiente applet: $http://mathdl.maa.org/images/upload_library/4/vol5/latools/Transformer3D.html$)
- Paso 3: Describe el comportamiento geométrico de la función f como proyección, indicando la base y la dirección. (Indicación: Si te ayuda, piensa en la representación gráfica de proyecciones en el plano.)

Pregunta 2. ¿Cómo es la imagen de f? ¿Es f sobreyectiva? En caso de que la respuesta sea positiva, explica por qué. En caso de que la respuesta sea negativa, da un vector de $\mathbb{K}^3$ que no esté en la imagen.

Pregunta 3. f no es inyectiva. ¿Por qué?
En las Preguntas 3 y 4 vamos a realizar una construcción que nos permita solucionar esta falta de inyectividad de la f:

- Paso 1: Encuentra dos vectores cuya imagen sea la misma que la del vector $(1,1,1)$. ¿Hay algún vector en $\mathbb{K}^3$ que f deje fijo y que tenga la misma imagen que $(1,1,1)$?
- Paso 2: ¿Cuántos vectores más podrías encontrar con esa misma imagen? ¿Qué lugar geométrico describen esos vectores? (Indicación: Descríbelo geométricamente -por ejemplo, dibujando- y algebraicamente -por ejemplo, escribiendo una ecuación implícita-). ¿Encuentras alguna relación entre este lugar geométrico y la dirección de la proyección? Escribe esta relación de forma vectorial (es decir, de modo que no involucre coordenadas).

- Paso 3: Por último, dado cualquier vector de $v \in \mathbb{K}^3$, ¿sabrías decir cómo será el lugar geométrico de los vectores que tienen la misma imagen que v?

Pregunta 4. Ahora, agrupamos todos los vectores que tienen la misma imagen y los 'metemos en una misma bolsa' de modo que los vemos como un único elemento un nuevo conjunto V. También puedes pensar en V como el conjunto que vemos al alejarnos lo suficiente, de una imagen de $\mathbb{K}^3$, como para ver cada uno de los lugares geométricos descritos en la Pregunta 3 reducidos a un solo punto. ¿Sabrías decir qué tipo de conjunto es V?

- Paso 1: En la Pregunta 3 describimos los elementos de V -las 'bolsas'- geométrica, algebraica y vectorialmente. Teniendo en mente esas descripciones, ¿crees que puede suceder que un vector u tenga la misma imagen que v (y por tanto u está en la 'bolsa' de v), que otro vector w tenga la misma imagen que v (esto es, w está en la 'bolsa' de v), pero que u no esté en la 'bolsa' de w? Piensa qué propiedades (reflexiva, transitiva, simétrica, etc.) cumplen los vectores que pertenecen a un mismo elemento de V.

- Paso 2: ¿Puedes dotar a este conjunto V de estructura de espacio vectorial? (Indicación: elige, entre todos los vectores de cada 'bolsa', uno que sirva de 'etiqueta', por ejemplo, el vector que se queda fijo bajo el efecto de la aplicación f. Trata de definir las operaciones suma de bolsas y multiplicación por escalar de bolsas utilizando esta etiqueta. ¿Qué pasaría si en lugar de haber elegido esa etiqueta hubieras escogido otra, por ejemplo el vector de la bolsa que esté en el eje x?).

- Paso 3: En caso de que hayas logrado dotar a V de estructura de espacio vectorial, calcula su dimensión. Para ello deberás encontrar una base de V. (Indicación: Representa V gráficamente. Quizá esto te ayude a eligir dos elementos no nulos de V y a encontrar cierta relación entre ellos).

Pregunta 5. ¿Encuentras alguna relación entre el espacio V encontrado en la Pregunta 4 y la imagen de la aplicación f descrita en la Pregunta 2? ¿Cuál?

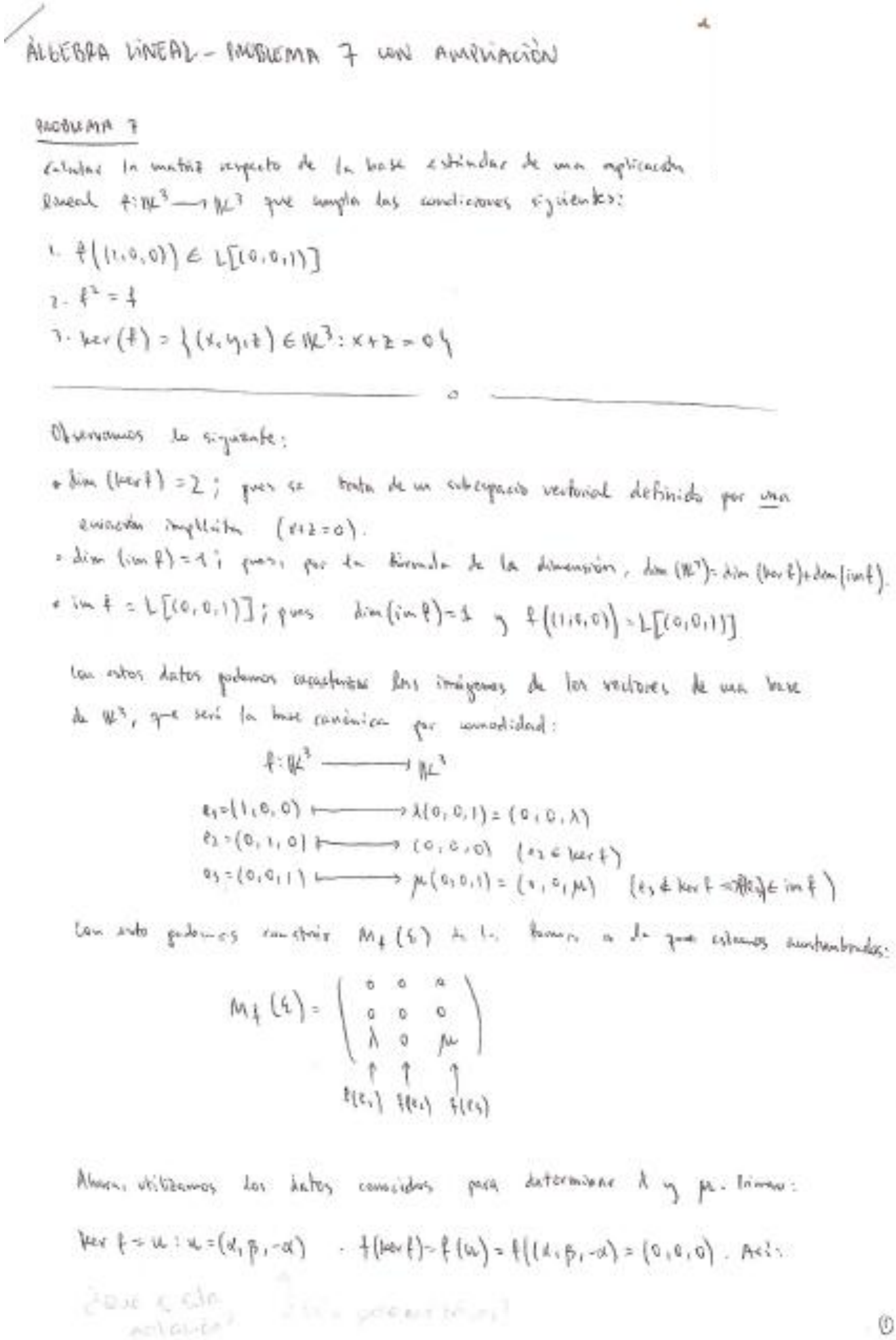
- Paso 1: Define una aplicación ϕ que relacione los elementos de V y los de imf. ¿Qué tipo de aplicación es?

- Paso 2: Representa en un diagrama las relaciones que existen entre la aplicación $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, V y el espacio imf.

- Paso 3: Compara este diagrama con el de la Factorización Canónica que te han explicado en clase. ¿Encuentras alguna diferencia? En caso afirmativo, ¿podrías describir ahora a V de otra forma? Demuestra que ambas descripciones son equivalentes.

8.12.2 Respuestas escritas de los estudiantes

A continuación se muestra el ejemplo de las respuestas escritas del Grupo 1 (pinchar en la imagen para acceder al documento completo).



ÁLGEBRA LINEAL - PROBLEMA 7 CON AMPLIACIÓN

PROBLEMA 7

Calcular la matriz respecto de la base estándar de una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla las condiciones siguientes:

1. $f((1,0,0)) \in L[(0,0,1)]$
2. $f^2 = f$
3. $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+z=0\}$

Observamos lo siguiente:

- $\dim(\ker f) = 2$; pues se trata de un subespacio vectorial definido por una ecuación implícita $(x+z=0)$.
- $\dim(\operatorname{im} f) = 1$; pues, por la fórmula de la dimensión, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$.
- $\operatorname{im} f = L[(0,0,1)]$; pues $\dim(\operatorname{im} f) = 1$ y $f((1,0,0)) = L[(0,0,1)]$

Con estos datos podemos caracterizar las imágenes de los vectores de una base de $\mathbb{R}^3$, que será la base canónica por comodidad:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$e_1 = (1,0,0) \longmapsto \lambda(0,0,1) = (0,0,\lambda)$$
$$e_2 = (0,1,0) \longmapsto (0,0,0) \quad (e_2 \in \ker f)$$
$$e_3 = (0,0,1) \longmapsto \mu(0,0,1) = (0,0,\mu) \quad (e_3 \notin \ker f \Rightarrow f(e_3) \in \operatorname{im} f)$$

Con esto podemos construir $M_f(\mathcal{E})$ de la forma a la que estamos acostumbrados:

$$M_f(\mathcal{E}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \end{array}$$

Ahora, utilizamos los datos conocidos para determinar λ y μ. Primero:

$\ker f = u : u = (\alpha, \beta, -\alpha)$. $f(\ker f) = f(u) = f((\alpha, \beta, -\alpha)) = (0,0,0)$. Así:

¿Qué es esto? ¿Son parámetros?

1

8.12.3 Análisis de las tutorías en Atlas.ti

Date: 01/04/2013 **P 6: S920110323TutoriaG1(completa).rtf** **Page: 1/53**

0001 TUTORÍA GRUPO 1

0002

0003 Miércoles 23 de Marzo de 2011.

0004

0005 Participantes: Ángel, Pablo, David y Elena. #00:00:00-0#

0006

0007 [Parece que les da un poco de vergüenza ser grabados de tan cerca. Ángel y Elena están rellenando los cuestionarios. Mientra, parece que David estaba hablando del papel de la visualización en clase.]

0008

0009 #00:00:00-0# B: ¿Que os acostumbran tanto a qué? #00:00:09-0# PERC: Visualización

0010

0011 #00:00:09-0# D: Que eso, que nos acostumbran tanto a... A no tener para nada en cuenta, eso, la parte gráfica, la parte visual, ¿no? Que luego aunque sea una ayuda en verdad la... El trabajar con la parte o sea... De apoyarnos con elementos visuales y tal sería más fácil, lo podríamos hacer. Pero estamos tan acostumbrados a lo otro que lo tenemos más en cuenta y supone más esfuerzo el dar el paso, decir, todo esto... A ver, qué significaría esto gráficamente... ¿Sabes? No porque visualizarlo sea más difícil y no te vaya a ayudar, al contrario, seguro que te va ayudar. Pero como estamos tan en esto, ¿sabes? Pues dar el paso de ir al otro sitio, pues nos cuesta más... (B: Vale) Vamos yo creo, porque cuando algo de esto me lo miro y tal, y lo veo, coño pues, qué rápido, sale fácil y lo entiendo y ¡guay!. Pero siempre lo que me cuesta un huevo es dar el paso de... De llegar a imaginarme eso. Una vez imaginado y una manejándote en esa mente/ ese ambiente, digamos, pues ya puedes resolvérselo y fácil y tal, y ayuda mucho. Pero... llegar hasta ahí es lo que... Como no estamos nada acostumbrados. Como es todo escrito y no hay nada así (hace gestos con las manos como de imaginar cosas)... #00:01:12-6# DIF PERC: Visualización

0012

0013 #00:01:12-6# P: Básicamente es que engaña, tío. #00:01:14-0# OBS

0014

0015 #00:01:14-0# D: Ya claro. #00:01:15-9#

8.12.4 Encuestas

8.12.4.1 Enunciado de las encuestas

ENCUESTA SOBRE LA ENTREGA: PROBLEMA 7 CON AMPLIACIÓN

Nombre y Apellidos:	
Fecha de Nacimiento:	
Grado en el que estás matriculada/o	Matemáticas / Ingeniería Matemática/ Estadística
¿Es tu primer año en la Universidad?	SI / NO
¿Tomas apuntes en Álgebra Lineal?	Teoría / Práctica / En ambas / NO, sólo el libro

1. ¿Te ha servido la actividad para comprender mejor algunos conceptos?
   a. SI ¿Cuáles?

   b. NO ¿Por qué?

2. ¿Qué te ha parecido más fácil? ¿Y más difícil? ¿Por qué?
   a. Más fácil:

   b. Más difícil:

3. ¿Consideras que lo visto en clase ha sido suficiente para resolver todas las cuestiones?
   a. SI ¿Qué resultados han sido necesarios?

   b. NO ¿Por qué? ¿Qué te ha faltado?

4. ¿Has conseguido ver la relación que existe entre *im f* y el espacio cociente $V=IK^3/ker\ f$? Descríbela ¿Cuáles crees que han sido los pasos clave para poder encontrarla?

5. ¿Ha habido alguna imagen mental que te haya ayudado a pensar este problema? ¿Cuál? Dibújala si lo crees necesario. ¿Cómo te ha ayudado? ¿Y cómo crees que la has adquirido?

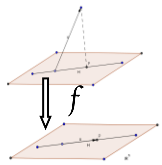
6. ¿Encuentras alguna relación entre esta entrega y la explicación del cociente del otro día en clase con los tornillos de la ferretería y la interpretación geométrica de un cociente IK^2/V?

a. SI ¿Cuál?

b. NO, ¿Por qué? (En caso de no recordar la explicación, indícalo aquí.)

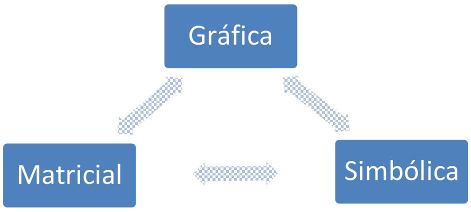
7. ¿Qué apartados te han resultado más sencillos? ¿Los que pedían interpretaciones geométricas o los que se podían responder sólo algebraicamente? ¿Por qué?

8. ¿Qué tipo de representación habéis utilizado en cada apartado? ¿Qué importancia consideras que ha tenido usar ese tipo de representación para poder responder al conjunto de preguntas? Rellena para cada apartado la casilla del tipo de representación que has utilizado con un número del 1 al 3 que indique tu valoración de la importancia. (1 nada, 2medio, 3 muy importante, 0 No sé).

		$y^t = M_f(\epsilon)x^t$ $M_f(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$p: E \to E;$ $V = im(p)\ y\ W = ker(p)$ $u \in E \Rightarrow u = v + w$ $con\ v = p(u)\ y\ w = u - p(u)$	
Apartado	Representación Gráfica	Representación Matricial	Representación simbólica	¿Por qué?
Problema 7				
Pregunta 1				
Pregunta 2				
Pregunta 3				
Pregunta 4				
Pregunta 5				

9. En general, de los tres tipos de representaciones presentados en la cuestión anterior (Gráfica, Matricial o Simbólica), ¿hay alguno qué utilices más frecuentemente a la hora de resolver problemas? ¿A qué crees que se debe esta preferencia? ¿Coincide con el tipo de representación que dirías que se usa más en clase?

10. ¿Te es fácil pasar de un tipo de representación a otro? Señala en el siguiente diagrama las direcciones en que consideres que te resulta más fácil y más difícil y explica por qué. Ten en cuenta que puedes elegir un único sentido de cada flecha.



11. ¿Crees que una respuesta basada en una representación gráfica puede ser una respuesta matemática válida? ¿La usarías en un examen? Explica tu respuesta.

12. Valora marcando una casilla del 1 al 5 (1 nada, 5 mucho, 0 No sé/No contesto) si esta actividad te ha servido para aprender a:

	1	2	3	4	5	0
Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica						
Representar gráficamente aplicaciones lineales						
Conocer mejor las características de las proyecciones						
Interpretar gráficamente el cociente $IK^3/\ker f$						
Entender el isomorfismo entre $im\ f$ y $IK^3/\ker f$						
Recordar el diagrama de la factorización canónica						
Reconocer la importancia de la notación en matemáticas						
Conectar distintas representaciones de las proyecciones y $IK^3/\ker f$						
Valorar la importancia de usar diversidad de representaciones						
Hacerme preguntas para profundizar en un problema de clase						
Otros:						

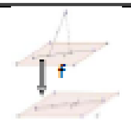
13. Valora la actividad (1 nada, 5 mucho, 0 No sé/No contesto):

	1	2	3	4	5	0
¿Te ha gustado la actividad?						
¿Te ha parecido difícil?						
¿Te ha gustado trabajar en grupo?						
¿Te parece similar o diferente a las demás que hacéis en clase?						
¿Te han servido de ayuda las pistas?						
¿Necesitarías más indicaciones en el enunciado del problema? ¿Cuáles?						
¿Alguna idea para mejorar en caso de que quiera repetirla con mis alumnos del año que viene?						

¡Muchas gracias por tus respuestas y por tu participación en la investigación! Si tienes algún comentario más, usa el dorso de la hoja.

8.12.4.2 Análisis de las encuestas

utilizado con un número del 1 al 3 que indique tu valoración de la importancia. (1 nada, 2medio, 3 muy importante, 0 No sé).

		$\varphi^t = M_f(e)x^t$ $M_f(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\varphi: E \to E$; $V = \mathrm{im}(\varphi)$ y $W = \ker(\varphi)$ [illegible]	
Apartado	Representación Gráfica	Representación Matricial	Representación simbólica	¿Por qué?
Problema 7	1 (1.3), 1 (1.4), 2 (2.1), 0 (2.3), 1 (2.4), 0 (2.5), 2 (3.1)	3 (1.3), 3 (1.4), 3 (2.1), 2 (2.2), 3 (2.3), 3 (2.4), 3 (2.5), 3 (3.1)	3 (1.3), 2 (1.4), 2 (2.1), 2 (2.2), 3 (2.3), 2 (2.4), 2 (2.5), 1 (3.1)	2.3: El ejercicio trataba de eso 3.1: Porque lo más importante son los cálculos aquí
Pregunta 1	3 (1.3), 2 (1.4), 3 (2.1), 3 (2.2), 3 (2.3), 2 (2.4), 3 (3.1)	3 (1.3), 1 (1.4), 1 (2.1), 1 (2.3), 0 (2.4), 0 (2.5), 2 (3.1)	3 (1.3), 1 (1.4), 2 (2.1), 2 (2.3), 1 (2.4), 1 (3.1)	3.1: Es más fácil verlo en esta
Pregunta 2	2 (1.3), 3 (1.4), 1 (2.1), 2 (2.4), 1 (3.1)	2 (1.3),1 (1.4), 2 (2.1), 1 (2.4), 1 (2.5), 2 (3.1)	2 (1.3), 3 (1.4), 3 (2.1), 3 (2.2), 1 (2.4), 3 (3.1)	3.1: Te vales de las expresiones para verlo y demostrarlo
Pregunta 3	1 (1.3), 1 (1.4), 1 (2.1), 1 (2.4), 1 (2.5), 1 (3.1)	1 (1.3),1 (1.4), 2 (2.1), 2 (2.2), 2 (2.4), 2 (2.5), 2 (3.1)	3 (1.3), 3 (1.4), 2 (2.1), 3 (2.5), 3	3.1: ""
Pregunta 4	2 (1.3), 2 (1.4), 1 (2.1), 0 (2.4), 0 (2.5), 3 (3.1)	1 (1.3),1 (1.4), 2 (2.1), 2 (2.2), 1 (2.4), 1 (2.5), 1 (3.1)	2 (1.3), 3 (1.4), 2 (2.1), 2 (2.2), 2 (2.4), 3 (2.5), 1 (3.1)	1.3: Es caso todo teoría 3.1: Aquí es más importante imaginártelo
Pregunta 5	1 (1.3), 1 (1.4), 2 (2.1), 1 (2.4), 0 (2.5), 1 (3.1)	1 (1.3),1 (1.4), 2 (2.1), 2 (2.2), 2 (2.4), 2 (2.5), 1 (3.1)	1 (1.3), 3 (1.4), 2 (2.1), 3 (2.2), 3 (2.4), 3 (2.5), 3 (3.1)	1.3: Teoría también 3.1: Ves que es lo explicado en clase
GLOBAL	2 (1.1) 3 (1.2) 3 (3.2, aprender la representación de los sev)	3 (1.1) 2 (1.2) 2 (3.2, "ver" mejor la aplicación)	2 (1.1) 2,5 (1.2), 3 (2.4) 3 (3.2, es más útil para responder algebraicamente)	1.2: La representación gráfica ha sido "la clave" para entender el problema y las representaciones amtricial y simbólica tienen su importancia para llegar a la rep. gráfica

2.2: (Escribe junto al enunciado de la pregunta) De otra manera creo que no lo hubiéramos sabido hacer.

2.3: (Al lado de la tabla) En general la representación gráfica, porque lo veo todo mejor de esa manera, viéndolo "con dibujitos"

9. En general, de los tres tipos de representaciones presentados en la cuestión anterior (Gráfica, Matricial o Simbólica), ¿hay alguno qué utilices más frecuentemente a la hora de resolver problemas? ¿A qué crees que se debe esta preferencia? ¿Coincide con el tipo de representación que dirías que se usa más en clase?

1.1: Uso más la matricial y la simbólica, de hecho, apensa uso la gráfica, ni en clase tampoco.
1.2: La parte gráfica (como ya he mencionado) es la que más ayuda una vez etendido geométricamente, aunque este paso puede ser complicado por no estar acostumbrados a visualizació cosas como espacios definidos por aplicaciones en IR3.
1.3: La matricial, pues determina completamente la aplicación y extraer datos de ella resulta muy cómodo. Diría que en dimensión 2 primaría los dibujos entre muchos compañeros, pero sólo en dimensión 2. En otro caso, creo que matricial.
1.4: Suelo preferir la noración simbólica, aunque generalmetne me veo obligado a trabajr con la representación matricial. Creo que se debe a que:

i) Nos acostumbran a trabajar así (especialmente en álgebra)

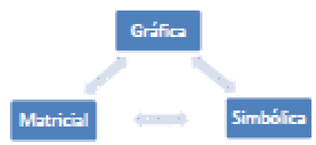
ii) Los resultados visuales suelen ser intuitivos, y no suelen servir a la hora de resolver explícitamente un problema

iii) Resulta "menos cómodo" imaginarse un espacio cociente que calcularlo, por ejemplo

2.1: Utilizo más frecuentemente la representación matricial y simbólica
2.2: - Procuro utilizar las 3 conjuntas, pero si no me sale aplico primero la gráfica y luego intento la matricial
- El año pasado di dibujo técnico y necesitas visualización
- No, se utiliza más en tóerica la simbólica y en práctica la matricial
2.3: La representación gráfica. Se debe a que lo veo todo mejor de esa manera. No (sin embargo, en análisis si)
2.4: La que más utilizo es la representación matricial o simbólica. Se febe a que estamos más acostumbrados a ver las cosas sobre el papel. Y creo que en clase también se utilizan más estos tipos de representación.
2.5: Las que ma´s utilizo son las dos últimas ya que son más exactas.

3.1: Es la que menos se usa pero es la que más fácil resulta para pensar en ella, la gráfica.
3.2: La representación matricial y simbólica, porque son las que me resultan más fáciles.

10. ¿Te es fácil pasar de un tipo de representación a otro? Señala en el siguiente di1.1rama las direcciones en que consideres que te resulta más fácil y más difícil y explica por qué. Ten en cuenta que puedes elegir un único sentido de cada flecha.



1.1: Difícil (hacia lo gráfico); Fácil: Matr. → Simb.
1.2: Sólo marca Matricial ←→ Simbólico (NO VÁLIDO, no se sabe si es más fácil o más difícil)
1.3: Lo más difícil (Matr→ Gráfica); Lo más fácil (Mat ←→Simb)